



Ensembles numériques $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ – Série d'exercices 1

Classe. Tronc commun

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Calcul numérique).

Soit $x \neq 0, \pm 1$ un nombre réel.

- Simplifier l'expression suivante,

$$A = \frac{\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}}$$

○ Exercice 2 (Sur les racines carrés).

Simplifier l'expression suivante,

$$A = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$

○ Exercice 3 (Une somme télescopique 1).

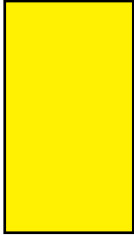
- ① Montrer que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

pour tout entier naturel non nul k .

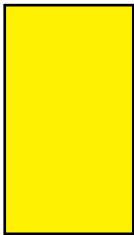
- ② En déduire que

$$S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{99 \times 100} = \frac{99}{100}$$

- 
- ③ En s'inspirant de la méthode précédente, trouver la valeur numérique de la somme suivante,

$$T = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{998 \times 999 \times 1000}$$

○ Exercice 4 (Une équation radicale).

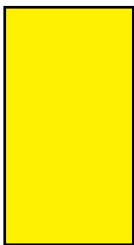


Déterminer tous les nombres réels $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sqrt{x+9} + \sqrt{x} = 18$$

Indication. Utiliser le conjugué de l'expression en question.

○ Exercice 5 (Utilisation du conjugué).

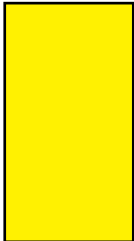


Soient $0 < a < b < c$ trois nombres réels vérifiant $2b = a + c$.

- Montrer que

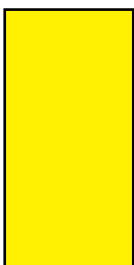
$$\frac{2}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

○ Exercice 6 (Raisonnement par absurde).

- 
- Montrer que le nombre rationnel $1/3$ n'appartient pas à l'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$.

Indication. Supposer que $1/3$ est un nombre décimal et aboutir à une contradiction.

○ Exercice 7.



Soient $a, b, c \neq 0$ trois nombres réels vérifiant $ab + bc + ca = 0$.

- Donner la valeur de l'expression suivante,

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$$



○ Exercice 8 (Une somme télescopique 2).

Donner une forme close de la sommation suivante,

$$R = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$$

○ Exercice 9 (Une équation à paramètre).

On considère l'équation (E_m) suivante,

$$(E_m), \quad (2m - 3)x + 1 - m = 0$$

- Discuter et résoudre suivant les valeurs du nombre réel m l'équation (E_m) .

○ Exercice 10.

Soient x et y deux nombres réels tels que $xy \in \mathbb{Q}$ et $x + y \in \mathbb{Q}$.

- Peut-on affirmer qu'on a $x, y \in \mathbb{Q}$?

○ Exercice 11.

Soient x, y et z trois nombres réels strictement positifs tels que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 2$$

- Calculer la valeur du nombre :

$$F = \frac{x + y + z}{xy + yz + zx}$$

○ Exercice 12.

Soient x et y deux nombres réels distincts tels que

$$x + 1 = (y - 1)^2 \quad \text{et} \quad y + 1 = (x - 1)^2.$$

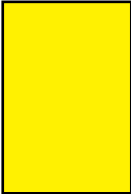
- Calculer la valeur du nombre

$$\left(\frac{x^2 + y^2}{3} \right)^{2018}$$



Exercices supplémentaires

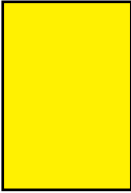
○ Exercice 13.



On dit qu'un sous-ensemble non vide A de $\mathbb{N}$ est complet si pour tout entiers naturels a et b tels que $a + b \in A$, alors le nombre ab appartient aussi à A .

- Trouver tous les ensembles complets de l'ensemble $\mathbb{N}$.

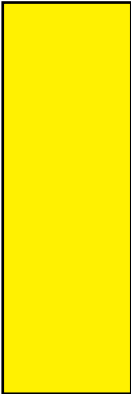
○ Exercice 14 (Un système à trois inconnues).



Trouver tous les nombres réels strictement positifs x , y et z tels que

$$\frac{1}{x} + y + z = \frac{1}{y} + x + z = \frac{1}{z} + x + y = 3$$

○ Exercice 15 (Un exercice de raisonnement).



On suppose que les nombres entiers relatifs sont colorés en rouge et bleu selon les deux règles suivantes :

- (1) le nombre 1 est de couleur rouge ;
 - (2) si deux nombres a et b (pas nécessairement distincts) sont de couleur rouge, alors les nombres $a + b$ et $a - b$ sont de couleurs différentes.
- Quelle est la couleur du nombre 2026 ?

* *

*

Fin