



Sujet d'étude 4 – Tronc commun

Chapitre. Polynômes

Compilé par le prof. Saad Choukri

○ Problème (Racine d'un polynôme, factorisation et applications).

L'objectif de ce problème est d'établir le résultat suivant : si a est une racine d'un polynôme P , alors $(x - a)$ est un facteur de $P(x)$, puis d'en voir quelques applications. On considère le polynôme

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

- ① On rappelle l'identité $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + a^{n-1})$, valable pour tous réels x, a et tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Écrire $P(x) - P(a)$ en fonction de $x^3 - a^3$, $x^2 - a^2$ et $x - a$.

b) En déduire que si $P(a) = 0$, alors il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x - a)Q(x)$.

- ② Vérifier que $P(2) = 0$, puis déterminer les réels α et β tels que

$$P(x) = (x - 2)(x^2 + \alpha x + \beta)$$

- ③ Factoriser $x^2 + \alpha x + \beta$, puis écrire $P(x)$ comme produit de trois facteurs du premier degré.

- ④ (Application 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$, puis dresser le tableau de signes de $P(x)$ et résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$.

- ⑤ (Application 2) Simplifier, pour $x \notin \{-2; 2\}$, la fraction rationnelle

$$F(x) = \frac{P(x)}{x^2 - 4}$$

- ⑥ (Application 3) Soit $R(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + m$ où $m \in \mathbb{R}$. Déterminer m pour que 3 soit une racine de R , puis factoriser $R(x)$.

- ⑦ (Application 4) Montrer que pour tout entier naturel n , l'entier $P(n)$ est pair.

Fin