



Modèle 1 du Devoir surveillé 2 – Tronc commun scientifique

Chapitres. Ordre dans $\mathbb{R}$; Polynômes

Durée. 3 heures

Réalisé par le professeur Saad Choukri

Note. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Une attention particulière sera portée à la présentation, à la lisibilité et à la rigueur de la rédaction. Les réponses non argumentées seront ignorées.

○ Exercice 1 (4 points)

L'objectif de cet exercice est de comparer les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique de deux nombres réels strictement positifs.

1pts

①

a) Montrer que pour tous nombres réels x et y , on a

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

b) En déduire que pour tous réels x et y , on a $(x + y)^2 \geq 4xy$.

c) Montrer que pour tous réels strictement positifs x et y , on a

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

d) Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

1.5pts

② Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. On pose

$$A = \frac{a+b}{2}, \quad G = \sqrt{ab}, \quad H = \frac{2ab}{a+b}$$

a) Montrer que $G \leq A$.

Indication. Penser à la question 1. a) appliquée à $x = \sqrt{a}$ et $y = \sqrt{b}$

b) Montrer que $H \leq G$.

c) En déduire un encadrement de G à l'aide de A et H , puis calculer A , G et H pour $a = 2$ et $b = 8$.

1.5pts

③ (Applications). Soient a, b et c trois nombres réels strictement positifs.

a) Montrer que

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

b) Montrer que

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$$

c) Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

○ Exercice 2 (4 points)

1.5pts

① Soient x et y deux nombres réels tels que

$$2 \leq x \leq 4 \quad \text{et} \quad -1 \leq y \leq 3$$

a) Encadrer le nombre $3x - 2y$.

b) Encadrer le nombre xy .

c) Encadrer le nombre $\frac{2x + 1}{y + 2}$.

1pts

② Soit x un nombre réel tel que $|x - 3| \leq \frac{1}{2}$.

a) Montrer que $\frac{11}{2} \leq x + 3 \leq \frac{13}{2}$.

b) En déduire que $|x^2 - 9| \leq \frac{13}{4}$.

1.5pts

③ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes, et écrire l'ensemble des solutions sous forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles lorsque c'est possible.

a) $|2x - 1| = |x + 3|$

b) $|x - 2| + |x + 1| \leq 5$

Indication. Interpréter cette inégalité à l'aide des distances sur la droite réelle

c) $|2x + 1| \geq x + 3$



○ Exercice 3 (5 points)

On considère le polynôme P défini pour tout nombre réel x par

$$P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$$

1pts

- ① Donner le degré, le coefficient dominant et le terme constant de P , puis vérifier que 1 et -1 sont deux racines de P .

1.5pts

②

a) Justifier que le polynôme $x^2 - 1$ divise $P(x)$.

b) Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x^2 - 1$.

1pts

- ③ En déduire une factorisation de $P(x)$ en un produit de quatre polynômes du premier degré.

1.5pts

④

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

b) Dresser le tableau de signes de $P(x)$ puis résoudre l'inéquation $P(x) \leq 0$.

c) Résoudre l'inéquation $\frac{P(x)}{x^2 - 1} \geq 0$.

○ Exercice 4 (4 points)

Soient a et b deux nombres réels et soit P le polynôme défini par

$$P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 6$$

1.5pts

①

a) Sachant que 1 est une racine de P , montrer que $a + b = 4$.

b) Sachant de plus que le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x + 2$ est égal à -24 , montrer que $2a - b = -1$.

c) En déduire les valeurs de a et b .

1pts

- ② On prend dans la suite $P(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 6$.

a) Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 1$.

b) En déduire que $P(x) = (x - 1)(2x^2 + 3x + 6)$.

1.5pts

③



- a) Écrire le trinôme $2x^2 + 3x + 6$ sous sa forme canonique, puis montrer qu'il est strictement positif pour tout réel x .
- b) En déduire le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x , puis résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$.
- c) Résoudre l'inéquation $\frac{P(x)}{x^2 - 4} \leq 0$.

○ Exercice 5 (3 points)

2pts

- ① Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $\frac{2x - 1}{x + 3} \geq 1$

b) $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 9} \leq 0$

1pts

- ② Soit x un nombre réel strictement supérieur à 1.

a) Comparer x^2 et x , puis x^3 et x^2 .

b) En déduire que $x^3 + 1 > x^2 + x$.

○ Bonus (4 points)

Soient a, b et c trois nombres réels.

- (1) Montrer que

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

- (2) En déduire que si $a + b + c = 0$, alors $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

- (3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(x - 1)^3 + (x - 2)^3 + (3 - 2x)^3 = 0$$

* * *

Fin