



Modèle 2 du Devoir surveillé 8 – Tronc commun scientifique

Chapitres. Parabole et hyperbole; Géométrie dans l'espace

Durée. 2 heures 30 minutes

Réalisé par le professeur Saad Choukri

Note. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Une attention particulière sera portée à la présentation, à la lisibilité et à la rigueur de la rédaction. Les réponses non argumentées seront ignorées.

○ Exercice 1 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

et on note $(\mathcal{P})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1pts

① Écrire $f(x)$ sous sa forme canonique, puis déterminer les coordonnées du sommet S de $(\mathcal{P})$ et une équation de son axe de symétrie.

1pts

② Dresser le tableau de variations de f et préciser la nature de son extremum.

1pts

③ Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{P})$ avec les axes du repère.

1pts

④ Tracer la courbe $(\mathcal{P})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1pts

⑤ Résoudre graphiquement, puis algébriquement, l'inéquation $f(x) > 0$.

○ Exercice 2 (4 points)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par

$$g(x) = \frac{3x - 1}{x - 2}$$

et on note $(\mathcal{H})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1pts

① Montrer que pour tout $x \neq 2$, on a

$$g(x) = 3 + \frac{5}{x - 2}$$



1pts

- ② En déduire que $(\mathcal{H})$ est une hyperbole dont on précisera les deux asymptotes et le centre de symétrie Ω .

1.5pts

- ③ Étudier les variations de g sur $] -\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$, puis dresser son tableau de variations.

0.5pts

- ④ Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{H})$ avec les axes du repère.

○ Exercice 3 (3 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation $y = x^2 + x$ et la droite (D_m) d'équation $y = mx + 1$, où m est un nombre réel.

1pts

- ① Montrer que les abscisses des points d'intersection de $(\mathcal{P})$ et de (D_m) sont les solutions de l'équation

$$x^2 + (1 - m)x - 1 = 0$$

2pts

②

- a) Calculer le discriminant de cette équation et montrer qu'il est strictement positif pour tout réel m .
- b) Que peut-on en déduire quant au nombre de points d'intersection de $(\mathcal{P})$ et de (D_m) ?

○ Exercice 4 (4.5 points)

Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit, où $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées telles que $\vec{AE} = \vec{BF} = \vec{CG} = \vec{DH}$. On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AD]$.

1pts

- ① Faire une figure en perspective cavalière que l'on complétera au fur et à mesure.

1.5pts

②

- a) Donner la position relative des droites (AB) et (EH) .
- b) Donner la position relative des droites (AF) et (DG) .
- c) Donner la position relative de la droite (EF) et du plan (ABC) .

1pts

- ③ Montrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (EFG) .



1pts

- ④ Déterminer l'intersection des plans (ABE) et (ADH) , puis l'intersection du plan (EFG) et de la droite (BF) .

○ Exercice 5 (3.5 points)

1.5pts

Soit $SABC$ une pyramide de sommet S dont la base ABC est un triangle. Soient I le milieu de $[SA]$ et J le milieu de $[SB]$.

①

- a) Montrer que la droite (IJ) est parallèle à la droite (AB) .
b) En déduire que la droite (IJ) est parallèle au plan (ABC) .

2pts

- ② Soit (Q) le plan passant par I et parallèle au plan (ABC) .

- a) Déterminer l'intersection du plan (Q) et du plan (SBC) .
b) En déduire la nature de la section de la pyramide par le plan (Q) , puis comparer ses côtés à ceux du triangle ABC .

○ Bonus (3 points)

Soit $ABCD$ un tétraèdre, I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$. Soit G le point défini par

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$$

- (1) Montrer que $\vec{GA} + \vec{GB} = 2\vec{GI}$ et $\vec{GC} + \vec{GD} = 2\vec{GJ}$.
(2) En déduire que G est le milieu du segment $[IJ]$.
(3) Montrer que G appartient également au segment joignant les milieux de $[AC]$ et $[BD]$.

* * *

Fin