

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

COLLECTION D'EXERCICES • NIVEAU BAC

Pour bien se préparer à l'examen national

للتّحضير الجيّد للاّمتحان الوطني

Polycopié VI • Structures algébriques

المطبوع السادس • البنيات الجبرية

Lois de composition · Groupes · Morphismes
Anneaux · Corps · Espaces vectoriels

40 exercices de préparation

أربعون تمريناً للتّحضير للاّمتحان الوطني

Sélection d'exercices issus des devoirs surveillés
et des sujets de l'examen national, sessions 2008 à 2024.

Niveau 2^{ème} année Baccalauréat – Sciences Mathématiques (السنة الثانية بكالوريا -- علوم رياضية)

Discipline Mathématiques – Algèbre et Géométrie

Volume VI – Recueil d'exercices

AUTEUR

Prof. Saad Choukri سعد شكري

© 2026 Prof. Saad Choukri — Tous droits réservés



Avant-propos

Ce polycopié rassemble **quarante exercices** sur les structures algébriques, sélectionnés dans une base de devoirs surveillés et de sujets de l'examen national des sessions 2008 à 2024. Les énoncés couvrent l'intégralité du programme : lois de composition internes, groupes et sous-groupes, morphismes et isomorphismes, anneaux, corps, ainsi que les espaces vectoriels et les sous-anneaux de matrices.

Les exercices sont regroupés en **sept parties thématiques**, de difficulté croissante à l'intérieur de chaque partie. Les trois dernières parties proposent des problèmes longs, de structure identique à celle des épreuves de l'examen national.

La plus grande partie des exercices de ce polycopié a été extraite des anciens devoirs surveillés du professeur **Abdellah Belkhatir** الأستاذ عبد الله بالختير, que nous remercions vivement.

Table des matières **الفهرس**

I	Lois de composition internes Exercices 1 à 6	القوانين التركيبية الداخلية
II	Groupes et sous-groupes Exercices 7 à 13	الزمر والزمر الجزئية
III	Morphismes et isomorphismes Exercices 14 à 20	التشاكلات والتقابلات التشاكلية
IV	Anneaux Exercices 21 à 26	الحلقات
V	Corps Exercices 27 à 33	الأجسام
VI	Espaces vectoriels et matrices Exercices 34 à 37	الفضاءات المتجهة والصفوفات
VII	Exercices de synthèse Exercices 38 à 40	تمارين تركيبية

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تقديم المطبوع

يضمّ هذا المطبوع أربعين تمريناً في البنيات الجبرية، انتُقيت من الفروض المحروسة ومن مواضيع الامتحان الوطني للسنوات 2008 إلى 2024، وهي موجهة لتلاميذ السنة الثانية من سلك البكالوريا، شعبة العلوم الرياضية.

تغطّي هذه التمارين مقترر البنيات الجبرية كاملاً: القوانين التركيبية الداخلية، الزمر والزمر الجزئية، التشاكلات والتقابلات التشاكلية، الحلقات، الأجسام، ثم الفضاءات المتجهية وحلقات الصفوفات. رُتبت التمارين في سبعة محاور، مع تدرّج في الصعوبة داخل كلّ محور. أمّا المحاور الثلاثة الأخيرة فتضمّن مسائل مركّبة تشبه في بنيتها مسائل الامتحان الوطني.

استُخرج الجزء الأكبر من تمارين هذا المطبوع من الفروض المحروسة السابقة للأستاذ عبد الله بلخخير، فله منا جزيل الشكر والتقدير.

إرشادات للاستعمال

حاول حلّ كلّ تمرين دون النظر إلى الإرشادات لمئة عشرين دقيقة على الأقلّ. احرص على تحرير الحلّ كاملاً، فنقطة الامتحان تقّيس الدقّة والصرامة كما تقّيس النتيجة. لا ترجع إلى الإرشادات الملونة إلا عند الضرورة القصوى.

شكر وتقدير

يتقدم مُعدّ هذا الطبع بأصدق عبارات الشكر والتقدير إلى الأستاذ الفاضل عبد الله بلخاتير، الذي استخرج الجزء الأكبر من تمارين هذا العمل من فروض المحروسة السابقة، فجزاه الله خيراً على جهده في خدمة الرياضيات وتلاميذها.

Remerciements

L'auteur adresse ses plus sincères remerciements au professeur **Abdellah Belkhatir**, dont les anciens devoirs surveillés ont fourni la plus grande partie des exercices réunis ici, et le remercie chaleureusement pour son dévouement constant au service de l'enseignement des mathématiques.

إعداد الأستاذ سعد شكري
وفقكم الله

LOIS DE COMPOSITION INTERNES

RAPPEL DE COURS

Une loi $*$ sur E est *interne* si $\forall (x, y) \in E^2, x * y \in E$; *commutative* si $x * y = y * x$; *associative* si $(x * y) * z = x * (y * z)$. L'élément $e \in E$ est *neutre* si $x * e = e * x = x$ pour tout x , et x' est le *symétrique* de x si $x * x' = x' * x = e$.

EXERCICE 1

Loi $x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$ • Bijection et transport

Les parties I et II de cet exercice sont indépendantes.

Partie I

On définit sur $\mathbb{R}$ la loi de composition interne $*$ par :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2); \quad x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1).$$

- (1) Vérifier que la loi $*$ est commutative et déterminer son élément neutre.
- (2) (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x * \sqrt{3} = 1$.
(b) La loi $*$ est-elle associative ? Justifier la réponse.

Partie II

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on pose : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$.

- (1) Montrer que f est une bijection de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.
- (2) On définit sur $\mathbb{R}$ la loi de composition interne T par :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2); \quad x T y = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}.$$

- Montrer que f est un homomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ vers $(\mathbb{R}, T)$. Puis en déduire la structure de $(\mathbb{R}, T)$.
- (3) On pose : $H = \left\{ \frac{e^x - e^{-x}}{2} / x \in \mathbb{Z} \right\}$.
• Montrer que (H, T) est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, T)$.
 - (4) Pour tout entier $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $x^{(n)} = \underbrace{x T x T \dots T x}_{n \text{ fois}}$.
• Déterminer explicitement $x^{(n)}$ en fonction de x et n .

EXERCICE 2

Loi $x * y = x + y - e^{xy} + 1$ • Non-associativité

On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad x * y = x + y - e^{xy} + 1.$$

- (1) (a) Justifier que $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera.
- (2) (a) Montrer que l'équation : $3 + x - e^{2x} = 0$ admet deux solutions distinctes a et b dans $\mathbb{R}$.
(b) La loi $*$ est-elle associative dans $\mathbb{R}$? Justifier la réponse.

EXERCICE 3

Loi $x * y = kxy + k'(x + y)$ • Recherche des paramètres

On définit sur $\mathbb{R}$ la loi de composition interne $*$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad x * y = kxy + k'(x + y), \quad \text{où } (k, k') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*.$$

- (1) Déterminer tous les couples (k, k') pour lesquels la loi $*$ est associative.
- (2) Quelle est la structure de $(\mathbb{R}, *)$ dans ce cas ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4

Loi $a * b = e^{(1+\ln a)(1+\ln b)-1}$ • Puissances itérées

Sur $\mathbb{R}^{*+}$, on définit la loi de composition interne $*$ par :

$$\text{pour tout } (a, b) \in (\mathbb{R}^{*+})^2; \quad a * b = e^{(1+\ln a)(1+\ln b)-1}.$$

- (1) Montrer que $*$ est commutative et associative.
- (2) (a) Montrer que $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera.
(b) Déterminer l'ensemble des éléments ayant un symétrique pour $*$.
- (3) (a) Montrer que $I = \left] \frac{1}{e}; +\infty \right[$ est une partie stable dans $(\mathbb{R}^{*+}, *)$.
(b) Montrer que l'application $f : x \mapsto e^{(\frac{1}{x})}$ de $\mathbb{R}^{*+}$ vers I est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ vers $(I, *)$, puis en déduire la structure de $(I, *)$.
- (4) Pour tout $x \in I$, on pose : $g_n(x) = \underbrace{x * x * \cdots * x}_{n \text{ fois}}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
(a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); g_n(x) = e^{(1+\ln x)^n - 1}$.
(b) Justifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists! u_n \in I); g_n(u_n) = e^n$.
(c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln n} (u_n - 1)$.

EXERCICE 5

Loi $a \perp b = ab + i(a + b) - (1 + i)$ sur $\mathbb{C}$ • Puissances

On définit sur $\mathbb{C}$ la loi de composition interne $\perp$ par :

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2); \quad a \perp b = ab + i(a + b) - (1 + i).$$

- (1) (a) Justifier que $\perp$ est commutative et associative dans $\mathbb{C}$.
 (b) Montrer que $\perp$ admet un élément neutre que l'on déterminera.
 (c) Le nombre $-i$ admet-il un symétrique dans $(\mathbb{C}, \perp)$? Justifier la réponse.
- (2) On pose : $G = \mathbb{C} - \{-i\}$ et $H = \{z \in \mathbb{C} / |z + i| = 1\}$.
 (a) Montrer que G est une partie stable dans $(\mathbb{C}, \perp)$.
 (b) Montrer que $(G, \perp)$ est un groupe commutatif.
 (c) Montrer que H est un sous-groupe de $(G, \perp)$.
- (3) Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on pose : $f(z) = z - i$.
 (a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(G, \perp)$.
 (b) Soit $z \in G$ et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Calculer en fonction de z et n le nombre complexe $z^{(n)} = \underbrace{z \perp z \perp \dots \perp z}_{n \text{ fois}}$. Puis résoudre dans G l'équation $(E) : z \perp z \perp z = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

EXERCICE 6

Loi $a * b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2$ • Matrices $M(x)$

Partie I

Pour tous a et b de l'intervalle $I = [1; +\infty[$, on pose : $a \perp b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2$.

- (1) Montrer que $\perp$ est une loi de composition interne sur I .
- (2) Montrer que la loi $\perp$ est commutative et associative.
- (3) Montrer que $\perp$ admet un élément neutre à déterminer.

Partie II

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire. Soit $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}^* \right\}$.

- (1) Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.
- (2) On considère l'application φ définie par : $\varphi : \mathbb{R}^* \longrightarrow E, \quad x \longmapsto M(x)$.
 (a) Montrer que l'application φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans $(E, \times)$.
 (b) En déduire la structure de $(E, \times)$.
 (c) Montrer que l'ensemble $H = \left\{ \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / n \in \mathbb{Z} \right\}$ est un sous-groupe de $(E, \times)$.

GROUPES ET SOUS-GROUPES



RAPPEL DE COURS

$(G, *)$ est un groupe si $*$ est interne, associative, admet un neutre et si tout élément admet un symétrique. Une partie $H \subset G$ non vide est un *sous-groupe* si $\forall (x, y) \in H^2, x * y' \in H$, où y' désigne le symétrique de y .

EXERCICE 7

Loi $a * b = e^{\ln a \cdot \ln b}$ • Corps $(I, \times, *)$ • Matrice non inversible

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I

On munit l'ensemble $I =]0; +\infty[$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$(\forall (a; b) \in I \times I) \quad a * b = e^{\ln(a) \cdot \ln(b)}.$$

- (1) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative sur I .
- (2) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre ε dans I à déterminer.
- (3) (a) Montrer que $(I \setminus \{1\}, *)$ est un groupe commutatif.
(b) Montrer que $J =]1; +\infty[$ est un sous-groupe de $(I \setminus \{1\}, *)$.
- (4) On munit I de la loi de composition interne $\times$ (multiplication dans $\mathbb{R}$).
(a) Montrer que la loi $*$ est distributive par rapport à la loi $\times$.
(b) Montrer que $(I, \times, *)$ est un corps commutatif.

Partie II

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

- (1) Calculer A^2 et A^3 .
- (2) En déduire que la matrice A est non inversible.

EXERCICE 8

Loi $x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$ sur $]0; 1[$ • Sous-groupes

Soit x et y deux nombres de l'intervalle $I =]0; 1[$, on pose :

$$x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}.$$

- (1) (a) Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur I .
(b) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.

- (c) Montrer que $(I, *)$ admet un élément neutre à déterminer.
- (2) Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.
- (3) On considère les deux ensembles suivants : $\mathbb{H} = \{2^n / n \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathbb{K} = \left\{ \frac{1}{2^n + 1} / n \in \mathbb{Z} \right\}$.
- (a) Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
- (b) On considère l'application φ définie par : $\varphi : \mathbb{H} \longrightarrow I, x \longmapsto \frac{1}{x+1}$. Montrer que l'application φ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{H}, \times)$ dans $(I, *)$.
- (c) Dédire que $(\mathbb{K}, *)$ est un sous-groupe du groupe $(I, *)$.

EXERCICE 9

Loi $x * y = x + y - 3xy$ sur $]-\infty; \frac{1}{3}[$ • Transport par $\ln$

Partie I

On considère l'intervalle $I =]-\infty; \frac{1}{3}[$. Pour tout $(x, y) \in I^2$, on pose : $x * y = x + y - 3xy$.

- (1) (a) Vérifier que : $(\forall (x, y) \in I^2) ; 1 - 3(x * y) = (1 - 3x)(1 - 3y)$.
- (b) En déduire que $*$ est une loi de composition interne sur I .
- (2) Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.

Partie II

On considère l'intervalle $J =]0; +\infty[$. Pour tout $(x, y) \in J^2$, on pose : $x T y = \ln(e^{x+y} - e^x - e^y + 2)$.

- (1) Vérifier que T est une loi de composition interne sur J .
- (2) Pour tout $x \in I$, on pose : $f(x) = \ln(2 - 3x)$.
- (a) Montrer que f est un isomorphisme de $(I, *)$ vers (J, T) .
- (b) Dédire la structure de (J, T) en précisant son élément neutre et déterminer le symétrique de tout $x \in J$ pour la loi T .
- (3) On pose : $H = \left\{ \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) / n \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Montrer que H est un sous-groupe de (J, T) .

EXERCICE 10

Loi $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$ sur $] -1; 1[$ • Corps $(J, *, \perp)$

On pose $J =] -1; 1[$.

Partie I

Soient a et b deux éléments de l'intervalle J , on pose : $a * b = \frac{a+b}{1+ab}$.

- (1) Vérifier que $(\forall (a, b) \in J^2) ; 1 + ab > 0$, puis en déduire que $*$ est une loi de composition interne dans J .
- (2) (a) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative dans J .
 (b) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre dans J qu'on déterminera.
 (c) Montrer que $(J, *)$ est un groupe commutatif.

Partie II

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

- (1) Montrer que la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers J .
- (2) Soit g la bijection réciproque de l'application f (la détermination de g n'est pas demandée). Quels que soient x et y de J , on pose : $x \perp y = f(g(x) \times g(y))$.
 • Montrer que f est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(J^*, \perp)$ tel que $J^* = J - \{0\}$.
- (3) On rappelle que $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif et on admet que la loi $\perp$ est distributive par rapport à la loi $*$ dans J .
 • Montrer que $(J, *, \perp)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 11

Loi $a * b = (x - a)(y - a) + a$ • Matrice $A^{2k} = I$

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I

Dans l'anneau $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ on considère les deux matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(On pose : $A^0 = I$, $A^1 = A$, $A^2 = A \times A$, $A^{n+1} = A^n \times A$ pour tout n de $\mathbb{N}$.)

- (1) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}) ; A^{2k} = I$.
- (2) Montrer que A admet une matrice inverse A^{-1} que l'on déterminera.

Partie II

Soit a un nombre réel. Pour tout x et y de l'intervalle $I =]a; +\infty[$ on pose : $x * y = (x - a)(y - a) + a$.

- (1) (a) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I .
 (b) Montrer que $*$ est une loi commutative et associative.
 (c) Montrer que $(I, *)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.
- (2) Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.
- (3) On considère l'application : $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, \quad x \longmapsto \frac{1}{x - a}$.

- (a) Montrer que ϕ est un isomorphisme de $(I, *)$ vers $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
 (b) Résoudre dans l'ensemble I l'équation : $x^{(3)} = a^3 + a$, où $x^{(3)} = x * x * x$.

EXERCICE 12

Loi $a * b = a + (-1)^a \times b$ sur $\mathbb{Z}$ • Groupe non commutatif

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on pose : $a * b = a + (-1)^a \times b$.

- (1) Montrer que la loi $*$ n'est pas commutative dans $\mathbb{Z}$.
- (2) Montrer que $(\mathbb{Z}, *)$ est un groupe non commutatif.
- (3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, on pose : $n\mathbb{Z} = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
 • Montrer que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, *)$.

EXERCICE 13

Loi T sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ • Groupe non commutatif • Sous-groupe

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif dont le zéro est la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et l'unité est la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On considère dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ la loi de composition interne T définie par :

$$\forall ((a, b), (c, d)) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*)^2; \quad (a, b) T (c, d) = (a\bar{d} + c, bd)$$

($\bar{d}$ étant le conjugué du nombre complexe d).

- (1) (a) Vérifier que $(i, 2) T (1, i) = (2, 2i)$, puis calculer $(1, i) T (i, 2)$.
 (b) En déduire que la loi T n'est pas commutative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.
- (2) Montrer que la loi T est associative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.
- (3) Vérifier que $(0, 1)$ est l'élément neutre pour T dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.
- (4) (a) Vérifier que : $\forall (a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*; \quad (a, b) T \left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) = (0, 1)$.
 (b) Montrer que $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)$ est un groupe non commutatif.
- (5) (a) Montrer que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est stable par la loi de composition interne T .
 (b) Montrer que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)$.

EXERCICE 14

Matrices $M(x; y)$ triangulaires • Isomorphisme vers $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \perp)$

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2. On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire dont l'élément neutre est $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des matrices carrées $M(x; y)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$M(x; y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}, \quad \text{avec } (x; y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}.$$

- (1) (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.
 (b) Montrer que $(\mathcal{F}, \times)$ est un groupe non commutatif.
- (2) Soit G l'ensemble des matrices $M(x; 0)$ de $\mathcal{F}$ avec $x \in \mathbb{R}^*$.
 • Montrer que l'ensemble G est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{F}, \times)$.
- (3) On pose $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On munit l'ensemble E de la loi de composition interne $\perp$ définie par :

$$(\forall (x; y) \in E) (\forall (a; b) \in E); \quad (x; y) \perp (a; b) = \left(ax; bx + \frac{y}{a} \right)$$

et on considère l'application $\phi : (\mathcal{F}, \times) \longrightarrow (E, \perp), \quad M(x, y) \longmapsto (x, y)$.

- (a) Calculer $(1; 1) \perp (2; 3)$ et $(2; 3) \perp (1; 1)$.
- (b) Montrer que ϕ est un isomorphisme.
- (c) En déduire la structure de $(E, \perp)$.

EXERCICE 15

Matrices $M(x)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ • Isomorphisme depuis $(\mathbb{R}, +)$

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif. On considère l'ensemble :

$$E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (1) Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.
- (2) (a) Montrer que l'application φ qui à tout nombre réel x associe la matrice $M(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(E, \times)$.
 (b) En déduire que $(E, \times)$ est un groupe commutatif.
 (c) Déterminer $M^{-1}(x)$, l'inverse de la matrice $M(x)$ pour tout réel x .
 (d) Résoudre dans l'ensemble E l'équation $A^5 X = B$, où $A = M(2)$, $B = M(12)$ et $A^5 = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{5 \text{ fois}}$.
- (3) Montrer que l'ensemble $F = \{ M(\ln(x)) / x \in \mathbb{R}_+^* \}$ est un sous-groupe de $(E, \times)$.

EXERCICE 16

Loi $*$ sur $\mathbb{C}$ • Groupe $(G, *)$ • Sous-groupe H

On munit l'ensemble $\mathbb{C}$ de la loi de composition interne définie par :

$$(\forall (a, b, x, y) \in \mathbb{R}^4); \quad (a + ib) * (x + iy) = ax + i(ay + bx).$$

- (1) (a) Montrer que $*$ est commutative et associative dans $\mathbb{C}$.
(b) Montrer que $*$ admet dans $\mathbb{C}$ un élément neutre que l'on précisera.
- (2) Déterminer l'ensemble G des éléments qui admettent un symétrique dans $(\mathbb{C}, *)$.
- (3) Montrer que $(G, *)$ est un groupe commutatif.
- (4) On pose : $H = \{z = e^x(1 + ix) / x \in \mathbb{R}\}$.
• Montrer que H est un sous-groupe de $(G, *)$.

EXERCICE 17

Loi $*$ sur $\mathbb{R}^2$ • Isomorphisme depuis $(\mathbb{C}, \times)$

On munit l'ensemble $\mathbb{R}^2$ de la loi de composition interne définie par :

$$(\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4); \quad (a, b) * (c, d) = \left(\frac{1}{3}ad + \frac{1}{3}bc, \frac{1}{3}bd - \frac{3}{4}ac \right).$$

Pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on pose : $f(z) = (2b, 3a)$.

- (1) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C}, \times)$ vers $(\mathbb{R}^2, *)$.
- (2) En déduire la structure de $(\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}, *)$ (on précisera l'élément neutre et le symétrique de tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$).
- (3) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation $(E) : (a, b) * (a, b) * (a, b) = (0, 3)$.

EXERCICE 18

Applications affines $f_{(a,b)}(z) = az + b$ • Sous-groupe distingué

On considère l'ensemble : $E = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 / |a| = 1\}$. Pour tout $(a, b) \in E$, on considère l'application $f_{(a,b)}$ définie de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ par : $(\forall z \in \mathbb{C}); f_{(a,b)}(z) = az + b$. On pose : $G = \{f_{(a,b)} / (a, b) \in E\}$ et $H = \{f_{(1,b)} / b \in \mathbb{C}\}$.

- (1) (a) Montrer que $\circ$ est une loi de composition interne dans G .
(b) Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe commutatif.
- (2) (a) Montrer que H est un sous-groupe de $(G, \circ)$.
(b) Montrer que pour tout $f \in G$ et pour tout $h \in H$, on a : $f^{-1} \circ h \circ f \in H$, où f^{-1} désigne le symétrique de f dans $(G, \circ)$.

EXERCICE 19

Loi $x * y = x + y - 3xy$ et loi T • Sous-groupe H

Partie I

On considère l'ensemble $I = \left] -\infty; \frac{1}{3} \right[$. Pour tout $(x, y) \in I^2$, on pose : $x * y = x + y - 3xy$.

- (1) (a) Vérifier que : $(\forall (x, y) \in I^2); 1 - 3(x * y) = (1 - 3x)(1 - 3y)$.
 (b) En déduire que $*$ est une loi de composition interne sur I .
- (2) Démontrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.

Partie II

On considère l'intervalle $J =]0; +\infty[$. Pour tout $(x, y) \in J^2$, on pose : $xTy = \ln((e^x - 1)(e^y - 1) + 1)$.

- (1) Vérifier que T est une loi de composition interne sur J .
- (2) Pour tout $x \in I$, on pose : $f(x) = \ln(2 - 3x)$.
 (a) Montrer que f est un isomorphisme de $(I, *)$ vers (J, T) .
 (b) En déduire la structure de (J, T) en précisant son élément neutre et le symétrique de tout $x \in J$.
- (3) On pose : $H = \{\ln(1 + 2^n) / n \in \mathbb{Z}\}$.
 • Montrer que H est un sous-groupe de (J, T) .

EXERCICE 20

Matrices $M(a, b)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ • Corps commutatif

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est la matrice nulle O et dont l'unité est la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif. On pose

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix}$. On considère l'ensemble : $E = \{M(a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

- (1) Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$.
- (2) On définit sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la loi de composition interne T par :

$$(\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4) \quad M(a, b) T M(c, d) = M(a, b) \times A \times M(c, d).$$

- Vérifier que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), T)$.
- (3) On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E qui à tout nombre complexe non nul $a + ib$ (où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$) fait correspondre la matrice $M(a, b)$ de E .
 (a) Vérifier que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers (E, T) et que $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$, où $E^* = E - \{M(0, 0)\}$.

- (b) En déduire que (E^*, T) est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre J .
- (4) (a) Montrer que la loi T est distributive par rapport à la loi $+$ dans E .
 (b) En déduire que $(E, +, T)$ est un corps commutatif.

ANNEAUX

IV

RAPPEL DE COURS

$(A, +, \times)$ est un anneau si $(A, +)$ est un groupe commutatif, si $\times$ est associative et distributive par rapport à $+$. L'anneau est *unitaire* s'il possède un élément neutre pour $\times$, et *intègre* s'il est commutatif, unitaire et sans diviseur de zéro.

EXERCICE 21

Anneau $(\mathbb{Z}, *, T)$ • Intégrité • Corps ?

On rappelle que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau unitaire commutatif et intègre.

- (1) On munit $\mathbb{Z}$ de la loi de composition interne $*$ définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2; x * y = x + y - 2$.
 (a) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.
 (b) Montrer que $(\mathbb{Z}, *)$ admet un élément neutre à déterminer.
 (c) Montrer que $(\mathbb{Z}, *)$ est un groupe commutatif.
- (2) On munit $\mathbb{Z}$ de la loi de composition interne T définie par : $(\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2); x T y = xy - 2x - 2y + 6$. On considère l'application f de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$ définie par : $(\forall x \in \mathbb{Z}); f(x) = x + 2$.
 (a) Montrer que f est un morphisme bijectif de $(\mathbb{Z}, \times)$ vers $(\mathbb{Z}, T)$.
 (b) Montrer que : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3; (x * y) T z = (x T z) * (y T z)$.
- (3) En déduire de ce qui précède que $(\mathbb{Z}, *, T)$ est un anneau commutatif et unitaire.
- (4) (a) Montrer que : $x T y = 2$ si et seulement si $x = 2$ ou $y = 2$.
 (b) En déduire que l'anneau $(\mathbb{Z}, *, T)$ est intègre.
 (c) $(\mathbb{Z}, *, T)$ est-il un corps ? (Justifier la réponse.)

EXERCICE 22

Anneau $\{M(a, b) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ 0 & a \end{pmatrix}\}$ sur $\mathbb{Z}$ • Intégrité

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire et intègre. Soit $E =$

$$\left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

- (1) (a) Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.
 (b) Vérifier que pour tous a, b, c et d de $\mathbb{Z}$, on a : $M(a, b) \times M(c, d) = M(ac + 3bd, ad + bc)$.
 (c) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.
- (2) Soit φ l'application définie de E vers $\mathbb{Z}$ par : $(\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2); \varphi(M(a, b)) = |a^2 - 3b^2|$.
 • Montrer que φ est un homomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{Z}, \times)$.
- (3) Soit $M(a, b) \in E$.
 (a) Montrer que $M(a, b) \times M(a, -b) = (a^2 - 3b^2) I$.
 (b) Montrer que si $M(a, b)$ est inversible dans $(E, \times)$ alors $\varphi(M(a, b)) = 1$.
 (c) On suppose que $\varphi(M(a, b)) = 1$. Montrer que $M(a, b)$ est inversible dans $(E, \times)$ et préciser son inverse.
- (4) (a) Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2; \varphi(M(a, b)) = 0 \iff a = b = 0$.
 (b) En déduire que l'anneau $(E, +, \times)$ est intègre.
 (c) Est-ce que $(E, +, \times)$ est un corps ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 23

Anneau $\{M(x, y) = \begin{pmatrix} x & ky \\ y & x \end{pmatrix}\}$ • Discussion selon k

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère le sous-ensemble :

$$E = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & ky \\ y & x \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}, \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

- (1) Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.
- (2) (a) Montrer que E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.
 (b) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.
- (3) On suppose dans cette question que $k \geq 0$.
 (a) Calculer le produit : $M(\sqrt{k}, 1) \times M(-\sqrt{k}, 1)$.
 (b) L'anneau $(E, +, \times)$ est-il intègre ? Justifier la réponse.
- (4) On suppose dans cette question que $k < 0$.
 • Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.
- (5) On prend $k = -1$ et on pose : $J = M(0, 1)$.
 • Montrer que la matrice J^{2023} est inversible dans E et donner son inverse.

EXERCICE 24

Anneau $\mathcal{H} = \{ \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \}$ sur $\mathbb{Z}$ • Éléments inversibles

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on considère le sous-ensemble :

$$\mathcal{H} = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- (1) Montrer que $(\mathcal{H}, +)$ est un groupe commutatif.
- (2) (a) Montrer que $\mathcal{H}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.
(b) Montrer que $(\mathcal{H}, +, \times)$ est un anneau unitaire en précisant l'élément neutre de $(\mathcal{H}, \times)$.
- (3) Montrer que l'anneau $(\mathcal{H}, +, \times)$ est intègre.
- (4) (a) Soit $x \in \mathbb{Z}$. Montrer que la matrice $M(x)$ est inversible dans $(\mathcal{H}, +, \times)$ si et seulement si $x \in \{-1; 1\}$.
(b) L'anneau $(\mathcal{H}, +, \times)$ est-il un corps ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 25

Anneau $\{M(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a+b \end{pmatrix}\} \cdot \text{Non intègre}$

On pose : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On considère l'ensemble :

$$E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a+b \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- (1) (a) Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.
(b) Montrer que $B(I, J)$ est une base de $(E, +, \cdot)$ puis en déduire $\dim(E)$.
- (2) Vérifier que $J^2 = 2J$, puis en déduire que pour tout $(a, b, x, y) \in \mathbb{R}^4$, on a : $M(a, b) \times M(x, y) = M(ax, ay + bx + 2by)$.
- (3) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau unitaire non intègre.
- (4) Montrer que $M(a, b)$ est inversible dans $(E, +, \times)$ si et seulement si $a \neq 0$ et $a \neq -2b$.
- (5) On considère l'ensemble $\mathcal{H} = \left\{ A(x) = I + \frac{3x-1}{2}J / x \in \mathbb{Z} \right\}$.
(a) Montrer que $\mathcal{H}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.
(b) Montrer que l'application $f : x \mapsto A(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathcal{H}, \times)$, puis en déduire que $(\mathcal{H}, \times)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE 26

Anneau $V = \{M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}\} \cdot \text{Inverse}$

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I_2 , et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel. On pose pour tous réels a et b : $M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$, et soit $V = \{M_{(a;b)} / (a;b) \in \mathbb{R}^2\}$.

- (1) Montrer que V est un sous-espace vectoriel réel de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ et déterminer une base de V .
- (2) (a) Montrer que l'ensemble V est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.
(b) Montrer que $(V, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.
- (3) (a) Calculer $M_{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)} \times M_{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)}$.
(b) L'anneau $(V, +, \times)$ est-il un corps ?
- (4) Soit X une matrice de l'ensemble V telle que : $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.
(a) Montrer que $X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2)I_2 = 0$.
(b) On suppose que $a^2 - 4b^2 \neq 0$. Montrer que la matrice X admet un inverse dans V qu'on déterminera.

CORPS

V

RAPPEL DE COURS

$(K, +, \times)$ est un *corps commutatif* si c'est un anneau commutatif unitaire dont tout élément non nul est inversible. La méthode standard consiste à construire un isomorphisme entre $(K^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ ou $(\mathbb{R}^*, \times)$.

EXERCICE 27

$$\text{Corps } E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ -\frac{b}{\sqrt{3}} & a \end{pmatrix} \right\}$$

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire, que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif. On pose :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (1) (a) Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
(b) Montrer que la famille (I, J) est une base dans l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.
- (2) On considère l'application $f : \mathbb{C}^* \rightarrow E^*, \quad a + ib \mapsto M(a, b)$, où $E^* = E \setminus \{M(0, 0)\}$.
(a) Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.
(b) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E^*, \times)$.
- (3) Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.
- (4) Résoudre dans E l'équation : $J \times X^3 = I$ (où $X^3 = X \times X \times X$).

EXERCICE 28

Corps $E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} \right\}$ • **Loi** $A * B = A \times N \times B$

On rappelle que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire de zéro O et d'unité I . Pour tous a et b de $\mathbb{R}$ on pose : $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble $E = \{M(a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

- (1) Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.
- (2) Calculer $J^2 = J \times J$ sachant que $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis en déduire que E n'est pas stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.
- (3) On définit sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne $*$ par : $A * B = A \times N \times B$ avec $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui associe à chaque nombre complexe non nul $a + ib$ la matrice $M(a, b)$.
 - (a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), *)$.
 - (b) On pose $E^* = E - \{O\}$. Montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$.
 - (c) Montrer que $(E^*, *)$ est un groupe commutatif.
- (4) Montrer que : $\forall (A, B, C) \in E^3; A * (B + C) = A * B + A * C$.
- (5) En déduire de ce qui précède que $(E, +, *)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 29

Corps $E = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix} \right\}$ • **Loi** $*$ non associative

Partie I

On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2); x * y = x + y - e^{xy} + 1$.

- (1) (a) Montrer que la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre qu'on déterminera.
- (2) Sachant que l'équation $(E) : 3 + x - e^{2x} = 0$ admet deux solutions distinctes a et b dans $\mathbb{R}$, montrer que la loi $*$ n'est pas associative.

Partie II

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau non commutatif unitaire dont le zéro est la matrice nulle O et dont l'unité est la matrice identique I , que $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel. Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix}$. On considère l'ensemble $F = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

- (1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de l'espace $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
- (2) Montrer que F est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

- (3) Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers F définie par : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) ; \varphi(x + iy) = M(x, y)$.
- (a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(F, \times)$.
- (b) On pose $F^* = F - \{M(0, 0)\}$. Montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$.
- (c) En déduire que $(F^*, \times)$ est un groupe commutatif.
- (4) Montrer que $(F, +, \times)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 30

Corps E de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ • Matrice sans symétrie

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire d'unité I et que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif. Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$ on pose : $M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix}$ et $E = \{M(x, y) ; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

- (1) Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$.
- (2) Vérifier que : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) (\forall (x', y') \in \mathbb{R}^2) ; M(x, y) \times M(x', y') = M(xx' - yy', xy' + yx')$.
- (3) On pose $E^* = E - \{M(0, 0)\}$ et on considère l'application $\varphi : \mathbb{C}^* \mapsto E$ qui au nombre complexe $z = x + iy$ associe la matrice $M(x, y)$ de E , avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E, \times)$.
- (b) En déduire que $(E^*, \times)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $M(1, 0)$.
- (4) Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.
- (5) On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- (a) Calculer $A \times M(x, y)$ pour $M(x, y) \in E$.
- (b) En déduire qu'aucun élément de E n'admet de symétrique dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

EXERCICE 31

Corps $E = \{M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix}\}$ • Base (I, J)

On rappelle que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif, que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle O et d'unité la matrice I , et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel. Pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix}$, et on considère l'ensemble $E = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

- (1) Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.
- (2) (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
- (b) On pose $J = M(0, 1)$. Montrer que (I, J) est une base de l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.
- (3) (a) Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

(b) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.

(4) Soit φ l'application définie de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}); \quad \varphi(x + iy) = M(x + y, -y) = \begin{pmatrix} x + y & 2y \\ -y & x - y \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

(b) On pose $E^* = E - \{O\}$. Montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$.

(c) En déduire que $(E^*, \times)$ est un groupe commutatif.

(5) Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 32

Corps $E = \{M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}\}$ • Loi T modifiée

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle θ et d'unité la matrice I , et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel de dimension 4. Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$. On considère l'ensemble $E = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

(1) Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

(2) (a) Montrer que E est un sous-espace de l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

(b) Montrer que l'espace vectoriel réel $(E, +, \cdot)$ est de dimension 2.

(3) (a) Montrer que E est une partie stable pour la loi $\times$.

(b) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.

(4) On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne T par :

$$M(x, y) T M(x', y') = M(x, y) \times M(x', y') - M(y, 0) \times M(y', 0).$$

Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers E définie par : $\varphi(x + iy) = M(x, y)$.

(a) Montrer que E est une partie stable pour la loi T .

(b) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers (E, T) .

(c) On pose $E^* = E - \{\theta\}$. Montrer que (E^*, T) est un groupe commutatif.

(5) (a) Montrer que la loi T est distributive par rapport à la loi $+$ dans E .

(b) Montrer que $(E, +, T)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 33

Corps E de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ • Sous-corps G sur $\mathbb{Q}$

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau non commutatif de zéro la matrice O et d'unité la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel. On considère l'ensemble

$$E = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Partie I

- (1) Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.
- (2) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
- (3) (a) Vérifier que : $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4; M(x, y) \times M(x', y') = M(xx' + 3yy', xy' + yx')$.
(b) En déduire que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.
- (4) (a) Vérifier que : $M(\sqrt{3}, 1) \times M(-\sqrt{3}, 1) = O$.
(b) En déduire que $(E, +, \times)$ n'est pas un corps.

Partie II

Soient $F = \{x + y\sqrt{3} / (x, y) \in \mathbb{Q}^2\}$ et $G = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{Q}^2\}$.

- (1) Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2; x + y\sqrt{3} = 0$ si et seulement si $x = 0$ et $y = 0$.
- (2) Montrer que $F - \{0\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.
- (3) Soit φ l'application définie de $F - \{0\}$ vers E par : $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2 - \{(0, 0)\}; \varphi(x + y\sqrt{3}) = M(x, y)$.
(a) Vérifier que $\varphi(F - \{0\}) = G - \{O\}$.
(b) Montrer que φ est un homomorphisme de $(F - \{0\}, \times)$ vers $(E, \times)$.
(c) En déduire que $(G - \{O\}, \times)$ est un groupe commutatif.
- (4) Montrer que $(G, +, \times)$ est un corps commutatif.

ESPACES VECTORIELS ET MATRICES

VI

EXERCICE 34

Sous-espace E de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ • Discussion selon $p^2 - q$

Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. On considère dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le sous-ensemble :

$$E = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -qy & x + 2py \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- (1) (a) Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
(b) On considère les matrices $I = M(1, 0)$ et $J = M(0, 1)$. Montrer que la famille $B(I, J)$ est une base de $(E, +, \cdot)$, puis en déduire $\dim(E)$.
- (2) (a) Vérifier que $J^2 = -qI + 2pJ$. Puis en déduire que E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.
(b) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.
- (3) On suppose que $q = 0$.

- Montrer que la matrice J n'est pas inversible dans E .

(4) On suppose que $q \neq 0$.

- (a) Montrer que J est inversible dans E et donner son inverse J^{-1} .
- (b) Sous quelle condition la famille $B'(J^2, J^{-1})$ est-elle une base de $(E, +, \cdot)$?

(5) (a) Montrer que si $p^2 - q \geq 0$, alors l'anneau $(E, +, \times)$ n'est pas intègre.

- (b) Montrer que si $p^2 - q < 0$, alors $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 35

Sous-espace E de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ • Somme $A_n = I + J + \dots + J^n$

On considère l'ensemble $E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & 4b \\ -b & a-b \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

- (1) (a) Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
- (b) On pose $I = M(1, 0)$ et $J = M(0, 1)$. Montrer que la famille $B(I, J)$ est une base de l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.
- (2) (a) Vérifier que $J^2 = -3I$, puis en déduire que E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.
- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $A_n = I + J + J^2 + \dots + J^n$. Déterminer les coordonnées de la matrice A_n dans la base $B(I, J)$.
- (3) (a) Montrer que la famille $B'(1, i\sqrt{3})$ est une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
- (b) Montrer que l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow E, a + ib\sqrt{3} \mapsto M(a, b)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}, \times)$ vers $(E, \times)$, puis déduire la structure de $(E^*, \times)$ (on déterminera l'inverse de toute matrice non nulle $M(a, b)$).
- (4) Déduire la structure de $(E, +, \times)$ en justifiant votre réponse.
- (5) On considère la matrice $A = \frac{1}{2}(I + J)$.
 - Déterminer toutes les valeurs de l'entier naturel n telles que : $A^n = I$.

EXERCICE 36

Matrices $M(a, b)$ et cercle unité • Groupe $(E, \times)$

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère le sous-ensemble :

$$E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

- (1) (a) Vérifier que : $(\forall (a, b, x, y) \in \mathbb{R}^4) ; M(a, b) \times M(x, y) = M(ax - by, ay + bx)$.
- (b) En déduire que E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.
- (2) On pose : $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$. Montrer que Γ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
- (3) Pour tout $a + ib \in \Gamma$, on pose : $f(a + ib) = M(a, b)$.
 - (a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\Gamma, \times)$ vers $(E, \times)$.

- (b) En déduire la structure de $(E, \times)$ en précisant l'inverse de tout $M(a, b) \in E$.
- (4) On pose : $A = M\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Déterminer l'inverse de la matrice A^{2024} dans E .
- (5) On considère les matrices $I = M(1, 0)$ et $J = M(0, 1)$. Résoudre dans E l'équation : $J \times X^3 = I$.

EXERCICE 37

$$\text{Espace } E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{pmatrix} \right\}$$

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire et que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel. On pose : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On considère l'ensemble :

$$G = \left\{ A(x) = I + xJ \mid x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{-1}{3} \right\} \right\}.$$

- (1) (a) Vérifier que $J^2 = 3J$.
 (b) La matrice J admet-elle un inverse dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$? Justifier la réponse.
- (2) (a) Montrer que G est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.
 (b) Montrer que $(G, \times)$ est un groupe commutatif.
- (3) On pose : $E = \left\{ M(a; b) = \begin{pmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{pmatrix} \mid (a; b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
 (a) Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.
 (b) Montrer que la famille $B(I, J)$ est une base de $(E, +, \cdot)$.

EXERCICES DE SYNTHÈSE

VII

EXERCICE 38

$$\text{Espace des fonctions } f_{(a,b)}(x) = (ax + b)e^{2x} \cdot \text{Corps}$$

Soit E l'ensemble des fonctions $f_{(a,b)}$ telles que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f_{(a,b)}(x) = (ax + b)e^{2x}.$$

- (1) (a) Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.
 (b) On pose $\mathcal{B} = (f_{(1,0)}, f_{(0,1)})$ avec $f_{(1,0)}(x) = x e^{2x}$ et $f_{(0,1)}(x) = e^{2x}$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de l'espace vectoriel E .

- (2) On munit E de la loi de composition interne T définie pour tout $f_{(a,b)}$ et $f_{(c,d)}$ de E par : $f_{(a,b)} T f_{(c,d)} = f_{(ac-bd, bc+ad)}$. On note $E^* = E \setminus \{f_{(0,0)}\}$ et on considère l'application $\phi : \mathbb{C}^* \rightarrow E^*$ définie par : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2; \phi(a + ib) = f_{(a,b)}$.
- (a) Montrer que ϕ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers (E^*, T) .
- (b) En déduire la structure de (E^*, T) .
- (c) Montrer que $(E, +, T)$ est un corps.
- (d) Résoudre dans E l'équation : $\underbrace{f_{(a,b)} T f_{(a,b)} T \dots T f_{(a,b)}}_{n \text{ fois}} = f_{(1,2)}$.

EXERCICE 39

Loi $*$ sur $\mathbb{C}$ • Groupe E • Isomorphisme vers des matrices

On rappelle que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle O et d'unité la matrice I . Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) (\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2); (x + yi) * (a + bi) = xa + (x^2b + a^2y)i.$$

- (1) (a) Montrer que la loi $*$ est commutative sur $\mathbb{C}$.
- (b) Montrer que la loi $*$ est associative sur $\mathbb{C}$.
- (c) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre e que l'on déterminera.
- (d) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Montrer que le nombre complexe $x + yi$ admet le nombre complexe $\frac{1}{x} - \frac{y}{x^4}i$ comme symétrique pour la loi $*$.
- (2) On considère le sous-ensemble E de $\mathbb{C}$ défini par : $E = \{x + yi / x \in \mathbb{R}_+^*; y \in \mathbb{R}\}$.
- (a) Montrer que E est stable pour la loi $*$ dans $\mathbb{C}$.
- (b) Montrer que $(E, *)$ est un groupe commutatif.
- (3) On considère le sous-ensemble G de E défini par : $G = \{1 + yi / y \in \mathbb{R}\}$. Montrer que G est un sous-groupe de $(E, *)$.
- (4) On considère l'ensemble $F = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \right\}$.
- (a) Montrer que F est stable pour la loi $\times$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (b) On considère l'application $\varphi : E \rightarrow F, x + yi \mapsto M(x^2, y)$. Montrer que φ est un isomorphisme de $(E, *)$ vers $(F, \times)$.
- (c) En déduire que $(F, \times)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE 40

Loi $*$ sur $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ • Groupe non commutatif • Sous-groupe matriciel

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif de zéro la matrice O et d'unité la matrice I . On munit l'ensemble $E = \{x + yi / x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\}$ par la loi de composition

interne $*$ définie par :

$$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{Z}^4; \quad (x + yi) * (x' + y'i) = (x + (-1)^y x') + (y + y')i.$$

Partie I

- (1) (a) Vérifier que : $(1 - i) * (3 + 2i) = -2 + i$.
 (b) Montrer que la loi $*$ n'est pas commutative dans E .
- (2) Montrer que la loi $*$ est associative dans E .
- (3) Montrer que 0 est l'élément neutre pour la loi $*$ dans E .
- (4) (a) Vérifier que : $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2; (x + yi) * ((-1)^{y+1}x - yi) = 0$.
 (b) Montrer que $(E, *)$ est un groupe non commutatif.

Partie II

Soient les deux ensembles $F = \{x + 2yi \mid x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\}$ et

$$G = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- (1) (a) Montrer que F est un sous-groupe de $(E, *)$.
 (b) Montrer que la loi $*$ est commutative dans F .
- (2) Soit φ l'application définie de F vers $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2; \varphi(x + 2yi) = M(x, y)$.
 (a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(F, *)$ vers $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.
 (b) Montrer que $\varphi(F) = G$.
 (c) En déduire que $(G, \times)$ est un groupe commutatif.

FIN DU POLYCOPIÉ VI

Prof. Saad Choukri

© 2026 — Tous droits réservés