



Généralités sur les fonctions numériques – Série d'exercices 1

Classe. Tronc commun

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Ensemble de définition).

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

① $f(x) = \frac{2x - 1}{x - 3}.$

② $g(x) = \sqrt{x + 2}.$

③ $h(x) = \frac{x}{x^2 - 4}.$

④ $k(x) = \frac{\sqrt{x - 1}}{x - 4}.$

○ Exercice 2 (Images et antécédents).

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

① Calculer $f(0)$, $f(-1)$ et $f(\sqrt{2})$.

② Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f .

③ Le nombre -1 admet-il un antécédent par f ?

○ Exercice 3 (Égalité de deux fonctions).

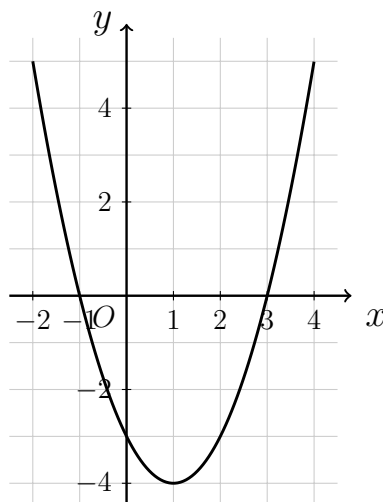
On considère les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{et} \quad g(x) = x + 1$$

- Les fonctions f et g sont-elles égales ? Justifier soigneusement.

○ Exercice 4 (Lecture graphique).

La courbe ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2, 4]$.



- ① Déterminer graphiquement $f(0)$ et $f(2)$.
- ② Déterminer les antécédents de 0, puis ceux de -3 .
- ③ Dresser le tableau de variations de f et donner son minimum.
- ④ Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 0$.

○ Exercice 5 (Taux de variation).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 5$.

- ① Soient a et b deux réels distincts. Calculer le taux de variation $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
- ② En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

○ Exercice 6 (Sens de variation).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x$.

- ① Soient a et b deux réels distincts. Montrer que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = a + b + 2$.
- ② En déduire que f est croissante sur $[-1, +\infty[$ et décroissante sur $] - \infty, -1]$.

○ Exercice 7 (Parité).

Étudier la parité de chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$.



① $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1.$

② $g(x) = x^3 - x.$

③ $h(x) = x^2 + x.$

④ $k(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}.$

○ Exercice 8 (Extremum).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 7.$

① Écrire $f(x)$ sous sa forme canonique.

② En déduire que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$, que l'on précisera ainsi que la valeur de x en laquelle il est atteint.

○ Exercice 9 (Comparaison de deux fonctions).

On considère les fonctions f et g définies sur $[0, 1]$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x.$

- Comparer $f(x)$ et $g(x)$ pour tout x de l'intervalle $[0, 1]$, puis interpréter graphiquement le résultat.

○ Exercice 10 (Image d'un intervalle).

① Soit f définie par $f(x) = 2x - 3.$ Déterminer l'image de l'intervalle $[1, 4]$ par $f.$

② Soit g définie par $g(x) = x^2.$ Déterminer l'image de l'intervalle $[-2, 3]$ par $g.$

○ Exercice 11 (Fonction affine).

Soit f une fonction affine telle que $f(1) = 3$ et $f(-2) = -3.$

① Déterminer l'expression de $f(x).$

② Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x.$

○ Exercice 12 (Valeur absolue).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x - 2|.$

① Écrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.



- ② Dresser le tableau de variations de f , puis tracer sa courbe représentative.

○ Exercice 13 (Fonctions de référence).

- Donner le sens de variation de chacune des fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$, en précisant à chaque fois l'intervalle d'étude.

○ Exercice 14 (Une fonction homographique).

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Montrer que pour tout x de cet ensemble, $f(x) = 2 + \frac{3}{x - 1}$.

○ Exercice 15 (Résolution graphique).

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 2$.

- Tracer les courbes des deux fonctions dans un même repère.
- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$, puis retrouver le résultat par le calcul.

Exercices supplémentaires

○ Exercice 16 (Une fonction bornée).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

- Étudier la parité de f .
- Montrer que pour tout réel x , $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$.

Indication. Comparer $2|x|$ et $x^2 + 1$.



○ Exercice 17 (Sens de variation).

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

- ① Montrer que pour tous réels distincts a et b de $]1, +\infty[$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{-3}{(a-1)(b-1)}$$

- ② En déduire que f est décroissante sur $]1, +\infty[$.

○ Exercice 18 (Paire et impaire).

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que si f est à la fois paire et impaire, alors f est la fonction nulle.

○ Exercice 19 (Parité d'un produit).

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

- ① On suppose que f et g sont impaires. Étudier la parité de la fonction $f \times g$.
- ② On suppose que f est paire et g impaire. Étudier la parité de la fonction $f \times g$.
- ③ Que peut-on dire de la parité de la fonction $f + g$ dans ce dernier cas ?

○ Exercice 20 (Une équation fonctionnelle).

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ vérifiant, pour tout réel non nul x ,

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

- ① Déterminer l'expression de $f(x)$.
- ② Vérifier que la fonction obtenue convient, puis étudier sa parité.

Indication. Remplacer x par $\frac{1}{x}$ afin d'obtenir une seconde relation.

* *
*

Fin