



Modèle 2 du Devoir surveillé 2 – Tronc commun scientifique

Chapitres. Ordre dans $\mathbb{R}$; Polynômes

Durée. 2 heures 30 minutes

Réalisé par le professeur Saad Choukri

Note. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Une attention particulière sera portée à la présentation, à la lisibilité et à la rigueur de la rédaction. Les réponses non argumentées seront ignorées.

○ Exercice 1 (4.5 points)

1.5pts

① Soient a et b deux nombres réels.

a) Montrer que

$$a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2]$$

b) En déduire que $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$.

c) Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles il y a égalité.

1.5pts

② Soient a , b et c trois nombres réels.

a) Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

b) En déduire que

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$$

1.5pts

③ Soient a et b deux nombres réels positifs.

a) Comparer $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ et $a + b$.

b) En déduire que $\sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

c) Dans quel cas a-t-on l'égalité ?



○ Exercice 2 (4 points)

2pts

① Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

a) $|3x + 1| < 4$

b) $|x - 1| \geq 2x$

c) $|x - 1| + |x - 3| = 4$

Indication. Interpréter cette égalité à l'aide des distances sur la droite réelle

1pts

② Soit x un nombre réel tel que $1 < x < 2$.

a) Encadrer le nombre $\frac{3x - 1}{x + 1}$.

b) Montrer que $|x^2 - x| < 2$.

1pts

③ Soit x un nombre réel tel que $|x + 2| \leq \frac{1}{3}$.

a) Donner un encadrement de x puis en déduire un encadrement de $3x - 1$.

b) Montrer que $|3x + 5| \leq 1$.

○ Exercice 3 (5 points)

On considère le polynôme P défini pour tout nombre réel x par

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$$

1pts

① Donner le degré et le coefficient dominant de P , puis vérifier que 3 est une racine de P .

1.5pts

②

a) Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 3$.

b) En déduire que $P(x) = (x - 3)(2x + 1)(x + 1)$ pour tout réel x .

1.5pts

③

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

b) Dresser le tableau de signes de $P(x)$ puis résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$.

1pts

④ En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation

$$2t^6 - 3t^4 - 8t^2 - 3 = 0$$

Indication. Poser $x = t^2$



○ Exercice 4 (4 points)

2pts

- ① On cherche deux nombres réels a et b tels que, pour tout réel x ,

$$x^4 + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$$

- a) Développer le membre de droite et ordonner le résultat suivant les puissances décroissantes de x .
- b) En déduire que $a + b = 0$ et $ab = -2$, puis déterminer a et b .
- c) Écrire chacun des deux facteurs obtenus sous sa forme canonique et montrer qu'il est strictement positif pour tout réel x .

2pts

- ② Soit Q le polynôme défini par $Q(x) = x^3 - 7x + 6$.

- a) Vérifier que 1 est une racine de Q , puis factoriser $Q(x)$ par $x - 1$.
- b) Factoriser complètement $Q(x)$ puis résoudre l'équation $Q(x) = 0$.
- c) Résoudre l'inéquation $Q(x) \leq 0$.

○ Exercice 5 (2.5 points)

1.25pts

① $\frac{x-1}{x+2} \leq 2$

1.25pts

② $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1} \geq 0$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes, et écrire l'ensemble des solutions sous forme d'une réunion d'intervalles.

○ Bonus (3 points)

On cherche tous les polynômes P du second degré vérifiant

$$P(x+1) - P(x) = x \quad \text{pour tout réel } x$$

- (1) On pose $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Calculer $P(x+1) - P(x)$ en fonction de x , α et β .
- (2) En déduire toutes les solutions du problème.
- (3) En prenant $P(x) = \frac{x^2 - x}{2}$, calculer $P(2) - P(1)$, $P(3) - P(2)$, ..., $P(n+1) - P(n)$ puis en déduire la valeur de la somme

$$1 + 2 + 3 + \dots + n$$



pour tout entier naturel $n \geq 1$.

* * *

Fin