



Sujet d'étude 14 – Tronc commun

Chapitre. Généralités sur les fonctions numériques

Compilé par le prof. Saad Choukri

○ Problème (Une équation fonctionnelle et étude de sa solution).

L'objectif de ce problème est de déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$f(x) + 2f(1-x) = x^2 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \quad (E)$$

puis d'étudier la fonction ainsi obtenue.

- Partie I. Analyse et synthèse. On suppose qu'une telle fonction f existe.

- ① En remplaçant x par $1-x$ dans (E) , montrer que $f(1-x) + 2f(x) = (1-x)^2$.
- ② En déduire que $3f(x) = x^2 - 4x + 2$, puis l'expression de $f(x)$.
- ③ Réciproquement, vérifier que la fonction obtenue est bien solution de (E) , et conclure.

- Partie II. Étude de la fonction f , où $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{3}$.

- ④ Écrire $f(x)$ sous la forme $\frac{(x-2)^2 - 2}{3}$, puis en déduire que f admet un minimum que l'on précisera.
- ⑤ Montrer que $f(2+h) = f(2-h)$ pour tout réel h ; interpréter graphiquement.
- ⑥ Étudier les variations de f sur $] -\infty ; 2]$ puis sur $[2 ; +\infty[$ (on comparera $f(a)$ et $f(b)$), et dresser son tableau de variations.
- ⑦ Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et l'inéquation $f(x) \geq 0$.

- Partie III. Déterminer toutes les fonctions g définies sur $\mathbb{R}^*$ telles que $2g(x) - 3g\left(\frac{1}{x}\right) = x$, puis étudier la parité de g .

Fin