



Sujet d'étude 13 – Tronc commun

Chapitre. Produit scalaire dans le plan

Compilé par le prof. Saad Choukri

○ Problème (Le théorème de la médiane et ses applications).

Soit ABC un triangle et I le milieu du segment $[BC]$. L'objectif de ce problème est d'établir le théorème de la médiane

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2} \quad (*)$$

puis d'en voir quelques applications.

① Justifier que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$, et que $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

② En développant $AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2$ et AC^2 , établir l'identité (*).

③ Montrer de même que

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{BC^2}{4} \quad \text{et} \quad AB^2 - AC^2 = 2 \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CB}$$

④ (Application 1) On suppose $AB = 5$, $AC = 7$ et $BC = 8$. Calculer AI , puis $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et en déduire $\cos \widehat{BAC}$.

⑤ (Application 2) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $AI = \frac{BC}{2}$.

⑥ (Application 3) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

a) $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$;

b) $MB^2 + MC^2 = k$, où k est un réel donné (discuter suivant k).

Fin