



Modèle 1 du Devoir surveillé 1 – Tronc commun

Chapitres. Notions d'arithmétique; Ensembles numériques

Durée. 3 heures

Réalisé par le professeur Saad Choukri

Note. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. Une attention particulière sera portée à la présentation, à la lisibilité et à la rigueur de la rédaction. Les réponses non argumentées seront ignorées.

○ Exercice 1 (3.5 points)

L'objectif de cet exercice est de montrer que pour un couple d'entiers naturels a et b , si 3 divise $a^2 + b^2$, alors 3 divise a et 3 divise b .

- Soient alors a et b deux entiers naturels tels que 3 divise $a^2 + b^2$.

①

a) Montrer que si 3 divise x , alors 3 divise x^2 .

- L'objectif des questions suivantes est de montrer la réciproque.

b) Soit x un entier naturel quelconque.

- Montrer que x prend une des formes suivantes, $3K$, $3K + 1$ ou $3K + 2$ où K est un entier naturel.

c) Montrer que si 3 divise x^2 , alors 3 divise x .

Indication. Utiliser un raisonnement par absurde

② Sous l'hypothèse que 3 divise $a^2 + b^2$, supposons que 3 divise un nombre parmi a et b .

- Montrer que 3 divise l'autre.

③ Montrer que si 3 divise $a^2 + b^2$, alors 3 divise a ou 3 divise b .

Indication. Penser à utiliser un raisonnement par absurde

④ Conclure.



○ Exercice 2 (2.5 points)

L'objectif de cet exercice est de trouver tous les couples d'entiers naturels (x, y) qui sont solutions de l'équation.

$$(E), \quad x^2 - y^2 = 72$$

Et soit S l'ensemble de solutions de cette équation.

0.5pts

- ① Montrer que si u et v sont deux entiers naturels quelconques, alors $u - v$ et $u + v$ ont même parité.

Indication. Remarquer que $(u + v) + (u - v) = 2u$

2pts

- ② Soit (x, y) une solution de l'équation ci-dessus (E) .

a) Montrer que x est supérieur strictement à y et que $y \geq 1$.

b) Montrer que $x - y$ et $x + y$ sont tous les deux pairs.

c) On pose $x - y = 2a$ et $x + y = 2b$ avec a et b deux entiers naturels.

i. Montrer que

$$x = b + a, \quad y = b - a$$

ii. Prouver que a est strictement inférieur à b .

iii. Montrer que $ab = 18$ puis déduire que $(a, b) = (1, 18)$ ou $(a, b) = (2, 9)$ ou $(a, b) = (3, 6)$.

d) D'après le résultat de la question c), que peut-on dire du couple (x, y) ?

e) Conclure à propos de l'ensemble S des solutions de l'équation (E) .

○ Exercice 3 (4.5 points)

0.5pts

- ① Rappeler la définition du pgcd de deux entiers naturels x et y .

1.5pts

- ② Soient a et $b \neq 0$ deux entiers naturels tels qu'il existe u et v deux entiers naturels vérifiant

$$a = ub + v$$

On pose $d = a \wedge b$ et $d' = b \wedge v$.

L'objectif de cette partie est de montrer que $d = d'$.

a) Montrer que d divise v puis déduire que d divise d' .

b) Montrer que d' divise a puis déduire que d' divise d .

c) Comparer d et d' .

1.5pts

- ③ Soit $n \geq 1$ un entier naturel quelconque.



1pts

- a) Montrer que n et $n + 1$ sont premiers entre eux.
- b) Montrer que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.
- c) Montrer que n et $\alpha n + 1$ sont premiers entre eux pour tout entier naturel α .
- d) Montrer que n et $n^2 + n + 1$ sont premiers entre eux.

④ Soient a et b deux entiers naturels.

- L'objectif de cette question est de montrer que a^{2020} et b^{2021} sont premiers entre eux si et seulement si a et b sont premiers entre eux. Autrement dit,

$$a \wedge b = 1 \quad \text{si et seulement si} \quad a^{2020} \wedge b^{2021} = 1$$

a) Montrer que si $a^{2020} \wedge b^{2021} = 1$, alors $a \wedge b = 1$.

b) Montrer que la réciproque est aussi vraie.

○ Exercice 4 (4 points)

1pts

①

a) Vérifier que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

b) En déduire la valeur exacte de la somme

$$\sum_{p=1}^{999} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{999 \times 1000}$$

2pts

②

a) Montrer que pour tout entier naturel $p \geq 2$, on a

$$\frac{1}{p^2} < \frac{1}{p^2 - p}$$

b) Vérifier que

$$\frac{1}{p^2 - p} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$$

c) En déduire que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

pour tout entier naturel $n \geq 2$.

1pts

③

a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \times \dots \times \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{2}$$

Indication. Remarquer que pour tout entier naturel $p \geq 2$, on a

$$1 + \frac{1}{p} = \frac{p+1}{p}$$

b) Simplifier le produit suivant,

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

pour tout entier naturel $n \geq 2$.

○ Exercice 5 (5.5 points)

On se donne un nombre réel positif y . La racine cubique de y est l'unique (on admet son existence) réel positif x qui vérifie l'égalité $y = x^3$.

- On note la racine cubique de y par $\sqrt[3]{y}$. Par exemple $\sqrt[3]{1} = 1$, $\sqrt[3]{27} = 3$ et $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$.

1.5pts

①

a) Soient $x \geq y \geq 0$ deux nombres réels.

- Montrer que x^3 est supérieur ou égal à y^3 .

b) Prouver que pour tout réel $y \geq 0$, on a $\sqrt[3]{y} \geq 0$.

Indication. Utiliser un raisonnement par absurde.

c) Soient $0 < x \leq y$ deux nombre réels. Prouver que

$$\sqrt[3]{x} \leq \sqrt[3]{y}$$

1.5pts

②

a) Soient $x, y \geq 0$ deux nombres réels positifs. Montrer que

$$\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y}$$



2.5pts

b) Montrer que pour un réel x strictement positif, on a

$$\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

③ (Applications).

a) Montrer que

$$\sqrt[3]{1 + 3\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{3 + 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{16}$$

b) Trouver tous les nombres réels x tels que

$$\sqrt[3]{x + 8} = \sqrt[3]{x} + 2$$

c) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, l'inégalité suivante a lieu,

$$3^n \geq n^3$$

d) (Un cas particulier de l'inégalité de Bernoulli).

i. Montrer que pour tout nombre réel x , on a

$$1 + x \geq \sqrt[3]{1 + 3x}$$

ii. En déduire que pour tout réel $x \geq 0$, on a

$$(1 + x)^{3^{2020}} \geq 1 + 3^{2020}x$$

○ Bonus (4 points)

On dit qu'un nombre premier p est charmant, s'il s'écrit sous la forme $p = m^3 - n^3$ pour $m, n \in \mathbb{N}^*$.

- (1) Donner trois exemples de nombres premiers charmants ayant les chiffres des unités deux-à-deux distincts.
- (2) Trouver toutes les valeurs possibles du chiffre des unités d'un nombre premier charmant.

* * *

Fin