



Parabole et hyperbole – Série d'exercices 1

Classe. Tronc commun

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Forme canonique et sommet).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$. On note $(\mathcal{P})$ sa courbe représentative.

- ① Écrire $f(x)$ sous sa forme canonique.
- ② En déduire les coordonnées du sommet S de $(\mathcal{P})$ et une équation de son axe de symétrie.
- ③ Dresser le tableau de variations de f .

○ Exercice 2 (Étude complète d'une parabole).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$.

- ① Écrire $f(x)$ sous sa forme canonique, puis déterminer le sommet de la parabole.
- ② Montrer que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ et préciser sa valeur.
- ③ Dresser le tableau de variations de f , puis tracer sa courbe.

○ Exercice 3 (Retrouver une parabole).

Dans un repère, on considère la parabole $(\mathcal{P})$ de sommet $S(1, -2)$ passant par l'origine O .

- Déterminer l'expression de la fonction du second degré dont $(\mathcal{P})$ est la courbe représentative.



○ Exercice 4 (Intersections avec les axes).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 6$ et $(\mathcal{P})$ sa courbe.

- ① Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{P})$ avec l'axe des abscisses.
- ② Déterminer le point d'intersection de $(\mathcal{P})$ avec l'axe des ordonnées.
- ③ En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

○ Exercice 5 (Axe de symétrie).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

- ① Montrer que pour tout réel h , $f(3 + h) = f(3 - h)$.
- ② Interpréter géométriquement ce résultat.

○ Exercice 6 (Parabole et droite).

On considère la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation $y = x^2 - 2x + 3$ et la droite (D) d'équation $y = x + 1$.

- ① Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{P})$ et (D) .
- ② Étudier la position relative de $(\mathcal{P})$ et (D) , c'est-à-dire déterminer suivant x le signe de la différence des deux ordonnées.

○ Exercice 7 (Un problème d'optimisation).

On dispose d'une clôture de 20 mètres pour délimiter un enclos rectangulaire. On note x la largeur de cet enclos, en mètres.

- ① Exprimer l'aire $A(x)$ de l'enclos en fonction de x , et préciser l'intervalle auquel x appartient.
- ② Déterminer les dimensions de l'enclos d'aire maximale, ainsi que cette aire.

○ Exercice 8 (La fonction inverse).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

- ① Étudier la parité de f et interpréter graphiquement le résultat.
- ② Dresser le tableau de variations de f , puis tracer sa courbe.



○ Exercice 9 (Une fonction homographique).

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ et $(\mathcal{H})$ sa courbe représentative.

- ① Déterminer l'ensemble de définition de f .
- ② Montrer que $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$.
- ③ En déduire le tableau de variations de f , puis tracer $(\mathcal{H})$.

○ Exercice 10 (Forme réduite).

Écrire chacune des fonctions suivantes sous la forme $\alpha + \frac{k}{x-\beta}$.

- ① $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$.
- ② $g(x) = \frac{x+4}{x-3}$.

○ Exercice 11 (Déterminer une fonction homographique).

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{ax+b}{x-1}$, où a et b sont deux réels.

- Déterminer a et b sachant que $f(0) = 1$ et $f(2) = 5$.

○ Exercice 12 (Hyperbole et droite).

On considère l'hyperbole $(\mathcal{H})$ d'équation $y = \frac{2x+1}{x-1}$ et la droite (D) d'équation $y = x + 1$.

- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{H})$ et (D) .

○ Exercice 13 (Image d'un intervalle).

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$.

- ① Déterminer le sens de variation de f sur $]1, +\infty[$.
- ② Déterminer l'image de l'intervalle $[2, 4]$ par f .



○ Exercice 14 (Une inéquation).

On note $(\mathcal{H})$ la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$.

- ① Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\frac{2x+1}{x-1} \leq 2$$

- ② Interpréter graphiquement le résultat obtenu, en considérant la position de $(\mathcal{H})$ par rapport à la droite d'équation $y = 2$.

○ Exercice 15 (Signe et parabole).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

- ① Déterminer le sommet de la parabole représentant f .
② Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$, puis interpréter graphiquement le résultat.

Exercices supplémentaires

○ Exercice 16 (L'axe de symétrie en général).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$. On pose $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

- ① Écrire $f(x)$ sous sa forme canonique.
② Montrer que pour tout réel h , $f(\alpha+h) = f(\alpha-h)$, puis interpréter géométriquement ce résultat.

○ Exercice 17 (Centre de symétrie).

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ et $(\mathcal{H})$ sa courbe. On considère le point $\Omega(1, 2)$.

- ① Montrer que pour tout réel non nul h , $f(1+h) + f(1-h) = 4$.
② En déduire que Ω est un centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{H})$.



○ Exercice 18 (Une famille de paraboles).

Soit m un nombre réel. On considère la parabole $(\mathcal{P}_m)$ d'équation

$$y = x^2 - 2mx + m + 2$$

- ① Déterminer les coordonnées du sommet S_m de $(\mathcal{P}_m)$ en fonction de m .
- ② Montrer que, lorsque m décrit $\mathbb{R}$, le point S_m décrit une parabole dont on donnera une équation.

○ Exercice 19 (Une condition sur un paramètre).

On reprend la parabole $(\mathcal{P}_m)$ de l'exercice précédent.

- ① Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $(\mathcal{P}_m)$ ne coupe pas l'axe des abscisses.
- ② Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $(\mathcal{P}_m)$ est tangente à l'axe des abscisses, et préciser alors le point de contact.

○ Exercice 20 (Une involution).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

- ① Montrer que pour tout $x \neq 1$, on a $f(x) \neq 1$.
- ② En déduire que $f \circ f$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, puis montrer que $f(f(x)) = x$.
- ③ Interpréter graphiquement ce résultat à l'aide de la droite d'équation $y = x$.

* *
*

Fin