

La projection dans le plan – Série d'exercices 1

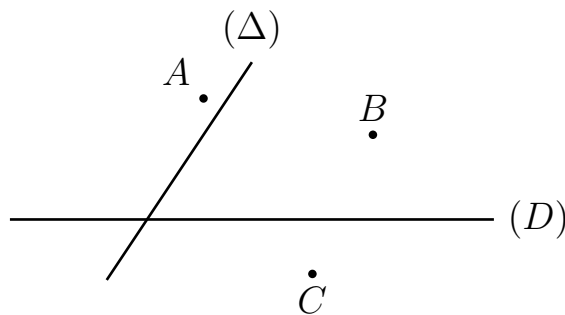
Classe. Tronc commun

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Construction).

Le plan est muni de deux droites sécantes (D) et (Δ) . On note p la projection sur la droite (D) parallèlement à la droite (Δ) .



- Reproduire la figure, puis construire les points $A' = p(A)$, $B' = p(B)$ et $C' = p(C)$.

○ Exercice 2 (Points invariants).

On garde les notations de l'exercice précédent et on note O le point d'intersection de (D) et (Δ) .

- ① Déterminer $p(M)$ lorsque M est un point de la droite (D) .
- ② Déterminer $p(M)$ lorsque M est un point de la droite (Δ) .
- ③ Quelle est l'image de la droite (Δ) par la projection p ?

○ Exercice 3 (Conservation de l'alignement).

Soient A , B et C trois points du plan d'images respectives A' , B' et C' par une projection p .



- Montrer que si A , B et C sont alignés, alors A' , B' et C' le sont aussi.

La réciproque est-elle vraie ? Justifier par un contre-exemple.

○ Exercice 4 (Conservation du milieu).

Soient A et B deux points du plan et I le milieu du segment $[AB]$. On note A' , B' et I' leurs images par une projection p .

- Montrer que I' est le milieu du segment $[A'B']$.

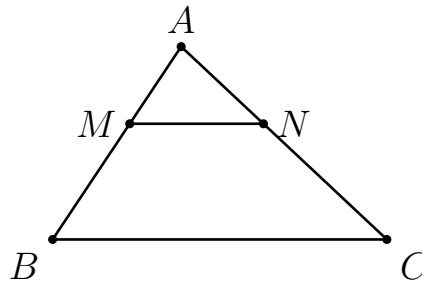
○ Exercice 5 (Conservation du rapport).

Soient A , B et C trois points du plan tels que $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$, où k est un réel. On note A' , B' et C' leurs images par une projection p .

- Montrer que $\overrightarrow{A'C'} = k \overrightarrow{A'B'}$.

○ Exercice 6 (Théorème de Thalès).

ABC est un triangle. Les points M et N appartiennent respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$ et vérifient $(MN) \parallel (BC)$.



On donne $AM = 3$, $AB = 5$, $AN = 4$ et $BC = 7$.

- Calculer les longueurs AC et MN .

○ Exercice 7 (Réciproque du théorème de Thalès).

ABC est un triangle. Les points M et N appartiennent respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$ et vérifient

$$AB = 8, \quad AM = 3, \quad AC = 12 \quad \text{et} \quad AN = 4,5$$

- Montrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



○ Exercice 8 (Partage d'un segment).

Soit $[AB]$ un segment donné.

- ① Construire, à la règle et au compas, les points qui partagent le segment $[AB]$ en cinq parties de même longueur.
- ② Justifier la construction à l'aide d'une projection.

○ Exercice 9 (Image d'un parallélogramme).

Soit $ABDC$ un parallélogramme et p une projection du plan. On note A', B', C' et D' les images respectives de A, B, C et D .

- Montrer que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.

Le quadrilatère $A'B'D'C'$ est-il un parallélogramme ? Justifier.

○ Exercice 10 (Droite des milieux).

Soit ABC un triangle. On note I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$.

- ① Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
- ② En déduire que $(IJ) \parallel (BC)$ et que $IJ = \frac{1}{2}BC$.

○ Exercice 11 (Projection orthogonale).

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) .

- ① Préciser la droite sur laquelle on projette et la direction de cette projection.
- ② Déterminer les images des points A, B et C par cette projection.

○ Exercice 12 (Projection et calcul vectoriel).

Soit ABC un triangle et M le point défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. On note p la projection sur la droite (AC) parallèlement à la droite (BC) .

- ① Déterminer les images des points A, B et C par p .
- ② En déduire l'image M' du point M , puis exprimer $\overrightarrow{AM'}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

○ Exercice 13 (Thalès dans un trapèze).

Soit $ABCD$ un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$, c'est-à-dire tel que $(AB) \parallel (CD)$. Les droites (AD) et (BC) se coupent en un point S .

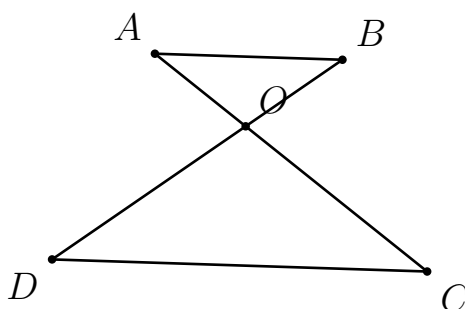
- ① Sachant que $SA = 4$, $SD = 6$ et $AB = 5$, calculer la longueur CD .
- ② Sachant de plus que $SB = 6$, calculer la longueur BC .

○ Exercice 14 (Configuration en papillon).

Les points A , O et C sont alignés, ainsi que les points B , O et D . On suppose que $(AB) \parallel (CD)$ et que

$$OA = 3, \quad OB = 4, \quad OC = 6$$

- Calculer la longueur OD , puis le rapport $\frac{CD}{AB}$.



○ Exercice 15 (Une construction).

Soient a , b et c trois longueurs données.

- Construire, en utilisant le théorème de Thalès, un segment de longueur $\frac{ab}{c}$.

Exercices supplémentaires

○ Exercice 16 (Théorème de Thalès généralisé).

Trois droites parallèles (d_1) , (d_2) et (d_3) coupent une première droite en A , B et C , et une seconde droite en A' , B' et C' .

- ① On note k le réel tel que $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$. En utilisant une projection convenable, montrer que $\overrightarrow{A'B'} = k \overrightarrow{A'C'}$.

② En déduire que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

○ Exercice 17 (Conservation du centre de gravité).

Soit ABC un triangle de centre de gravité G et p une projection du plan. On note A' , B' , C' et G' les images respectives de A , B , C et G .

① Montrer que $\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = \vec{0}$.

② En déduire que G' est le centre de gravité du triangle $A'B'C'$ lorsque les points A' , B' et C' ne sont pas confondus. Que peut-on dire lorsque A' , B' et C' sont alignés ?

○ Exercice 18 (Un alignement dans le trapèze).

Soit $ABCD$ un trapèze tel que $(AB) \parallel (CD)$. On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$, et K le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD) .

- Montrer que les points I , J et K sont alignés.

Indication. Projeter sur la droite (IJ) parallèlement à (AB) .

○ Exercice 19 (Une projection composée).

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes. On note p la projection sur (D) parallèlement à (Δ) , et q la projection sur (Δ) parallèlement à (D) .

① Déterminer $p \circ p$.

② Déterminer $q \circ p$ et $p \circ q$. A-t-on $p \circ q = q \circ p$?

○ Exercice 20.

Soit ABC un triangle et I le milieu du segment $[BC]$. La parallèle à la droite (AI) passant par le point B coupe la droite (AC) en un point D .

① Montrer que le point A est le milieu du segment $[CD]$.

② En déduire une construction du point D à la règle seule.

* *
*

Fin