



Ordre dans $\mathbb{R}$ – Série d'exercices 1

Classe. Tronc commun

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Comparaison de deux nombres).

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs.

- Comparer les deux nombres réels

$$E = \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \quad \text{et} \quad F = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$$

○ Exercice 2 (Utilisation de la forme canonique 1).

On pose

$$A = a^2 + a + 1$$

où a un nombre réel.

- ① (a) Vérifier que

$$4A = (2a + 1)^2 + 3$$

(b) En déduire que $A \geq 3/4$.

- ② On suppose dans cette question que $a \in [-3, 1]$.

- Prouver que

$$\frac{3}{4} \leq A \leq 7$$

○ Exercice 3.

Les réels positifs a , b et c vérifient l'égalité

$$4a^2 - 3b^2 + 3c^2 = 0$$



- Déterminer $\max(a, b, c)$.

Remarque. Le réel $\max(a, b, c)$ désigne le plus grand réel parmi les trois réels a, b et c .

○ Exercice 4.

Soient x, y et z trois nombres réels vérifiant

$$x + y \leq 2z, \quad y + z \leq 2x \quad \text{et} \quad z + x \leq 2y$$

- Montrer que $x = y = z$.

○ Exercice 5 (Utilisation de la forme canonique 2).

Soit $t > 1$ un nombre réel.

- Montrer que

$$\frac{3}{2} < \frac{1 + 2t}{1 + t} < 2$$

○ Exercice 6 (Encadrement d'un rapport).

Soient x et y deux réels strictement positifs vérifiant $x < y$ et on note $t = x/y$.

- Montrer que pour tout couple de nombres réels strictement positifs (α, β) , on a

$$t < \frac{\alpha t + \beta}{\beta t + \alpha} < \frac{1}{t}$$

*

○ Exercice 7 (Une inégalité).

Soit $n \geq 2$ un entier naturel.

- Prouver que

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$



○ Exercice 8 (Une équation à trois inconnues).

- Déterminer tous les nombres réels x, y et z vérifiant l'équation

$$(E), \quad \sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{x+y+z}{2}$$

Indication. Utiliser un changement d'inconnue.

○ Exercice 9 (Un encadrement à précision donnée).

Soit α un nombre réel de l'intervalle $]12, 13[$.

- Montrer que

$$\left| \sqrt{\alpha} - \frac{\sqrt{12} + \sqrt{13}}{2} \right| < 0,1$$

○ Exercice 10 (Une inégalité).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul.

- Montrer que

$$\frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} > \frac{1}{n}$$

○ Exercice 11 (Une inégalité).

Soient a, b et c trois nombres réels de l'intervalle $]0, 1[$.

- Montrer que

$$a + b + c + \frac{1}{abc} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + abc$$

○ Exercice 12 (Optimisation de grandeurs géométriques).

- Parmi tous les rectangles qui ont le même aire, montrer que le carré est celui qui a le petit périmètre.
- Parmi tous les rectangles qui ont le même périmètre, quel est celui qui a le plus grand aire.



○ Exercice 13 (Encadrement d'une sommation).

Soit $n \geq 1$ un entier naturel.

- Montrer que

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}$$

○ Exercice 14 (sur la sous-additivité).

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs.

- Prouver que

$$\frac{x+y}{x+y+1} < \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1}$$

○ Exercice 15 (Utilisation de l'inégalité triangulaire).

Soient u et v deux nombres réels quelconques.

- Montrer que

$$|u| + |v| \leq |u+v| + |u-v|$$

Exercices supplémentaires

○ Exercice 16 (Une inégalité).

Soient a, b et c trois réels de l'intervalle $[2, +\infty[$ tels que $ab \leq c$.

- Montrer que

$$a + b \leq c$$

○ Exercice 17 (Une inégalité).

Soient $x, y, z, t \geq -1$ quatre nombres réels vérifiant la condition

$$x + y + z + t = 2$$

- Montrer que

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 \geq \frac{1}{2}$$

○ Exercice 18 (Une inégalité radicale).

Soient a, b et c trois nombres réels strictement positifs.

- Montrer que

$$\sqrt{\frac{2a}{b+c}} + \sqrt{\frac{2b}{c+a}} + \sqrt{\frac{2c}{a+b}} \leq 3$$

○ Exercice 19 (Une inégalité pas comme les autres).

Soient $t_1, t_2, \dots, t_{2026}$ des nombres réels appartenant à l'intervalle $[0, 2]$ tels que

$$t_1 + t_2 + \dots + t_{2026} = 5$$

- Prouver que

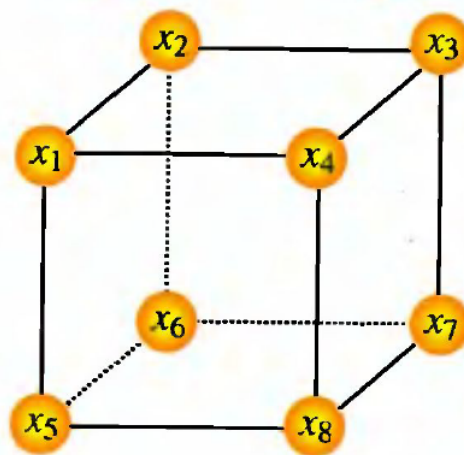
$$t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_{2026}^2 \leq 9$$

Quand l'égalité est-elle vérifiée ?

○ Exercice 20.

Huit nombres non-négatifs, dont la somme est égale à 1, sont placés aux sommets d'un cube. Pour toute arête, on multiplie les nombres placés aux extrémités.

- Démontrez que la somme de tous ces produits est inférieure à $1/4$.



* *

*

Fin