



Entiers naturels, Notions d'arithmétique – Série d'exercices 1

Classe. Tronc commun

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (sur la parité).

Soit n un entier naturel.

- Montrer que $n(n^2 + 5)$ est pair.

○ Exercice 2.

Soient a et b deux entiers naturels impairs.

- Montrer que $a^2 + b^2 - 2$ est divisible par 8.

○ Exercice 3 (sur l'écriture en base décimale).

Soient x et y deux éléments de $\{0, 1, \dots, 9\}$. On rappelle que l'entier $\overline{xy}$ désigne $10x + y$.

- ① On suppose dans cette question que $y < x$.
 - Montrer que le nombre $\overline{xy} - \overline{yx}$ est divisible par 9.
- ② Montrer que le nombre $\overline{xy} + \overline{yx}$ est divisible par 11.

○ Exercice 4.

- ① Développer $(10^6 - 1)^3$.
- ② En déduire le reste de la division euclidienne de 999999^6 par 5.



○ Exercice 5 (Divisibilité par 3).

Soient $a \geq b$ deux entiers naturels.

- Montrer que l'entier naturel $ab(a^2 - b^2)$ est divisible par 3.

○ Exercice 6.

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. On pose

$$N = 7^{n+3} \times 3^{n+1} - 49$$

Montrer que N est divisible par 98.

○ Exercice 7 (sur les nombres premiers).

① Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels le nombre $n^2 + 4n + 3$ est premier.

② Montrer que l'entier

$$A = 1000001$$

n n'est pas premier.

③ Montrer que l'entier $a^4 + 4$ n'est pas premier pour tout entier $a \geq 2$.

○ Exercice 8 (Primalité d'un entier).

① Montrer que si un entier $n \geq 2$ n'est pas premier, alors n possède un diviseur premier p vérifiant $p \leq \sqrt{n}$.

② L'entier 551 est-il premier ?

③ Même question avec l'entier 2017.

○ Exercice 9 (Une équation diophantienne 1).

Déterminer tous les couples d'entiers naturels (x, y) tels que

$$xy = 2x + 3y$$



○ Exercice 10 (Une équation diophantienne 2).

Déterminer tous les couples d'entiers naturels non nuls (x, y) tels que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$$

○ Exercice 11 (Sur l'algorithme d'Euclide).

- En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le pgcd des deux entiers 668 et 1518.

○ Exercice 12 (Nombres premiers entre eux).

- Montrer que les deux entiers naturels n et $2n + 1$ sont premiers entre eux pour tout $n \in \mathbb{N}$.

○ Exercice 13 (Décomposition en facteurs premiers).

- ① Décomposer en facteurs premiers les deux entiers 1449 et 735.
- ② En déduire $1449 \wedge 735$ et $1449 \vee 735$.

○ Exercice 14.

- Déterminer tous les entiers naturels n vérifiant

$$4^n + 3 \times 2^n = 88$$

○ Exercice 15.

- Déterminer tous les entiers naturels x et y tels que $x + y = 360$ et $x \wedge y = 18$.



Exercices supplémentaires

○ Exercice 16.

- Déterminer tous les entiers naturels $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\sqrt{1 + 5^n + 6^n + 11^n} \in \mathbb{N}$$

○ Exercice 17 (Nombres de Fermat).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit F_n par

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

- Montrer que F_n divise $F_{n+1} - 2$ puis déduire le pgcd de F_n et F_{n+1} .

○ Exercice 18 (Examiner la parité).

Une feuille de papier est déchirée en trois parties. Ensuite, l'une de ces parties est déchirée de nouveau en 3 parties, et ainsi de suite.

- Peut-on obtenir, en fin de compte, un total de 100 parties ?

○ Exercice 19.

Il y a 1998 nombres et chaque nombre est égal à 1 ou à -1 .

- Démontrez que si leur produit est égal à 1, alors leur somme ne peut pas être égale à zéro.

○ Exercice 20.

- Trouver tous les couples d'entiers relatifs (x, y) tels que

$$x^2(y - 1) + y^2(x - 1) = 1$$

* *

*

Fin