



# Transformations usuelles dans le plan – Série d'exercices 1

## Classe. Tronc commun

Compilé par le prof. Saad Choukri

*Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.*

### ○ Exercice 1 (Symétrie centrale).

Soit  $O$  un point du plan et  $S_O$  la symétrie centrale de centre  $O$ .

- ① Rappeler la caractérisation vectorielle du point  $M' = S_O(M)$ .
- ② Soient  $M$  et  $N$  deux points d'images respectives  $M'$  et  $N'$ . Montrer que  $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$ .
- ③ En déduire que  $M'N' = MN$  et que les droites  $(MN)$  et  $(M'N')$  sont parallèles.

### ○ Exercice 2 (Symétrie axiale).

Soit  $(\Delta)$  une droite du plan et  $S_{(\Delta)}$  la symétrie axiale d'axe  $(\Delta)$ .

- ① Construire l'image d'un triangle  $ABC$  par  $S_{(\Delta)}$ .
- ② Déterminer l'ensemble des points invariants par  $S_{(\Delta)}$ .
- ③ Déterminer  $S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta)}$ .

### ○ Exercice 3 (Translation).

Soit  $ABC$  un triangle et  $t$  la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

- ① Déterminer les images des points  $A$  et  $B$  par  $t$ .
- ② Construire l'image  $C'$  du point  $C$  par  $t$ , puis préciser la nature du quadrilatère  $ACC'B$ .

### ○ Exercice 4 (Homothétie).

Soient  $O$  et  $A$  deux points distincts du plan.

- ① Construire l'image  $A'$  du point  $A$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport 2.
- ② Construire l'image  $A''$  du point  $A$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $-\frac{1}{2}$ .
- ③ Que peut-on dire de l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $-1$  ?

### ○ Exercice 5 (Conservation des distances).

Soit  $t$  la translation de vecteur  $\vec{u}$ . Soient  $M$  et  $N$  deux points d'images respectives  $M'$  et  $N'$ .

- ① Montrer que  $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ .
- ② En déduire que  $t$  conserve les distances, ainsi que le milieu d'un segment.

### ○ Exercice 6 (Propriété de l'homothétie).

Soit  $h$  l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $k$  non nul. Soient  $M$  et  $N$  deux points d'images respectives  $M'$  et  $N'$ .

- ① Montrer que  $\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}$ .
- ② En déduire que  $M'N' = |k| MN$  et que les droites  $(MN)$  et  $(M'N')$  sont parallèles.

### ○ Exercice 7 (Images des figures usuelles).

Recopier et compléter le tableau suivant, en précisant l'image de chaque figure.

|                        | Translation | Symétrie centrale | Homothétie de rapport $k$ |
|------------------------|-------------|-------------------|---------------------------|
| Une droite             |             |                   |                           |
| Un segment $[AB]$      |             |                   |                           |
| Un cercle de rayon $R$ |             |                   |                           |

### ○ Exercice 8 (Écriture analytique).

Le plan est rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On considère le point  $A(3, -1)$  et le point  $\Omega(1, 2)$ .

- ① Déterminer les coordonnées de l'image de  $A$  par la symétrie centrale de centre  $\Omega$ .



- ② Déterminer les coordonnées de l'image de  $A$  par la translation de vecteur  $\vec{u}(3, -1)$ .
- ③ Déterminer les coordonnées de l'image de  $A$  par l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport 2.

### ○ Exercice 9 (Image d'une droite).

Le plan est rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On considère la droite  $(D)$  d'équation  $2x - y + 3 = 0$ .

- ① Déterminer une équation de l'image de  $(D)$  par la translation de vecteur  $\vec{u}(3, -1)$ .
- ② Déterminer une équation de l'image de  $(D)$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport 3.
- ③ Vérifier dans chaque cas que la droite obtenue est parallèle à  $(D)$ .

### ○ Exercice 10 (Reconnaître une transformation).

Le plan est rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Une transformation  $f$  envoie le point  $A(1, 2)$  sur  $A'(5, 2)$  et le point  $B(3, -1)$  sur  $B'(7, -1)$ .

- Sachant que  $f$  est l'une des transformations usuelles, préciser sa nature et ses éléments caractéristiques.

### ○ Exercice 11 (Composition).

- ① Soient  $t$  et  $t'$  les translations de vecteurs respectifs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Déterminer  $t' \circ t$ .
- ② Soit  $S_O$  la symétrie centrale de centre  $O$ . Déterminer  $S_O \circ S_O$ .
- ③ Montrer que la symétrie centrale de centre  $O$  est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

### ○ Exercice 12 (Homothétie et parallélisme).

Soit  $ABC$  un triangle et  $h$  l'homothétie de centre  $A$  et de rapport 2. On note  $B'$  et  $C'$  les images respectives de  $B$  et  $C$ .

- ① Montrer que  $\overrightarrow{B'C'} = 2 \overrightarrow{BC}$ .
- ② En déduire que les droites  $(BC)$  et  $(B'C')$  sont parallèles et comparer les longueurs  $BC$  et  $B'C'$ .



### ○ Exercice 13 (Image d'un cercle).

Soit  $(C)$  un cercle de centre  $I$  et de rayon  $R = 3$  cm, et soit  $h$  l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $-2$ .

- ① Déterminer la nature de l'image de  $(C)$  par  $h$ , ainsi que son centre et son rayon.
- ② Même question pour l'image de  $(C)$  par la symétrie centrale de centre  $O$ .
- ③ Même question pour l'image de  $(C)$  par une translation.

### ○ Exercice 14 (Conservation du milieu).

Soit  $h$  une homothétie de centre  $O$  et de rapport  $k$  non nul. Soient  $A$  et  $B$  deux points d'images respectives  $A'$  et  $B'$ , et soit  $I$  le milieu du segment  $[AB]$ .

- ① Montrer que  $h(I)$  est le milieu du segment  $[A'B']$ .
- ② Ce résultat reste-t-il vrai pour une translation ? pour une symétrie centrale ?

### ○ Exercice 15 (Une construction).

Soient  $(C)$  un cercle de centre  $I$  et  $A$  un point extérieur à ce cercle.

- ① Construire l'image du cercle  $(C)$  par l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $\frac{1}{2}$ , puis préciser la position relative des deux cercles obtenus.
- ② Le point  $A$  est-il extérieur au cercle image ? Justifier.

## Exercices supplémentaires

### ○ Exercice 16 (Composée de deux symétries centrales).

Soient  $O$  et  $O'$  deux points distincts du plan. On note  $S_O$  et  $S_{O'}$  les symétries centrales de centres respectifs  $O$  et  $O'$ .

- ① Montrer que  $S_{O'} \circ S_O$  est la translation de vecteur  $2\overrightarrow{OO'}$ .
- ② Déterminer de même  $S_O \circ S_{O'}$ . A-t-on  $S_{O'} \circ S_O = S_O \circ S_{O'}$  ?

### ○ Exercice 17 (Composée de deux homothéties).

Soient  $h$  et  $h'$  les homothéties de même centre  $O$  et de rapports respectifs  $k$  et  $k'$ , tous deux non nuls.



- ① Montrer que  $h' \circ h$  est l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $kk'$ .
- ② Dans quel cas  $h' \circ h$  est-elle l'application identique du plan ?

### ○ Exercice 18 (Centre de gravité).

Soit  $ABC$  un triangle de centre de gravité  $G$ , et soient  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  les milieux respectifs des segments  $[BC]$ ,  $[AC]$  et  $[AB]$ .

- ① Montrer que  $\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$ .
- ② En déduire que  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont les images respectives de  $A$ ,  $B$  et  $C$  par l'homothétie de centre  $G$  et de rapport  $-\frac{1}{2}$ .

### ○ Exercice 19 (Conservation du centre de gravité).

Soit  $ABC$  un triangle de centre de gravité  $G$  et soit  $h$  une homothétie de centre  $O$  et de rapport  $k$  non nul. On note  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  et  $G'$  les images respectives de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $G$ .

- ① Montrer que  $\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = \vec{0}$ .
- ② En déduire que  $G'$  est le centre de gravité du triangle  $A'B'C'$ .

### ○ Exercice 20.

Soient  $(C)$  et  $(C')$  deux cercles de centres respectifs  $I$  et  $I'$  distincts, et de rayons respectifs  $R$  et  $R'$  avec  $R \neq R'$ .

- ① Montrer qu'il existe une homothétie de rapport positif transformant  $(C)$  en  $(C')$ , et déterminer son centre.
- ② Existe-t-il également une homothétie de rapport négatif transformant  $(C)$  en  $(C')$  ?

\* \*  
\*

*Fin*