



Modèle 2 du Devoir surveillé 1 – Tronc commun scientifique

Chapitres. Notions d'arithmétique; Ensembles numériques

Durée. 2 heures 30 minutes

Réalisé par le professeur Saad Choukri

Note. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Une attention particulière sera portée à la présentation, à la lisibilité et à la rigueur de la rédaction. Les réponses non argumentées seront ignorées.

○ Exercice 1 (4.5 points)

L'objectif de cet exercice est de montrer que les nombres $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sont irrationnels.

- On rappelle qu'un nombre réel est dit irrationnel s'il appartient à $\mathbb{R}$ mais n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.

1.5pts

①

a) Soit n un entier naturel quelconque.

- Montrer que n prend une des formes suivantes, $2K$ ou $2K + 1$ où K est un entier naturel.

b) Montrer que si n est pair, alors n^2 est pair.

c) Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.

Indication. Utiliser un raisonnement par absurde

1.5pts

②

On suppose par absurde que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, on peut alors écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où p et $q \neq 0$ sont deux entiers naturels tels que $p \wedge q = 1$.

a) Montrer que $p^2 = 2q^2$ puis déduire que p est pair.

b) On pose $p = 2k$ avec k un entier naturel. Montrer que q est pair.

c) Conclure que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

0.5pts

③

En déduire que les nombres $\sqrt{2} - 5$ et $\sqrt{8}$ sont irrationnels.

1pts

④

On admet que $\sqrt{3}$ est lui aussi irrationnel et on pose $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

a) Vérifier que $\frac{1}{x} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

b) Montrer que $\sqrt{2} = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right)$.

c) En déduire que x est irrationnel.

Indication. Penser à utiliser un raisonnement par absurde

○ Exercice 2 (4 points)

L'objectif de cet exercice est de trouver tous les couples d'entiers naturels (x, y) qui sont solutions de l'équation.

$$(E), \quad x^2 - y^2 = 45$$

Et soit S l'ensemble de solutions de cette équation.

0.5pts

- ① Montrer que si u et v sont deux entiers naturels quelconques, alors $u - v$ et $u + v$ ont même parité.

Indication. Remarquer que $(u + v) - (u - v) = 2v$

2.5pts

- ② Soit (x, y) une solution de l'équation ci-dessus (E) .

a) Montrer que x est supérieur strictement à y et que $x \geq 7$.

b) Montrer que $x - y$ et $x + y$ sont tous les deux impairs.

c) On pose $x - y = a$ et $x + y = b$ avec a et b deux entiers naturels.

i. Montrer que

$$x = \frac{a + b}{2}, \quad y = \frac{b - a}{2}$$

ii. Prouver que a est inférieur ou égal à b .

iii. Montrer que $ab = 45$ puis déduire que $(a, b) = (1, 45)$ ou $(a, b) = (3, 15)$ ou $(a, b) = (5, 9)$.

d) D'après le résultat de la question c), que peut-on dire du couple (x, y) ?

1pts

- ③ Conclure à propos de l'ensemble S des solutions de l'équation (E) .

○ Exercice 3 (5 points)

0.5pts

- ① Rappeler la définition de deux entiers naturels premiers entre eux.

1.5pts

- ② Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On pose $d = a \wedge b$ et $d' = a \wedge (a + b)$.
L'objectif de cette partie est de montrer que $d = d'$.



1.5pts

- a) Montrer que d divise $a + b$ puis déduire que d divise d' .
b) Montrer que d' divise b puis déduire que d' divise d .
c) Comparer d et d' .

1.5pts

③ Soit $n \geq 1$ un entier naturel quelconque.

- a) Montrer que n et $n + 1$ sont premiers entre eux.
b) Montrer que $2n + 1$ et $3n + 2$ sont premiers entre eux.
Indication. Remarquer que $3(2n + 1) - 2(3n + 2) = -1$
c) Montrer que $n + 1$ et $n^2 + n + 1$ sont premiers entre eux.

④ Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a \wedge b = 1$.

- L'objectif de cette question est de montrer que

$$a \wedge b = 1 \implies ab \wedge (a + b) = 1$$

- a) Montrer que $a \wedge (a + b) = 1$ et que $b \wedge (a + b) = 1$.
b) Soit p un diviseur premier de $ab \wedge (a + b)$. Montrer que p divise a ou p divise b .
c) Conclure.

○ Exercice 4 (3.5 points)

1.5pts

①

- a) Vérifier que pour tout entier naturel $p \geq 1$, on a

$$\frac{1}{(2p-1)(2p+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p+1} \right)$$

- b) En déduire la valeur exacte de la somme

$$\sum_{p=1}^{500} \frac{1}{(2p-1)(2p+1)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{999 \times 1001}$$

2pts

②

- a) Montrer que pour tout entier naturel $p \geq 1$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{p}} > 2(\sqrt{p+1} - \sqrt{p})$$

Indication. Remarquer que $\sqrt{p+1} - \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{p+1} + \sqrt{p}}$

b) En déduire que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

pour tout entier naturel $n \geq 1$.

c) Montrer que la somme $\sum_{k=1}^{10^6} \frac{1}{\sqrt{k}}$ est supérieure à 1998.

○ Exercice 5 (3 points)

1pts

① On rappelle qu'un nombre réel x est dit décimal s'il s'écrit sous la forme $x = \frac{a}{10^n}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $\frac{7}{40}$ est un nombre décimal.

b) Montrer que $\frac{2}{7}$ n'est pas un nombre décimal.

Indication. Utiliser un raisonnement par absurde et penser au lemme de Gauss.

1pts

② Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux inéquations suivantes et écrire l'ensemble des solutions de chacune sous forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.

a) $|2x - 3| \leq 5$

b) $|x + 1| > 3$

1pts

③ Soient x et y deux nombres réels tels que $1 \leq x \leq 3$ et $-2 \leq y \leq 0$.

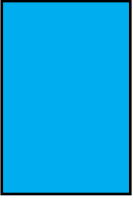
a) Encadrer le nombre $2x - 3y$.

b) Encadrer le nombre $\frac{x}{4 - y}$.

○ Bonus (3 points)

On dit qu'un couple $(p, p + 2)$ de nombres premiers est un couple jumeau. Par exemple $(3, 5)$ et $(11, 13)$ sont des couples jumeaux.

(1) Donner trois couples jumeaux autres que ceux cités ci-dessus.



(2) Montrer que si $(p, p + 2)$ est un couple jumeau avec $p \geq 5$, alors 6 divise $p + 1$.

(3) Trouver tous les nombres premiers p tels que $p, p + 2$ et $p + 4$ soient tous les trois premiers.

* * *

Fin