



Modèle 1 du Devoir surveillé 7 – Tronc commun scientifique

Chapitres. Produit scalaire dans le plan; Généralités sur les fonctions

Durée. 3 heures

Réalisé par le professeur Saad Choukri

Note. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Une attention particulière sera portée à la présentation, à la lisibilité et à la rigueur de la rédaction. Les réponses non argumentées seront ignorées.

○ Exercice 1 (4.5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points

$$A(1, 2), \quad B(4, 3), \quad C(2, -1)$$

1.5pts

①

a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, puis calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

b) Calculer les distances AB et AC .

1pts

② En déduire une valeur approchée à 1° près de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

1pts

③ Calculer $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ puis en déduire la nature du triangle ABC .

1pts

④ Déterminer l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = 0$, puis reconnaître cet ensemble.

○ Exercice 2 (4 points)

Soit ABC un triangle tel que

$$AB = 5, \quad AC = 8, \quad \widehat{BAC} = 60^\circ$$

1pts

① Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

1.5pts

② En utilisant la relation d'Al-Kashi, calculer la longueur BC .

1pts

③ Calculer l'aire du triangle ABC .



0.5pts

- ④ Soit I le milieu de $[BC]$. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AI}$ en fonction des données précédentes.

○ Exercice 3 (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'ensemble (Γ) des points $M(x, y)$ vérifiant

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$$

1.5pts

- ① Montrer que (Γ) est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon R .

1pts

- ② Le point $A(5, -1)$ appartient-il à (Γ) ? Justifier.

1.5pts

- ③ On considère la droite (D) d'équation $x + y - 1 = 0$.

a) Calculer la distance du point Ω à la droite (D) .

b) En déduire la position relative de la droite (D) et du cercle (Γ) .

○ Exercice 4 (4.5 points)

On considère les fonctions numériques f , g et h définies par

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 9}, \quad g(x) = \sqrt{x + 3} - \frac{1}{x}, \quad h(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$$

1.5pts

- ① Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f , g et h .

1.5pts

- ②

a) Étudier la parité de la fonction h .

b) La fonction g est-elle paire ? Impaire ? Justifier.

1.5pts

- ③ On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 - 4x + 1$.

a) Calculer $u(0)$, $u(2)$ et $u(-1)$.

b) Déterminer les antécédents de 1 par la fonction u .

c) Résoudre l'équation $u(x) = -2$.



○ Exercice 5 (3 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 4x + 1$$

1.5pts

- ① Soient a et b deux nombres réels distincts. Montrer que le taux de variation de f entre a et b est

$$T = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = a + b - 4$$

1.5pts

②

a) En déduire que f est strictement décroissante sur $] - \infty, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

b) Dresser le tableau de variations de f et préciser son extremum.

○ Bonus (4 points)

Soit ABC un triangle et soit I le milieu du segment $[BC]$.

(1) Montrer que

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AI^2 - \frac{BC^2}{4}$$

Indication. Écrire $\vec{AB} = \vec{AI} + \vec{IB}$ et $\vec{AC} = \vec{AI} + \vec{IC}$

(2) En déduire la relation de la médiane

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

(3) Application. Dans un triangle tel que $AB = 7$, $AC = 5$ et $BC = 8$, calculer la longueur de la médiane $[AI]$.

* * *

Fin