



Modèle 2 du Devoir surveillé 7 – Tronc commun scientifique

Chapitres. Produit scalaire dans le plan; Généralités sur les fonctions

Durée. 2 heures 30 minutes

Réalisé par le professeur Saad Choukri

Note. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Une attention particulière sera portée à la présentation, à la lisibilité et à la rigueur de la rédaction. Les réponses non argumentées seront ignorées.

○ Exercice 1 (4.5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points

$$A(-1, 1), \quad B(3, 2), \quad C(0, -3)$$

1.5pts

①

a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, puis calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

b) Calculer les distances AB , AC et BC .

1pts

②

En déduire une valeur approchée à 1° près de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

1pts

③

Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme, puis calculer $\vec{AD} \cdot \vec{BC}$.

1pts

④

Déterminer l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$, puis reconnaître cet ensemble.

○ Exercice 2 (4 points)

Soit ABC un triangle tel que

$$AB = 4, \quad AC = 6, \quad \widehat{BAC} = 120^\circ$$

1pts

①

Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

1.5pts

②

En utilisant la relation d'Al-Kashi, calculer la longueur BC .

1pts

③

Calculer l'aire du triangle ABC .



0.5pts

- ④ Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) . Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AH}$.

○ Exercice 3 (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'ensemble (Γ) des points $M(x, y)$ vérifiant

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$$

1.5pts

- ① Montrer que (Γ) est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon R .

1pts

- ② Le point $A(2, 3)$ appartient-il à (Γ) ? Justifier.

1.5pts

- ③ On considère la droite (D) d'équation $3x - 4y + 2 = 0$.

a) Calculer la distance du point Ω à la droite (D) .

b) En déduire la position relative de la droite (D) et du cercle (Γ) .

○ Exercice 4 (4.5 points)

On considère les fonctions numériques f , g et h définies par

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}, \quad g(x) = \sqrt{2x-6}, \quad h(x) = \frac{x^2+1}{|x|+1}$$

1.5pts

- ① Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f , g et h .

1.5pts

- ②

a) Étudier la parité de la fonction h .

b) La fonction f est-elle paire ? Impaire ? Justifier.

1.5pts

- ③ On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -x^2 + 6x - 5$.

a) Calculer $u(0)$, $u(3)$ et $u(-2)$.

b) Déterminer les antécédents de 0 par la fonction u .

c) Résoudre l'équation $u(x) = 4$.



○ Exercice 5 (3 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x} + 1$$

1.5pts

- ① Soient a et b deux nombres réels strictement positifs et distincts. Montrer que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = -\frac{1}{ab}$$

1.5pts

②

- a) En déduire les variations de f sur $]0, +\infty[$.
b) Dresser le tableau de variations de f puis comparer $f(\sqrt{2})$ et $f(\sqrt{3})$ sans les calculer.

○ Bonus (3 points)

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

- (1) Montrer que

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$$

Indication. Écrire $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ et $\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}$

- (2) En déduire que dans un rectangle, les deux diagonales ont la même longueur.
(3) Application. Dans un parallélogramme tel que $AB = 6$, $AD = 4$ et $AC = 8$, calculer la longueur BD .

* * *

Fin