



Sujet d'étude 2 – Tronc commun

Chapitre. Ensembles numériques $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Compilé par le prof. Saad Choukri

○ Problème (Une identité remarquable et quelques applications).

L'objectif de ce problème est d'établir l'identité remarquable suivante,

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \quad (*)$$

vraie pour tout couple de nombres réels $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et on verra par la suite quelques applications relatives.

- Soit $n \geq 1$ un entier naturel.

① Vérifier que l'identité $(*)$ est vraie pour le cas $b = 0$.

② Montrons que l'identité $(*)$ est vraie pour le cas $b = 1$. Il s'agit de montrer

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a + 1), \quad (**)$$

a) Vérifier que l'identité $(**)$ est vraie pour le cas $a = 1$.

On suppose dans le reste de cette question que $a \neq 1$ et on pose

$$S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$$

b) Montrer que

$$a \times S_n = a + a^2 + \dots + a^n$$

c) En déduire que

$$a \times S_n - S_n = a^n - 1$$

d) Conclure.

e) (Application 1) Montrer que

$$1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{99} = \frac{7^{100} - 1}{6}$$

f) (Application 2) Simplifier la sommation suivante,

$$S = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11\dots 1}_{n \text{ fois}}$$

où $n \geq 2$ un entier naturel.

③ En appliquant l'identité $(**)$ sur le réel $c = a/b$ (avec $b \neq 0$), établir l'identité $(*)$.

④ (Quelques applications arithmétiques)

a) (Application 3) Montrer que l'entier $7^{2n} - 1$ est divisible par 24 pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

b) (Application 4) Montrer que 13 divise $48^n - 35^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

c) (Application 5) Montrer que l'entier $11^{2025} + 1$ est divisible par 12.

⑤ (Application 6) Soient a et b deux nombres réels.

a) On suppose dans cette question que a est $> b$.

i. Montrer que

$$a^2 + ab + b^2 > 0$$

Indication. Remarquer que $2(a^2 + ab + b^2) = (a + b)^2 + a^2 + b^2$.

ii. En déduire que $a^3 > b^3$.

b) Soient a et b deux nombres réels tels que $a^3 = b^3$.

• Prouver que $a = b$.

⑥ Soient x et y deux nombres réels et n un entier naturel impair.

• Montrer que

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

*

* *

Fin