



Calcul vectoriel dans le plan – Série d'exercices 1

Classe. Tronc commun

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Relation de Chasles).

Soient A, B, C, D et M cinq points du plan. Simplifier les vecteurs suivants.

① $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.$

② $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}.$

③ $\vec{w} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}.$

○ Exercice 2 (Une égalité vectorielle).

Soient A, B, C et D quatre points du plan.

- Montrer que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

○ Exercice 3 (Parallélogramme).

Soit ABC un triangle. On considère le point D défini par

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

- ① Construire le point D .
- ② Montrer que $ABDC$ est un parallélogramme.
- ③ En déduire que les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.

○ Exercice 4 (Caractérisation du milieu).

Soient A et B deux points du plan et I le milieu du segment $[AB]$.



① Montrer que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

② En déduire que pour tout point M du plan, on a

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2 \overrightarrow{MI}$$

○ Exercice 5 (Colinéarité).

Soit ABC un triangle. On pose

$$\vec{u} = 2 \overrightarrow{AB} + 3 \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \vec{v} = -4 \overrightarrow{AB} - 6 \overrightarrow{AC}$$

- Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et préciser le coefficient de colinéarité.

○ Exercice 6 (Décomposition d'un vecteur).

Soit ABC un triangle. On note I le milieu de $[BC]$ et J le point défini par $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$.

- Écrire le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

○ Exercice 7 (Centre de gravité).

Soit ABC un triangle et G le point défini par

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

① Montrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3 \overrightarrow{MG}$.

② On note I le milieu de $[BC]$. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AI}$.

○ Exercice 8 (Théorème des milieux).

Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. On note I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.

① Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$ et que $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$.

② En déduire que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

○ Exercice 9 (Alignement de trois points).

Soit ABC un triangle. On considère les points E et F définis par

$$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$$

- Montrer que les points A , E et F sont alignés.

○ Exercice 10 (Droites parallèles).

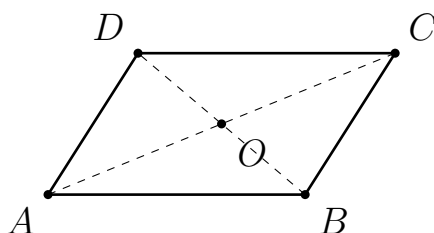
Soit ABC un triangle. On considère les points E et F définis par

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

- ① Montrer que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
- ② En déduire que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

○ Exercice 11 (Sur une figure).

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O .



- ① Citer tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$ parmi les vecteurs de la figure.
- ② Montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
- ③ Montrer que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

○ Exercice 12 (Un point défini par une relation).

Soit ABC un triangle et M le point défini par $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

- Écrire $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.



○ Exercice 13 (Une équation vectorielle).

Soit ABC un triangle.

- Déterminer et construire le point M du plan vérifiant

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Indication. Écrire tous les vecteurs à l'aide du point A .

○ Exercice 14 (Translation).

Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$ non nul. On note M' et N' les images respectives de deux points M et N du plan.

- ① Montrer que $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.
- ② En déduire que l'image d'un parallélogramme par t est un parallélogramme.

○ Exercice 15 (Caractérisation du parallélogramme).

Soit $ABCD$ un quadrilatère.

- Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.

Exercices supplémentaires

○ Exercice 16 (Un vecteur indépendant du point).

Soit ABC un triangle. Pour tout point M du plan, on pose

$$\vec{u} = 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$$

- ① Montrer que le vecteur $\vec{u}$ ne dépend pas du point M .
- ② Écrire $\vec{u}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

○ Exercice 17 (Les trois médianes).

Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. On note A' , B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

- En utilisant le calcul vectoriel, montrer que les trois droites (AA') , (BB') et



(CC') sont concourantes en G .

○ Exercice 18 (Une somme de quatre vecteurs).

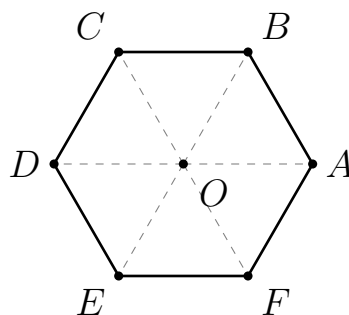
Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. On note I et J les milieux respectifs des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

- Montrer que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{IJ}$$

○ Exercice 19 (Un hexagone régulier).

Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O .



- ① Montrer que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.
- ② En déduire que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}$.
- ③ Montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AO}$.

○ Exercice 20.

Soit ABC un triangle. On considère les points P , Q et R définis par

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$$

- ① Montrer que les triangles ABC et PQR ont le même centre de gravité.
- ② Ce résultat reste-t-il vrai si le coefficient $\frac{1}{3}$ est remplacé par un réel k quelconque ?

* *
*

Fin