



Le produit scalaire dans le plan – Série d'exercices 1

Classe. Tronc commun

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Calculs dans un carré).

Soit $ABCD$ un carré de côté 4 et de centre O .

- ① Calculer les produits scalaires suivants,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

- ② Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.

○ Exercice 2 (Calculs dans un triangle équilatéral).

Soit ABC un triangle équilatéral de côté $a > 0$.

- ① Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- ② Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$, puis $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$.

- ③ En déduire la valeur de $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$.

○ Exercice 3 (Propriétés du produit scalaire).

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Développer et simplifier les expressions suivantes.

- ① $(\vec{u} + \vec{v})^2$ et $(\vec{u} - \vec{v})^2$.

- ② $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

○ Exercice 4 (Expression analytique).

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On considère les vecteurs $\vec{u}(2, -3)$ et $\vec{v}(1, 4)$.



- ① Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- ② Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
- ③ En déduire le cosinus de l'angle formé par les deux vecteurs.
- ④ Déterminer les coordonnées d'un vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$.

○ Exercice 5 (Orthogonalité et paramètre).

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soit m un nombre réel et soient les vecteurs $\vec{u}(m, 3)$ et $\vec{v}(2, m - 1)$.

- Déterminer la valeur de m pour laquelle les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

○ Exercice 6 (Nature d'un triangle).

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On considère les points $A(1, 2)$, $B(4, 3)$ et $C(2, -1)$.

- ① Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- ② En déduire la nature du triangle ABC .
- ③ Calculer les longueurs AB et AC , puis l'aire du triangle ABC .
- ④ Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC .

○ Exercice 7 (Produit scalaire et projection).

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $AB = 3$ et $BC = 4$. On note H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) .

- ① Calculer AC .
- ② Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en utilisant la projection orthogonale, puis en déduire la longueur AH .

○ Exercice 8 (Théorème d'Al-Kashi).

Soit ABC un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 7$ et $\hat{A} = 60^\circ$.

- ① Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- ② En utilisant l'égalité $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, calculer BC^2 puis BC .



○ Exercice 9 (Vecteur normal et droite).

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

- ① Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point $A(1, 4)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2, -3)$.
- ② Déterminer un vecteur normal de la droite (Δ) d'équation $x + 5y - 2 = 0$.

○ Exercice 10 (Droites perpendiculaires).

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On considère les droites

$$(D) : 2x - y + 1 = 0 \quad \text{et} \quad (\Delta) : x + 2y - 3 = 0$$

- ① Montrer que les droites (D) et (Δ) sont perpendiculaires.
- ② Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

○ Exercice 11 (Hauteur d'un triangle).

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On considère les points $A(0, 3)$, $B(-2, -1)$ et $C(4, 1)$.

- Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .

○ Exercice 12 (Équation d'un cercle).

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

- ① Déterminer une équation du cercle de centre $\Omega(1, -2)$ et de rayon 3.
- ② Montrer que l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
- ③ Déterminer de même l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 10 = 0$.

○ Exercice 13 (Un ensemble de points).

Soient A et B deux points distincts du plan.

- ① Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
- ② Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, déterminer cet ensemble lorsque $A(1, 3)$ et $B(5, -1)$.



○ Exercice 14 (Théorème de la médiane).

Soient A et B deux points du plan et I le milieu du segment $[AB]$. Soit M un point quelconque du plan.

① Montrer que $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$.

② Application. On donne $AB = 6$ et $MI = 4$. Calculer $MA^2 + MB^2$.

○ Exercice 15 (Un losange).

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

- Montrer que $ABCD$ est un losange si et seulement si $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

Exercices supplémentaires

○ Exercice 16 (Une formule utile).

Soit ABC un triangle.

① Montrer que

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$$

② En déduire le théorème d'Al-Kashi.

○ Exercice 17 (Un ensemble de points).

Soient A et B deux points distincts du plan, I le milieu du segment $[AB]$ et k un nombre réel.

① Montrer que pour tout point M du plan, $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{IM}$.

② En déduire l'ensemble des points M vérifiant $MA^2 - MB^2 = k$.

③ Déterminer cet ensemble dans le cas particulier où $k = 0$.

○ Exercice 18 (L'orthocentre).

Soit ABC un triangle. On note H le point d'intersection des hauteurs issues de A et de B .

① Montrer que $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$.



- ② En déduire que $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, puis que les trois hauteurs du triangle sont concourantes.

Indication. Remarquer que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}$.

○ Exercice 19 (Une propriété du carré).

Soit $ABCD$ un carré et M un point quelconque du plan.

- ① Montrer que

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$$

- ② Ce résultat reste-t-il vrai si $ABCD$ est un rectangle ? Justifier.

○ Exercice 20 (Une inégalité).

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

- ① Montrer que $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

- ② En déduire que pour tous réels a, b, c et d ,

$$|ac + bd| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}$$

- ③ Application. Soient x et y deux réels vérifiant $x^2 + y^2 = 1$. Montrer que

$$|3x + 4y| \leq 5$$

* *
*

Fin