



Sujet d'étude 3 – Tronc commun

Chapitre. Ordre dans $\mathbb{R}$

Compilé par le prof. Saad Choukri

○ Problème (Les moyennes de deux nombres et quelques applications).

Soient a et b deux réels strictement positifs. On leur associe

$$h = \frac{2ab}{a+b}, \quad g = \sqrt{ab}, \quad m = \frac{a+b}{2}, \quad q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

appelés respectivement moyennes harmonique, géométrique, arithmétique et quadratique de a et b . On veut établir la chaîne d'inégalités $h \leq g \leq m \leq q$ (*), puis en voir quelques applications.

- ① Montrer que $x^2 + y^2 \geq 2xy$ pour tous réels x et y , et préciser le cas d'égalité.
- ② En remarquant que $a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$, montrer que $g \leq m$, avec $g = m \iff a = b$.
- ③ Vérifier que $m \times h = ab$, en déduire que $g^2 = m \times h$, puis que $h \leq g$.
- ④ Montrer que $q^2 - m^2 = \frac{(a-b)^2}{4}$, en déduire que $m \leq q$ et conclure (*). Vérifier enfin (*) pour $a = 2$ et $b = 8$.
- ⑤ (Application 1) Soit $x > 0$. En appliquant (*) aux réels x et $\frac{1}{x}$, montrer que $x + \frac{1}{x} \geq 2$, puis que $x + \frac{4}{x} \geq 4$.
- ⑥ (Application 2) Soient a, b, c trois réels strictement positifs. Montrer que $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$, puis que $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.
- ⑦ (Application 3) Un rectangle de dimensions L et ℓ a pour périmètre 20 cm. Montrer que son aire vérifie $A \leq 25$, et préciser le cas d'égalité.
- ⑧ (Application 4) Soit x un réel tel que $|x - 3| \leq \frac{1}{2}$. Encadrer x , puis, en écrivant $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$, montrer que $|x^2 - 9| \leq \frac{13}{4}$.

Fin