



Modèle 1 du Devoir surveillé 8 – Tronc commun scientifique

Chapitres. Parabole et hyperbole; Géométrie dans l'espace

Durée. 3 heures

Réalisé par le professeur Saad Choukri

Note. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Une attention particulière sera portée à la présentation, à la lisibilité et à la rigueur de la rédaction. Les réponses non argumentées seront ignorées.

○ Exercice 1 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

et on note $(\mathcal{P})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1pts

① Écrire $f(x)$ sous sa forme canonique, puis déterminer les coordonnées du sommet S de $(\mathcal{P})$ et une équation de son axe de symétrie.

1pts

② Dresser le tableau de variations de f et préciser la nature de son extremum.

1pts

③ Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{P})$ avec les axes du repère.

1pts

④ Tracer la courbe $(\mathcal{P})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1pts

⑤ Résoudre graphiquement, puis algébriquement, l'inéquation $f(x) \leq 3$.

○ Exercice 2 (4 points)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$g(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

et on note $(\mathcal{H})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1pts

① Montrer que pour tout $x \neq 1$, on a

$$g(x) = 2 + \frac{3}{x - 1}$$



1pts

- ② En déduire que $(\mathcal{H})$ est une hyperbole dont on précisera les deux asymptotes et le centre de symétrie Ω .

1.5pts

- ③ Étudier les variations de g sur $] -\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, puis dresser son tableau de variations.

0.5pts

- ④ Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{H})$ avec les axes du repère.

○ Exercice 3 (3 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation $y = x^2 - 2x$ et la droite (D) d'équation $y = x - 2 + m$, où m est un nombre réel.

1pts

- ① Montrer que les abscisses des points d'intersection de $(\mathcal{P})$ et de (D) sont les solutions de l'équation

$$x^2 - 3x + 2 - m = 0$$

2pts

- ② Discuter, suivant les valeurs de m , le nombre de points d'intersection de $(\mathcal{P})$ et de (D) .

○ Exercice 4 (4.5 points)

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête a , où $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées telles que $\vec{AE} = \vec{BF} = \vec{CG} = \vec{DH}$. On note I le milieu de $[EF]$ et J le milieu de $[FG]$.

1pts

- ① Faire une figure en perspective cavalière que l'on complètera au fur et à mesure.

1.5pts

②

a) Les droites (AB) et (HG) sont-elles coplanaires ? Justifier et préciser leur position relative.

b) Les droites (AE) et (CG) sont-elles sécantes, parallèles ou non coplanaires ?

c) Donner la position relative de la droite (AB) et du plan (EFG) .

1pts

- ③ Montrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (ABC) .

Indication. Utiliser le théorème des milieux dans le triangle EFG

1pts

- ④ Déterminer l'intersection des plans (ABF) et (EFG) , puis l'intersection du plan (ABG) et de la droite (CG) .



○ Exercice 5 (3.5 points)

1.5pts

Soit $SABC$ une pyramide de sommet S dont la base ABC est un triangle. On note I , J et K les milieux respectifs des segments $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$.

①

- a) Montrer que (IJ) est parallèle à (AB) et que (JK) est parallèle à (BC) .
- b) En déduire que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

2pts

② Soit M un point du segment $[SA]$ distinct de S et de A , et soit (Q) le plan passant par M et parallèle au plan (ABC) .

- a) Déterminer l'intersection du plan (Q) et du plan (SAB) .
- b) En déduire la nature de la section de la pyramide par le plan (Q) .

○ Bonus (4 points)

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$, K le milieu de $[AC]$ et L le milieu de $[BD]$.

(1) Montrer que $IKJL$ est un parallélogramme.

Indication. Montrer que $\vec{IK} = \vec{LJ} = \frac{1}{2}\vec{BC}$

(2) En déduire que les segments $[IJ]$ et $[KL]$ ont le même milieu.

(3) Montrer que ce point est aussi le milieu du segment joignant les milieux de $[AD]$ et $[BC]$.

* * *

Fin