



Polynômes – Série d'exercices 1

Classe. Tronc commun

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (sur les identités remarquables).

Soient a, b et c trois nombres réels.

① Développer $(a + b + c)^2$.

② On suppose que $a + b + c = 0$. Montrer que

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$$

○ Exercice 2 (Factorisation).

Factoriser les expressions suivantes, où x et y désignent des nombres réels.

① $A(x, y) = x^2 - 6x + 9 - y^2$.

② $B(x) = x^3 - x$.

③ $C(x) = 4x^2 - 9 - (2x - 3)(x + 1)$.

④ $D(x) = x^4 - 16$.

○ Exercice 3 (Forme canonique).

On considère le polynôme

$$P(x) = 2x^2 - 8x + 11$$

① Écrire $P(x)$ sous la forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$.

② En déduire que $P(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis déterminer la plus petite valeur de P .



○ Exercice 4 (Racine d'un polynôme).

On pose

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

- ① Vérifier que 1 est une racine de P .
- ② Déterminer les réels a, b et c tels que $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.
- ③ En déduire toutes les racines de P , puis résoudre l'équation $P(x) = 0$.

○ Exercice 5 (Division euclidienne).

On pose

$$P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x - 5 \quad \text{et} \quad D(x) = x^2 - x + 1$$

- Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $D(x)$ et en déduire le quotient $Q(x)$ et le reste $R(x)$.

○ Exercice 6 (Degré d'un polynôme).

On considère le polynôme

$$P(x) = (2x^3 - x + 1)^4 - 16x^{12}$$

- Déterminer le degré de P ainsi que son coefficient dominant.

○ Exercice 7 (Équations produit).

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

- ① $(x^2 - 4)(x^2 + x - 6) = 0$.
- ② $(2x - 1)^2 = (x + 3)^2$.

○ Exercice 8 (Une équation bicarrée).

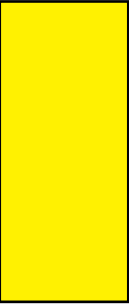
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

Indication. Poser $X = x^2$.

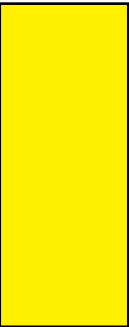


○ Exercice 9 (Signe et inéquations).

- 
- ① Étudier le signe du trinôme $T(x) = -x^2 + 4x - 3$ suivant les valeurs de x .
 - ② Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} \leq 0$$

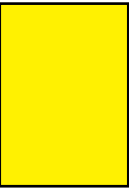
○ Exercice 10 (Somme et produit des racines).



On suppose que l'équation $x^2 - 5x + 3 = 0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 .

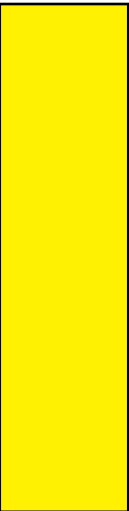
- ① Donner la valeur de $x_1 + x_2$ et celle de $x_1 x_2$ sans calculer x_1 et x_2 .
- ② Calculer $x_1^2 + x_2^2$ puis $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.
- ③ En déduire la valeur de $x_1^3 + x_2^3$.

○ Exercice 11 (Identification des coefficients).

- 
- Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

○ Exercice 12 (Une équation rationnelle).

- 
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E), \quad \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = 1$$

- Résoudre de même l'équation

$$(E'), \quad \frac{x}{x-2} = \frac{x+3}{x+1}$$

On précisera d'abord l'ensemble de définition de chacune des deux équations.



○ Exercice 13 (Une factorisation classique).

Soient a, b et c trois nombres réels.

① Montrer que

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

② En déduire que si $a + b + c = 0$, alors $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

○ Exercice 14 (Mise en équation).

① Un rectangle a un périmètre égal à 20 cm et une aire égale à 21 cm². Déterminer les dimensions de ce rectangle.

② Existe-t-il un rectangle de périmètre 20 cm et d'aire 30 cm² ? Justifier la réponse.

○ Exercice 15 (Divisibilité des polynômes).

On considère le polynôme

$$P(x) = x^4 + ax^2 + b$$

où a et b sont deux nombres réels.

- Déterminer a et b pour que $P(x)$ soit divisible par $x^2 - 3x + 2$.
- Pour ces valeurs de a et b , écrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes de degré 2, puis résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Exercices supplémentaires

○ Exercice 16 (Un polynôme strictement positif).

- Montrer que pour tout nombre réel x , on a

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 > 0$$

○ Exercice 17 (Deux factorisations astucieuses).

① Montrer que

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$



- ② En s'inspirant de la méthode précédente, factoriser $x^4 + 4$ en un produit de deux polynômes de degré 2.

○ Exercice 18 (Racines entières).

Soit P un polynôme dont tous les coefficients sont des entiers relatifs. On suppose que les deux entiers $P(0)$ et $P(1)$ sont impairs.

- Montrer que P n'admet aucune racine entière.

Indication. Examiner séparément le cas d'un entier pair et celui d'un entier impair.

○ Exercice 19 (Une équation à paramètre).

On considère l'équation (E_m) suivante, d'inconnue x et de paramètre réel m ,

$$(E_m), \quad (m-1)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$$

- Discuter, suivant les valeurs de m , le nombre de solutions de l'équation (E_m) .

○ Exercice 20.

Soit x un nombre réel non nul vérifiant

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

- ① Calculer, sans déterminer x , les deux nombres

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad x^3 + \frac{1}{x^3}$$

- ② En déduire la valeur du nombre

$$x^5 + \frac{1}{x^5}$$

* *
*

Fin