تجميعة من أربعين مسألة للتحضير للبكالوريا

شعبة العلوم الرياضية

الحسابيات • البنيات الجبرية • الأعداد العقدية • التحليل

Analyse ▪ Nombres complexes ▪ Structures algébriques ▪ Arithmétique

Analysis ▪ Complex numbers ▪ Algebraic structures ▪ Arithmetic

النص بالعربية، متبوعا بترجمته إلى الفرنسية ثم إلى الإنجليزية

Énoncés en arabe, suivis de leur traduction française puis anglaise

سعد شكري
Saad Choukri

© 2026 Saad Choukri — Tous droits réservés

مقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم، والصلاة والسلام على خير خلقه.

هذا الكتيب عبارة عن تجميعة من أربعين مسألة في الرياضيات، موجهة إلى تلميذات وتلاميذ السنة الثانية من سلك البكالوريا، شعبة العلوم الرياضية، قصد التحضير الجيد للامتحان الوطني الموحد.

وقد جُمعت هذه المسائل ورُتّبت في صيغتها العربية الأصلية من طرف أنس عدلاني، فله منا جزيل الشكر والامتنان على هذا العمل القيّم الذي وضعه رهن إشارة المتعلمين.

وتتوزع المسائل على أربعة محاور كبرى، بواقع عشر مسائل لكل محور: التحليل، والأعداد العقدية، والبنيات الجبرية، والحسابيات. وقد حرصنا على أن يُعنون كل مسألة بعنوان يدل على موضوعها، تيسيرا على القارئ في اختيار ما يناسب حاجته.

والجديد في هذه النسخة أن نص كل مسألة يُقدَّم في ثلاث لغات على التوالي: النص الأصلي بالعربية، ثم ترجمته إلى اللغة الفرنسية، ثم ترجمته إلى اللغة الإنجليزية. والغاية من ذلك مزدوجة: تمكين التلميذ من التمرن على المصطلح الرياضي في اللغات الثلاث، ومساعدة من يتابع دراسته بالفرنسية أو بالإنجليزية على الاستفادة من هذا الرصيد.

ونوصي القارئ الكريم بأن يجتهد في حل المسألة بنفسه قبل الاطلاع على أي حل، فإن المران هو سبيل التمكن، وأن يقرأ نص المسألة في اللغات الثلاث ليتحقق من فهمه للمصطلحات.

والله ولي التوفيق.

سعد شكري

Table des matières — الفهرس

1 التحليل

Analyse ▪ Analysis **1**

1 دالة تكاملية ولوغاريتمية . . . 1
2 دالة ضمنية معرفة بمعادلة من الدرجة الثالثة . . . 3
3 دالة تكاملية ومبرهنة التزايدات المنتهية . . . 4
4 متتاليتان معرفتان بمعادلة، وتكاملات واليس . . . 6
5 الدالة الفلية الزائدية ومتتالية تكاملات . . . 9
6 نقطة صامدة ومتتالية تكرارية ودالة لوغاريتمية أسية . . . 11
7 دالة تكاملية مبنية على دالة الجيب . . . 14
8 دالة جذرية وتكاملات متتابعة . . . 16
9 دالة لوغاريتمية ومعدلها التكاملي . . . 18
10 حلول معادلات ومتتالية نيوتن . . . 21

2 الأعداد العقدية

Nombres complexes ▪ Complex numbers **25**

1 مجموع مثلثي وتكامل . . . 25
2 معادلة من الدرجة الثانية ودورانان . . . 26
3 دوران وتماثل محوري . . . 27
4 متتالية دورانات ومجموع أطوال . . . 28
5 معادلة ذات وسيط واستقامية . . . 29
6 جذور مكعبة ومثلث قائم متساوي الساقين . . . 30
7 تحاك ودوران ومحيط أقصى . . . 32
8 استقامية وتعامد بواسطة الدوران . . . 33
9 جذور الوحدة ومجموعة نقط . . . 35
10 مجموعة نقط ومثلث قائم في المبدأ . . . 37

3 البنيات الجبرية

Structures algébriques ▪ Algebraic structures **39**

1 جسم من المصفوفات وقوى مصفوفة . . . 39
2 زمرة على القرص الوحدة . . . 40
3 جسم من المصفوفات مشاكل لجسم الأعداد العقدية . . . 41
4 عناصر منعدمة القوى وحلقة مصفوفات . . . 43
5 زمر جزئية مولدة بعنصر . . . 44
6 زمرة على مجال بواسطة دالة الفل . . . 45
7 زمرة غير تبادلية وحلقة مصفوفات . . . 46
8 زمرة على مجال ومتتالية حلول . . . 48

9 جسم من المصفوفات وتشاكل ضربي 49
10 قانون تركيب لوغاريتمي 50

4 الحسابيات
Arithmétique ▪ Arithmetic **51**
1 ظل نسبي وقوى العدد اثنين 51
2 أعداد أولية من الشكل $4k+1$ ومسائل قابلية القسمة 52
3 موافقات وبواقي القسمة الإقليدية 54
4 أعداد أولية من الشكل $3k+1$ 55
5 قواسم مجموع قوى رابعة 57
6 متتالية تراجعية وأعداد أولية فيما بينها 58
7 العدد الأولي 2017 ومجموعتان 58
8 رقما الوحدات والعشرات لعدد كبير 59
9 نظمة موافقات ومبرهنة فيرما 60
10 مسألة قابلية القسمة $a^n+n \mid b^n+n$ 61

المحور 1

التحليل

Analyse ▪ Analysis

مسألة 01 دالة تكاملية ولوغاريتمية

النص الأصلي بالعربية

الجزء الأول

(1) بيّن أن: $\dfrac{x^2-x}{2\ln(x)} \leq \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \leq \frac{x^2-x}{\ln(x)}$ ، $(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[)$.

(2) نعتبر الدالة φ المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ كما يلي: $\varphi(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x)}$ لكل x من $]0,1[\cup]1,+\infty[$، و $\varphi(0) = 0$ و $\varphi(1) = 1$.

(a) بيّن أن $x\ln(x) - x + 1 > 0$ $(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[)$، ثم استنتج رتابة الدالة φ على المجال $[0,+\infty[$.

(b) باستعمال رتابة الدالة φ، بيّن أن: $x-1 \leq \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\varphi(t)}{\ln(t)}\,dt \leq \frac{x^2-1}{2}$ ، $(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[)$.

الجزء الثاني

• نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ كما يلي: $f(x) = -\ln(x+1) + \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ لكل x من $]0,1[\cup]1,+\infty[$، و $f(0) = f(1) = 0$.

(1) بيّن أن الدالة f متصلة و قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر.

(2) ادرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f.

(3) تحقق من أن: $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\varphi(t)}{\ln(t)}\,dt = f(x) + \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$ ، $(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[)$، ثم استنتج أن الدالة f متصلة و قابلة للاشتقاق في النقطة ذات الأفصول $x_0 = 1$.

(4) بيّن أنه يوجد α من المجال $]0,1[$ بحيث $f'(\alpha) = 0$. (يمكنك استعمال مبرهنة رول)

(5) استنتج رتابة الدالة f على المجال $[0,+\infty[$.

(6) نعتبر الدالة ψ المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ كما يلي: $\psi(x)=(x+1)\exp\left(-\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln(t)}\right)$، و $\psi(0)=\psi(1)=1$.

(a) تحقق من أن $(\forall x\in[0,+\infty[)\,,\ \psi(x)=\exp(-f(x))$.

(b) ضع جدول تغيرات الدالة ψ على المجال $[0,+\infty[$.

(c) أنشئ المنحنى الممثل للدالة ψ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (نأخذ $\alpha\simeq 0{,}3$ و $\psi(\alpha)\simeq 1{,}2$). نقبل أن المنحنى الممثل للدالة ψ يقبل نقطة انعطاف أفصولها β بحيث $\beta\in\left]\frac{3}{2},2\right[$.

(7) بيّن أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ (\exists!\,\gamma_n>0)\,,\ \dfrac{\psi(\gamma_n)}{\gamma_n}=\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{\psi(\alpha)}{\alpha}$، ثم بيّن أن المتتالية $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ متقاربة محددا نهايتها.

Traduction française

Première partie

(1) Montrer que : $(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[)\,,\ \dfrac{x^2-x}{2\ln(x)}\leq\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln(t)}\leq\frac{x^2-x}{\ln(x)}$.

(2) On considère la fonction φ définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi(x)=\dfrac{x-1}{\ln(x)}$ pour $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $\varphi(0)=0$ et $\varphi(1)=1$.

(a) Montrer que $(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[)\,,\ x\ln(x)-x+1>0$, puis en déduire la monotonie de φ sur $[0,+\infty[$.

(b) En utilisant la monotonie de φ, montrer que : $(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[)\,,\ x-1\leq\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\varphi(t)}{\ln(t)}\,dt\leq\frac{x^2-1}{2}$.

Deuxième partie

• On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=-\ln(x+1)+\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln(t)}$ pour $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$, et $f(0)=f(1)=0$.

(1) Montrer que f est continue et dérivable à droite en 0.

(2) Étudier les branches infinies de la courbe de f.

(3) Vérifier que $(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[)\,,\ \displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\varphi(t)}{\ln(t)}\,dt=f(x)+\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$, puis en déduire que f est continue et dérivable au point d'abscisse $x_0=1$.

(4) Montrer qu'il existe $\alpha\in]0,1[$ tel que $f'(\alpha)=0$. (On pourra utiliser le théorème de Rolle.)

(5) En déduire la monotonie de f sur $[0,+\infty[$.

(6) On considère la fonction ψ définie sur $[0,+\infty[$ par $\psi(x)=(x+1)\exp\left(-\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln(t)}\right)$, et $\psi(0)=\psi(1)=1$.

(a) Vérifier que $(\forall x\in[0,+\infty[)\,,\ \psi(x)=\exp(-f(x))$.

(b) Dresser le tableau de variations de ψ sur $[0,+\infty[$.

(c) Construire la courbe représentative de ψ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (on prendra

© Saad Choukri

$\alpha \simeq 0{,}3$ et $\psi(\alpha) \simeq 1{,}2$). On admet que cette courbe admet un point d'inflexion d'abscisse β avec $\beta \in \left]\frac{3}{2}, 2\right[$.

(7) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\exists!\, \gamma_n > 0)\,,\ \dfrac{\psi(\gamma_n)}{\gamma_n} = \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{\psi(\alpha)}{\alpha}$, puis montrer que la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ converge et déterminer sa limite.

English translation

Part One

(1) Show that $(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[)\,,\ \dfrac{x^2-x}{2\ln(x)} \leq \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \leq \frac{x^2-x}{\ln(x)}$.

(2) Let φ be the function defined on $[0,+\infty[$ by $\varphi(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x)}$ for $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $\varphi(0) = 0$ and $\varphi(1) = 1$.

(a) Show that $(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[)\,,\ x\ln(x) - x + 1 > 0$, and deduce the monotonicity of φ on $[0,+\infty[$.

(b) Using this monotonicity, show that $(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[)\,,\ x - 1 \leq \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\varphi(t)}{\ln(t)}\,dt \leq \frac{x^2-1}{2}$.

Part Two

• Let f be the function defined on $[0,+\infty[$ by $f(x) = -\ln(x+1) + \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ for $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, and $f(0) = f(1) = 0$.

(1) Show that f is continuous and right-differentiable at 0.

(2) Study the infinite branches of the curve of f.

(3) Check that $(\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[)\,,\ \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\varphi(t)}{\ln(t)}\,dt = f(x) + \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$, and deduce that f is continuous and differentiable at the point of abscissa $x_0 = 1$.

(4) Show that there exists $\alpha \in]0,1[$ such that $f'(\alpha) = 0$. (Rolle's theorem may be used.)

(5) Deduce the monotonicity of f on $[0,+\infty[$.

(6) Let ψ be defined on $[0,+\infty[$ by $\psi(x) = (x+1)\exp\left(-\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}\right)$, with $\psi(0) = \psi(1) = 1$.

(a) Check that $(\forall x \in [0,+\infty[)\,,\ \psi(x) = \exp(-f(x))$.

(b) Draw up the table of variations of ψ on $[0,+\infty[$.

(c) Sketch the curve of ψ in an orthonormal frame $(O,\vec{i},\vec{j})$ (take $\alpha \simeq 0.3$ and $\psi(\alpha) \simeq 1.2$). It is admitted that this curve has an inflection point of abscissa β with $\beta \in \left]\frac{3}{2}, 2\right[$.

(7) Show that $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\exists!\, \gamma_n > 0)\,,\ \dfrac{\psi(\gamma_n)}{\gamma_n} = \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{\psi(\alpha)}{\alpha}$, then show that the sequence $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ converges and determine its limit.

© Saad Choukri

مسألة 02 دالة ضمنية معرفة بمعادلة من الدرجة الثالثة

النص الأصلي بالعربية

• ليكن x عنصرا من المجال $[0,+\infty[$، نعتبر المعادلة $(F_x)\ :\ t^3+xt+1=0$.

(1) بيّن أن المعادلة (F_x) تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$، و الذي نرمز له بـ $f(x)$.

(2) بيّن أن الدالة f سالبة قطعا و محدودة على $[0,+\infty[$.

(3) استنتج أن الدالة f متصلة على المجال $]0,+\infty[$.

(4) بيّن أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$، ثم بيّن أنه: $(\forall x>0)\,,\ f'(x)+\dfrac{f(x)}{x+3f^2(x)}=0$.

(5) استنتج منحى تغيرات الدالة f، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(6) هل الدالة f متصلة على اليمين في الصفر؟

Traduction française

• Soit x un élément de $[0,+\infty[$. On considère l'équation $(F_x)\ :\ t^3+xt+1=0$.

(1) Montrer que (F_x) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, que l'on note $f(x)$.

(2) Montrer que f est strictement négative et bornée sur $[0,+\infty[$.

(3) En déduire que f est continue sur $]0,+\infty[$.

(4) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$, puis que $(\forall x>0)\,,\ f'(x)+\dfrac{f(x)}{x+3f^2(x)}=0$.

(5) En déduire le sens de variation de f, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(6) La fonction f est-elle continue à droite en 0 ?

English translation

• Let x belong to $[0,+\infty[$. Consider the equation $(F_x)\ :\ t^3+xt+1=0$.

(1) Show that (F_x) has a unique solution in $\mathbb{R}$, denoted by $f(x)$.

(2) Show that f is strictly negative and bounded on $[0,+\infty[$.

(3) Deduce that f is continuous on $]0,+\infty[$.

(4) Show that f is differentiable on $]0,+\infty[$, and that $(\forall x>0)\,,\ f'(x)+\dfrac{f(x)}{x+3f^2(x)}=0$.

(5) Deduce the variations of f, then compute $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(6) Is f right-continuous at 0?

مسألة 03 دالة تكاملية و مبرهنة التزايدات المنتهية

النص الأصلي بالعربية

© Saad Choukri

• على المجال $[1,+\infty[$ نعرف الدالتين: $f(t)=\dfrac{t-1}{\ln(t)}$ لكل $t>1$ و $f(1)=1$، و $F(x)=\displaystyle\int_{x^2}^{x}\frac{f(t)}{\ln(t)}\,dt$ لكل $x>1$ و $F(1)=-\ln(2)$.

(1) بيّن أن الدالة f متصلة على المجال $[1,+\infty[$.

(2) (a) باستعمال مكاملة بالأجزاء، برهن أنه: $(\forall x\in]1,+\infty[)\,,\ F(x)-F(1)=\dfrac{x(x-1)(x+2)}{2}\cdot f(x)+\displaystyle\int_{x^2}^{x}\left(2+\frac{1}{t}\right)f(t)\,dt$.

(b) استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في 1.

(3) (a) أثبت أنه: $(\forall x\in]1,+\infty[)\,(\exists c_x\in[x,x^2])\,,\ F(x)=(x-x^2)\cdot\dfrac{c_x-1}{\ln^2(c_x)}$، ثم استنتج أنه: $\left(\forall x\in\left[\sqrt{2},+\infty\right[\right)\,,\ \dfrac{F(x)}{x}+\left(\dfrac{f(x)}{2}\right)^2\leq 0$.

(b) استنتج حساب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$، ثم أوّل النتيجة المحصل عليها هندسيا.

(4) احسب $F'(x)$ لكل x من المجال $]1,+\infty[$، ثم حدد منحى تغيرات الدالة F.

(5) (a) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية مرتين، بيّن أنه: $(\forall x\in]1,+\infty[)\,(\exists(c,d)\in]1,x[^2)\,(c>d),\ \dfrac{F(x)+\ln(2)}{x-1}=-\left(\dfrac{c+2}{2}\right)\cdot d^2$.

(b) ادرس قابلية اشتقاق الدالة F في النقطة ذات الأفصول $x_0=1$، ثم أوّل النتيجة هندسيا.

(6) أنشئ بعناية المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Traduction française

• Sur $[1,+\infty[$ on définit $f(t)=\dfrac{t-1}{\ln(t)}$ pour $t>1$, $f(1)=1$, et $F(x)=\displaystyle\int_{x^2}^{x}\frac{f(t)}{\ln(t)}\,dt$ pour $x>1$, $F(1)=-\ln(2)$.

(1) Montrer que f est continue sur $[1,+\infty[$.

(2)(a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $(\forall x\in]1,+\infty[)\,,\ F(x)-F(1)=\dfrac{x(x-1)(x+2)}{2}\cdot f(x)+\displaystyle\int_{x^2}^{x}\left(2+\frac{1}{t}\right)f(t)\,dt$.

(b) En déduire que F est continue à droite en 1.

(3)(a) Établir que $(\forall x\in]1,+\infty[)\,(\exists c_x\in[x,x^2])\,,\ F(x)=(x-x^2)\cdot\dfrac{c_x-1}{\ln^2(c_x)}$, puis en déduire que $\left(\forall x\in\left[\sqrt{2},+\infty\right[\right)\,,\ \dfrac{F(x)}{x}+\left(\dfrac{f(x)}{2}\right)^2\leq 0$.

(b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

(4) Calculer $F'(x)$ pour $x\in]1,+\infty[$, puis déterminer le sens de variation de F.

(5)(a) En appliquant deux fois le théorème des accroissements finis, montrer que $(\forall x\in]1,+\infty[)\,(\exists(c,d)\in]1,x[^2)\,(c>d),\ \dfrac{F(x)+\ln(2)}{x-1}=-\left(\dfrac{c+2}{2}\right)\cdot d^2$.

(b) Étudier la dérivabilité de F au point d'abscisse $x_0=1$, puis interpréter géométriquement.

(6) Construire soigneusement la courbe de F dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

English translation

© Saad Choukri

• On $[1,+\infty[$ define $f(t)=\dfrac{t-1}{\ln(t)}$ for $t>1$, $f(1)=1$, and $F(x)=\displaystyle\int_{x^2}^{x}\frac{f(t)}{\ln(t)}\,dt$ for $x>1$, $F(1)=-\ln(2)$.

(1) Show that f is continuous on $[1,+\infty[$.

(2)(a) Using integration by parts, prove that $(\forall x\in]1,+\infty[)\,,\ F(x)-F(1)=\dfrac{x(x-1)(x+2)}{2}\cdot f(x)+\displaystyle\int_{x^2}^{x}\left(2+\frac{1}{t}\right)f(t)\,dt$.

(b) Deduce that F is right-continuous at 1.

(3)(a) Prove that $(\forall x\in]1,+\infty[)\,(\exists c_x\in[x,x^2])\,,\ F(x)=(x-x^2)\cdot\dfrac{c_x-1}{\ln^2(c_x)}$, and deduce that $\left(\forall x\in\left[\sqrt{2},+\infty\right[\right),\ \dfrac{F(x)}{x}+\left(\dfrac{f(x)}{2}\right)^2\le 0$.

(b) Deduce $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ and $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$, then interpret the result geometrically.

(4) Compute $F'(x)$ for $x\in]1,+\infty[$, then determine the variations of F.

(5)(a) Applying the mean value theorem twice, show that $(\forall x\in]1,+\infty[)\,(\exists(c,d)\in]1,x[^2)\,(c>d),\ \dfrac{F(x)+\ln(2)}{x-1}=-\left(\dfrac{c+2}{2}\right)\cdot d^2$.

(b) Study the differentiability of F at the point of abscissa $x_0=1$, then interpret geometrically.

(6) Carefully sketch the curve of F in an orthonormal frame $(O,\vec{i},\vec{j})$.

مسألة 04 متتاليتان معرفتان بمعادلة، وتكاملات واليس

النص الأصلي بالعربية

الجزء الأول

• ليكن n من $\mathbb{N}^*$ و الدالة ψ_n المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي: $\psi_n(x)=-n(x-2)+\ln(x)$.

(1) (a) حدد $\lim\limits_{x\to0^+}\psi_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\psi_n(x)$.

(b) بيّن أنه لكل $x\in\mathbb{R}_+^*$ لدينا $\psi_n'(x)=\dfrac{-nx+1}{x}$، ثم ضع جدول تغيرات الدالة ψ_n على $\mathbb{R}_+^*$.

(c) بيّن أن $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\,,\ 2x-1>\ln(x)$.

(2) بيّن أنه لكل $n\in\mathbb{N}^*$، المعادلة $\psi_n(x)=0$ تقبل بالضبط حلين اثنين هما α_n و β_n بحيث $0<\alpha_n<\dfrac{1}{n}$ و $\beta_n>2$.

(3) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$، ثم بيّن أنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\alpha_n}=\dfrac{1}{e^2}$.

(4) بيّن أن المتتالية $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة، ثم احسب النهايتين $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}n(\beta_n-2)$.

© Saad Choukri

الجزء الثاني

• لتكن المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta)\,d\theta$.

(1) احسب كلا من I_1 و I_2.

(2) بيّن أن المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

(3) (a) تحقق من أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \sin^n(\theta)\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta)\,d\theta$.

(b) استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ I_n \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} + \dfrac{\pi}{2}\cdot\left[\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right]^n$.

(c) أثبت أن $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos(x))}{x^3} = -\infty$ ، ثم حدد نهاية المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(4) (a) بيّن أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا:

- $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\cdot I_n$؛
- $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$؛
- $1 \leq \dfrac{I_n}{I_{n+1}} \leq \dfrac{n+2}{n+1}$.

(b) استنتج أن $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Traduction française

Première partie

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et ψ_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\psi_n(x) = -n(x-2) + \ln(x)$.

(1)(a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \psi_n(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \psi_n(x)$.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi_n'(x) = \dfrac{-nx+1}{x}$, puis dresser le tableau de variations de ψ_n sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right)\,,\ 2x - 1 > \ln(x)$.

(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\psi_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions α_n et β_n telles que $0 < \alpha_n < \dfrac{1}{n}$ et $\beta_n > 2$.

(3) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha_n$, puis montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = \frac{1}{e^2}$.

(4) Montrer que $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, puis calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \beta_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n(\beta_n - 2)$.

Deuxième partie

- Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta)\,d\theta$.

(1) Calculer I_1 et I_2.

© Saad Choukri

(2) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(3)(a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \sin^n(\theta)\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta)\,d\theta.$

(b) En déduire que $I_n \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} + \dfrac{\pi}{2}\cdot\left[\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right]^n.$

(c) Établir que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos(x))}{x^3} = -\infty$, puis déterminer la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(4)(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\cdot I_n\,;$
- $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}\,;$
- $1 \leq \dfrac{I_n}{I_{n+1}} \leq \dfrac{n+2}{n+1}.$

(b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

English translation

Part One

- Let $n \in \mathbb{N}^*$ and ψ_n be defined on $\mathbb{R}_+^*$ by $\psi_n(x) = -n(x-2) + \ln(x)$.

(1)(a) Determine $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \psi_n(x)$ and $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \psi_n(x)$.

(b) Show that for every $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi_n'(x) = \dfrac{-nx+1}{x}$, then draw up the table of variations of ψ_n on $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Show that $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right)\,,\ 2x - 1 > \ln(x)$.

(2) Show that for every $n \in \mathbb{N}^*$ the equation $\psi_n(x) = 0$ has exactly two solutions α_n and β_n with $0 < \alpha_n < \dfrac{1}{n}$ and $\beta_n > 2$.

(3) Compute $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha_n$, then show that $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = \frac{1}{e^2}$.

(4) Show that $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converges, then compute $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \beta_n$ and $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n(\beta_n - 2)$.

Part Two

- Let $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be defined by $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta)\,d\theta$.

(1) Compute I_1 and I_2.

(2) Show that $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges.

(3)(a) Check that $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \sin^n(\theta)\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta)\,d\theta$ for every $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Deduce that $I_n \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} + \dfrac{\pi}{2}\cdot\left[\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right]^n.$

(c) Prove that $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos(x))}{x^3} = -\infty$, then determine the limit of $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(4)(a) Show that for every $n \in \mathbb{N}^*$:

© Saad Choukri

- $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} \cdot I_n$;
- $(n+1) I_{n+1} I_n = \dfrac{\pi}{2}$;
- $1 \leq \dfrac{I_n}{I_{n+1}} \leq \dfrac{n+2}{n+1}$.

(b) Deduce that $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, I_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

مسألة 05 الدالة الضلية الزائدية و متتالية تكاملات

النص الأصلي بالعربية

الجزء الأول

- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

(1) بيّن أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $]-1,1[$، محددا تقابلها العكسي f^{-1}.

(2) أنشئ (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$، حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\,\text{cm}$.

(3) ليكن $\lambda \in]0,1[$ و لتكن σ_λ مساحة الحيّز (Δ_λ) المحصور بين (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ و المستقيمين $x = 0$ و $x = \lambda$.
بيّن أن تعبير σ_λ يكتب على الشكل التالي: $\left(\text{cm}^2\right)$ $\lambda^2 - 2\ln\left(\dfrac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}\right)$.

الجزء الثاني

- لكل $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$ نضع: $F_0(x) = x$ و $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x (f(u))^n\, du$.

(1) احسب $F_1(x)$ بدلالة x.

(2) بيّن أن $0 \leq F_n(x) \leq x\,(f(x))^n$، ثم استنتج قيمة النهاية $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x)$.

(3) (a) تحقق من أن $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ f'(x) = 1 - (f(x))^2$.

(b) استنتج أن $(\forall k \in \mathbb{N})\,,\ F_{k+2}(x) = F_k(x) - \dfrac{1}{k+1}(f(x))^{k+1}$، و أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ F_{2n}(x) = x - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}(f(x))^{2k-1}$.

(4) باستعمال ما سبق، احسب النهاية التالية: $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1) \times 3^{2k-1}}$.

Traduction française

© Saad Choukri

Première partie

- Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

(1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$, en précisant f^{-1}.

(2) Construire (C_f) et $\left(C_{f^{-1}}\right)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\,\text{cm}$.

(3) Soit $\lambda \in]0,1[$ et σ_λ l'aire du domaine (Δ_λ) compris entre (C_f), $\left(C_{f^{-1}}\right)$ et les droites $x = 0$ et $x = \lambda$. Montrer que $\sigma_\lambda = \lambda^2 - 2\ln\left(\dfrac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}\right)$ (cm^2).

Deuxième partie

- Pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$ on pose $F_0(x) = x$ et $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x (f(u))^n\,du$.

(1) Calculer $F_1(x)$ en fonction de x.

(2) Montrer que $0 \le F_n(x) \le x\,(f(x))^n$, puis en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_n(x)$.

(3)(a) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ f'(x) = 1 - (f(x))^2$.

(b) En déduire que $(\forall k \in \mathbb{N})\,,\ F_{k+2}(x) = F_k(x) - \dfrac{1}{k+1}\,(f(x))^{k+1}$, et que $F_{2n}(x) = x - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}\,(f(x))^{2k-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(4) En utilisant ce qui précède, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\times 3^{2k-1}}$.

English translation

Part One

- Let f be defined on $\mathbb{R}$ by $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

(1) Show that f is a bijection from $\mathbb{R}$ onto $]-1,1[$, determining f^{-1}.

(2) Draw (C_f) and $\left(C_{f^{-1}}\right)$ in an orthonormal frame $(O,\vec{i},\vec{j})$ with $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\,\text{cm}$.

(3) Let $\lambda \in]0,1[$ and let σ_λ be the area of the region (Δ_λ) bounded by (C_f), $\left(C_{f^{-1}}\right)$ and the lines $x = 0$ and $x = \lambda$. Show that $\sigma_\lambda = \lambda^2 - 2\ln\left(\dfrac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}\right)$ (cm^2).

Part Two

- For every $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$ set $F_0(x) = x$ and $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x (f(u))^n\,du$.

(1) Compute $F_1(x)$ in terms of x.

(2) Show that $0 \le F_n(x) \le x\,(f(x))^n$, then deduce $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_n(x)$.

(3)(a) Check that $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ f'(x) = 1 - (f(x))^2$.

(b) Deduce that $(\forall k \in \mathbb{N})\,,\ F_{k+2}(x) = F_k(x) - \dfrac{1}{k+1}\,(f(x))^{k+1}$, and that $F_{2n}(x) = x -$

© Saad Choukri

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} (f(x))^{2k-1}$ for every $n \in \mathbb{N}^*$.

(4) Using the above, compute $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1) \times 3^{2k-1}}$.

مسألة 06 نقطة صامدة ومتتالية تكرارية ودالة لوغاريتمية أسية

النص الأصلي بالعربية

الجزء الأول

(1) بيّن أنه يوجد α وحيد في المجال $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ بحيث $\ln(\alpha) + \alpha = 0$، ثم ضع جدول إشارة $\ln(x) + x$ لكل $x > 0$.

(2) نضع $\varphi(x) = e^{1/x}$ لكل $x > 0$.

(a) تحقق من أن $\varphi(x) = x \iff \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ لكل $x > 0$.

(b) بيّن أن $(\forall x \in [\frac{3}{2}, 3])\ ,\ |\varphi'(x)| \leq \frac{4}{9} e^{2/3}$.

(3) نعتبر المتتالية $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $\Gamma_0 = 2$ و $\Gamma_{n+1} = \varphi(\Gamma_n)$.

(a) بيّن أن $(\forall n \in \mathbb{N})\ ,\ \Gamma_n \in [\frac{3}{2}, 3]$.

(b) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية، بيّن أن المتتالية $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها.

(c) بيّن أن المتتالية $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي $\gamma_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j$ متقاربة محددا نهايتها.

الجزء الثاني

• نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي: $f(0) = 0$ و $f(x) = \ln(x) \cdot e^{-1/x}$ لكل $x > 0$. ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f).

(2) بيّن أن f متصلة على $[0, +\infty[$.

(3) بيّن أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و أن $f'_d(0) = 0$، ثم أوّل النتيجة هندسيا.

(4) بيّن أن $(\forall x > 0)\ ,\ f'(x) = \frac{x + \ln(x)}{x^2} \cdot e^{-1/x}$، ثم ضع جدول تغيرات الدالة f.

(5) اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة $A(1,0)$. (نقبل أن النقطة $A(1,0)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).)

(6) أنشئ المنحنى (C_f). (نأخذ $f(\alpha) \simeq -0{,}1$.)

© Saad Choukri

الجزء الثالث

• نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي: $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$.

(1) بيّن أن $(\forall u \in \mathbb{R})\,,\ e^{-u} \geq 1-u$، و استنتج أن $(\forall t \geq 1)\,,\ f(t) \geq \ln(t) - \dfrac{\ln(t)}{t}$.

(2) استنتج أن $(\forall x \geq 1)\,,\ F(x) \geq x\ln(x) - x - \dfrac{\ln^2(x)}{2}$.

(3) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x} = +\infty$.

(4) أوّل هندسيا النتيجة المحصلة عليها في السؤال 3.

(5) بيّن أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ثم احسب مشتقتها الأولى.

(6) ليكن $n \in \mathbb{N}$.

(a) بيّن أن المعادلة $F(x) = n$ تقبل حلا وحيدا $\beta_n > 1$.

(b) بيّن أن المتتالية $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية و أنها غير مكبورة، ثم استنتج نهايتها.

(c) بيّن أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\beta_n}{\sqrt[3]{n}} = +\infty$.

Traduction française

Première partie

(1) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$ tel que $\ln(\alpha) + \alpha = 0$, puis dresser le tableau de signe de $\ln(x) + x$ pour $x > 0$.

(2) On pose $\varphi(x) = e^{1/x}$ pour $x > 0$.

(a) Vérifier que $\varphi(x) = x \iff \dfrac{1}{x} + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

(b) Montrer que $\left(\forall x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]\right)\,,\ |\varphi'(x)| \leq \dfrac{4}{9}e^{2/3}$.

(3) On considère la suite $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\Gamma_0 = 2$ et $\Gamma_{n+1} = \varphi(\Gamma_n)$.

(a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ \Gamma_n \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$.

(b) À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que (Γ_n) converge et déterminer sa limite.

(c) Montrer que la suite (γ_n) définie par $\gamma_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \Gamma_j$ converge et déterminer sa limite.

Deuxième partie

• Soit f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \ln(x) \cdot e^{-1/x}$ pour $x > 0$, et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) Étudier les branches infinies de (C_f).

(2) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

© Saad Choukri

(3) Montrer que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 0$, puis interpréter géométriquement.

(4) Montrer que $(\forall x > 0)\,,\ f'(x) = \dfrac{x + \ln(x)}{x^2} \cdot e^{-1/x}$, puis dresser le tableau de variations de f.

(5) Écrire l'équation de la tangente (T) au point $A(1,0)$. (On admet que $A(1,0)$ est un point d'inflexion de (C_f).)

(6) Construire (C_f) (on prendra $f(\alpha) \simeq -0{,}1$).

Troisième partie

- Soit F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$.

(1) Montrer que $(\forall u \in \mathbb{R})\,,\ e^{-u} \geq 1 - u$, et en déduire que $(\forall t \geq 1)\,,\ f(t) \geq \ln(t) - \dfrac{\ln(t)}{t}$.

(2) En déduire que $(\forall x \geq 1)\,,\ F(x) \geq x\ln(x) - x - \dfrac{\ln^2(x)}{2}$.

(3) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$.

(4) Interpréter géométriquement le résultat de la question 3.

(5) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ puis calculer sa dérivée première.

(6) Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que l'équation $F(x) = n$ admet une unique solution $\beta_n > 1$.

(b) Montrer que (β_n) est croissante et non majorée, puis en déduire sa limite.

(c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\beta_n}{\sqrt[3]{n}} = +\infty$.

English translation

Part One

(1) Show that there is a unique $\alpha \in \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$ with $\ln(\alpha) + \alpha = 0$, then give the sign table of $\ln(x) + x$ for $x > 0$.

(2) Set $\varphi(x) = e^{1/x}$ for $x > 0$.

(a) Check that $\varphi(x) = x \iff \dfrac{1}{x} + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

(b) Show that $\left(\forall x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]\right)\,,\ |\varphi'(x)| \leq \dfrac{4}{9}e^{2/3}$.

(3) Consider the sequence defined by $\Gamma_0 = 2$ and $\Gamma_{n+1} = \varphi(\Gamma_n)$.

(a) Show that $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ \Gamma_n \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$.

(b) Using the mean value theorem, show that (Γ_n) converges and find its limit.

(c) Show that $\gamma_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \Gamma_j$ converges and find its limit.

Part Two

- Let f be defined on $[0, +\infty[$ by $f(0) = 0$ and $f(x) = \ln(x) \cdot e^{-1/x}$ for $x > 0$, with curve (C_f) in an orthonormal frame $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

© Saad Choukri

(1) Study the infinite branches of (C_f).

(2) Show that f is continuous on $[0, +\infty[$.

(3) Show that f is right-differentiable at 0 with $f'_d(0) = 0$, then interpret geometrically.

(4) Show that $(\forall x > 0)\,,\ f'(x) = \dfrac{x + \ln(x)}{x^2} \cdot e^{-1/x}$, then draw up the table of variations of f.

(5) Write the equation of the tangent (T) at $A(1, 0)$. (It is admitted that $A(1, 0)$ is an inflection point of (C_f).)

(6) Sketch (C_f) (take $f(\alpha) \simeq -0.1$).

Part Three

- Let F be defined on $\mathbb{R}_+^*$ by $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$.

(1) Show that $(\forall u \in \mathbb{R})\,,\ e^{-u} \geq 1 - u$, and deduce that $(\forall t \geq 1)\,,\ f(t) \geq \ln(t) - \dfrac{\ln(t)}{t}$.

(2) Deduce that $(\forall x \geq 1)\,,\ F(x) \geq x\ln(x) - x - \dfrac{\ln^2(x)}{2}$.

(3) Show that $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{x} = +\infty$.

(4) Interpret geometrically the result of question 3.

(5) Show that F is differentiable on $\mathbb{R}_+^*$ and compute its first derivative.

(6) Let $n \in \mathbb{N}$.

(a) Show that the equation $F(x) = n$ has a unique solution $\beta_n > 1$.

(b) Show that (β_n) is increasing and unbounded, then deduce its limit.

(c) Show that $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\beta_n}{\sqrt[3]{n}} = +\infty$.

مسألة 07 دالة تكاملية مبنية على دالة الجيب

النص الأصلي بالعربية

- نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{1 + u^2(t)}$ و $F(0) = 0$، حيث $u(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

(1) بيّن أن الدالة F فردية.

(2) (a) بيّن أن $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\,,\ 0 \leq F(x) \leq x$.

(b) استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في الصفر.

(3) (a) بيّن أن $(\forall x \in]0, +\infty[)\ (\exists c_x \in [x, 2x])\,,\ \dfrac{F(x)}{x} = \dfrac{1}{1 + u^2(c_x)}$.

(b) استنتج أن الدالة F قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر محددا $F'_d(0)$.

(4) (a) بيّن أن F قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و أن $(\forall x \in]0, +\infty[)\,,\quad F'(x) = \dfrac{1 + u^2(x)\left(1 + \sin^2(x)\right)}{\left(1 + u^2(x)\right)\left(1 + u^2(x)\cos^2(x)\right)}$.

© Saad Choukri

(b) استنتج رتابة الدالة F على المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$، ثم ضع جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

(5) (a) أثبت أن لكل t من المجال $]0,+\infty[$ لدينا: $\frac{t^2}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+u^2(t)} \leq 1$ و $\frac{1}{t^2} \leq 1-\frac{1}{1+u^2(t)}$.

(b) استنتج أنه لكل x من $]0,+\infty[$ لدينا: $x+\arctan(x)-\arctan(2x) \leq F(x) \leq x$ و $0 \leq x-F(x) \leq \frac{1}{2x}$.

(c) احسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} (F(x)-x)$.

(6) ارسم المنحنى (C_F) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Traduction française

- On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{1+u^2(t)}$ et $F(0)=0$, où $u(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

(1) Montrer que F est impaire.

(2)(a) Montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right),\ 0 \leq F(x) \leq x$.

(b) En déduire que F est continue à droite en 0.

(3)(a) Montrer que $(\forall x \in]0,+\infty[)\,(\exists c_x \in [x,2x])\,,\ \dfrac{F(x)}{x} = \dfrac{1}{1+u^2(c_x)}$.

(b) En déduire que F est dérivable à droite en 0 en précisant $F'_d(0)$.

(4)(a) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $F'(x) = \dfrac{1+u^2(x)\left(1+\sin^2(x)\right)}{\left(1+u^2(x)\right)\left(1+u^2(x)\cos^2(x)\right)}$.

(b) En déduire la monotonie de F sur $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$, puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.

(5)(a) Établir que pour tout $t \in]0,+\infty[$: $\dfrac{t^2}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+u^2(t)} \leq 1$ et $1-\dfrac{1}{1+u^2(t)} \leq \dfrac{1}{t^2}$.

(b) En déduire que pour tout $x \in]0,+\infty[$: $x+\arctan(x)-\arctan(2x) \leq F(x) \leq x$ et $0 \leq x-F(x) \leq \dfrac{1}{2x}$.

(c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (F(x)-x)$.

(6) Tracer (C_F) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

English translation

- Let F be defined on $\mathbb{R}$ by $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{1+u^2(t)}$ and $F(0)=0$, where $u(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

(1) Show that F is odd.

(2)(a) Show that $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right),\ 0 \leq F(x) \leq x$.

(b) Deduce that F is right-continuous at 0.

(3)(a) Show that $(\forall x \in]0,+\infty[)\,(\exists c_x \in [x,2x])\,,\ \dfrac{F(x)}{x} = \dfrac{1}{1+u^2(c_x)}$.

(b) Deduce that F is right-differentiable at 0, giving $F'_d(0)$.

(4)(a) Show that F is differentiable on $]0,+\infty[$ and that $F'(x) = \dfrac{1+u^2(x)\left(1+\sin^2(x)\right)}{\left(1+u^2(x)\right)\left(1+u^2(x)\cos^2(x)\right)}$.

(b) Deduce the monotonicity of F on $]0,+\infty[$ and $]-\infty,0[$, then draw up its table of variations on $\mathbb{R}$.

(5)(a) Prove that for every $t \in]0,+\infty[$: $\dfrac{t^2}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+u^2(t)} \leq 1$ and $1-\dfrac{1}{1+u^2(t)} \leq \dfrac{1}{t^2}$.

© Saad Choukri

(b) Deduce that for every $x \in]0,+\infty[$: $x + \arctan(x) - \arctan(2x) \leq F(x) \leq x$ and $0 \leq x - F(x) \leq \dfrac{1}{2x}$.

(c) Compute $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ and $\lim\limits_{x\to+\infty} (F(x) - x)$.

(6) Sketch (C_F) in an orthonormal frame $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

مسألة 08 دالة جذرية وتكاملات متتابعة

النص الأصلي بالعربية

الجزء الأول

• لتكن v الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ بما يلي: $v(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{e^x}}$.

(1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)$ ، ثم أوّل النتيجة المحصل عليها هندسيا.

(2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة v على اليمين في النقطة ذات الأفصول $x_0 = -2$، ثم أوّل النتيجة المحصل عليها هندسيا.

(3) لكل عنصر x من المجال $]-2,+\infty[$، أثبت أن $v'(x) = -\dfrac{(x+1)e^{-x}}{2v(x)}$، ثم ضع جدول تغيرات الدالة v.

(4) ارسم المنحنى (C_v) في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

الجزء الثاني

• نعتبر الدالة V المعرفة على المجال $\left]\frac{1}{e^2},+\infty\right[$ بما يلي: $V(x) = \displaystyle\int_0^{\ln(x)} v(t)\,dt$، و لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي: $u_n = \dfrac{2^n \cdot (n!)}{(2n+1)!} \displaystyle\int_{-2}^{-1} v(t) \cdot (t+2)^n\,dt$.

(1) بيّن أن $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{e}{2n+1}$، ثم استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها.

(2) لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k \cdot (k!)}{(2k+1)!}$.

(a) باستعمال مكاملة بالأجزاء، بيّن أنه $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} - u_n = -2\sqrt{e} \cdot \dfrac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(2n+3)!}$.

(b) استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ S_n = \dfrac{u_0 - u_n}{2\sqrt{e}}$.

(c) بيّن أن $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{V\left(\frac{1}{e}\right) - V\left(\frac{1}{e^2}\right)}{2\sqrt{e}}$.

Traduction française

© Saad Choukri

Première partie

- Soit v définie sur $[-2,+\infty[$ par $v(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{e^x}}$.

(1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)$, puis interpréter géométriquement.

(2) Étudier la dérivabilité de v à droite au point d'abscisse $x_0=-2$, puis interpréter géométriquement.

(3) Pour tout $x\in\,]-2,+\infty[$, établir que $v'(x)=-\dfrac{(x+1)e^{-x}}{2v(x)}$, puis dresser le tableau de variations de v.

(4) Tracer (C_v) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Deuxième partie

- Soit V définie sur $\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right[$ par $V(x)=\displaystyle\int_0^{\ln(x)} v(t)\,dt$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n=\dfrac{2^n\cdot(n!)}{(2n+1)!}\displaystyle\int_{-2}^{-1} v(t)\cdot(t+2)^n\,dt$.

(1) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\,,\ 0\le u_n\le\dfrac{e}{2n+1}$, puis en déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

(2) Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k\cdot(k!)}{(2k+1)!}$.

(a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $u_{n+1}-u_n=-2\sqrt{e}\cdot\dfrac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(2n+3)!}$.

(b) En déduire que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,,\ S_n=\dfrac{u_0-u_n}{2\sqrt{e}}$.

(c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\dfrac{V\left(\frac{1}{e}\right)-V\left(\frac{1}{e^2}\right)}{2\sqrt{e}}$.

English translation

Part One

- Let v be defined on $[-2,+\infty[$ by $v(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{e^x}}$.

(1) Compute $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)$, then interpret geometrically.

(2) Study the right-differentiability of v at the point of abscissa $x_0=-2$, then interpret geometrically.

(3) For every $x\in\,]-2,+\infty[$, prove that $v'(x)=-\dfrac{(x+1)e^{-x}}{2v(x)}$, then draw up the table of variations of v.

(4) Sketch (C_v) in an orthonormal frame $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Part Two

© Saad Choukri

• Let V be defined on $\left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right[$ by $V(x) = \displaystyle\int_0^{\ln(x)} v(t)\,dt$, and let $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be defined by $u_n = \dfrac{2^n \cdot (n!)}{(2n+1)!} \displaystyle\int_{-2}^{-1} v(t) \cdot (t+2)^n\,dt$.

(1) Show that $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 \le u_n \le \dfrac{e}{2n+1}$, then deduce that (u_n) converges and determine its limit.

(2) For $n \in \mathbb{N}^*$ put $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k \cdot (k!)}{(2k+1)!}$.

(a) Using integration by parts, show that $u_{n+1} - u_n = -2\sqrt{e} \cdot \dfrac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(2n+3)!}$.

(b) Deduce that $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ S_n = \dfrac{u_0 - u_n}{2\sqrt{e}}$.

(c) Show that $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{V\left(\frac{1}{e}\right) - V\left(\frac{1}{e^2}\right)}{2\sqrt{e}}$.

مسألة 09 دالة لوغاريتمية ومعدلها التكاملي

النص الأصلي بالعربية

الجزء الأول

(1) (a) بيّن أن $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ e^x(1-x) \le 1$.

(b) بيّن أن $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ e^x - 1 \ge x\sqrt{e^x}$.

(2) (a) بيّن أن $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\,,\ \left|\dfrac{e^x - x - 1}{x^2} - \dfrac{1}{2}\right| \le \left|\dfrac{e^x - 1}{x} - 1\right|$.

(b) استنتج $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2}$.

الجزء الثاني

• لتكن φ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $\varphi(x) = \ln\left(\dfrac{x}{e^x - 1}\right)$ لكل $x \neq 0$ و $\varphi(0) = 0$.

(1) احسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x}$ ، ثم أوّل النتائج المحصل عليها هندسيا.

(2) أثبت أن الدالة φ متصلة و قابلة للاشتقاق في الصفر، حيث $\varphi'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

(3) (a) أثبت أن الدالة φ رتيبة على $\mathbb{R}$.

(b) بيّن أن الدالة φ' تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$.

© Saad Choukri

الجزء الثالث

• لتكن ϕ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $\phi(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \varphi(u)\,du$ لكل $x \neq 0$ و $\phi(0) = 0$، و ليكن (C_ϕ) منحنى الدالة ϕ في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بيّن أن الدالة ϕ متصلة في الصفر.

(2) (a) تحقق من أن $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ \phi(-x) - \phi(x) = \dfrac{x}{2}$.

(b) ليكن x عنصرا من المجال $]0, +\infty[$، بيّن أن $\dfrac{\varphi(x)}{2} \leq \phi(x) \leq -\dfrac{x}{4}$ و $\dfrac{\varphi(-x)}{2} \leq \phi(x) + \dfrac{x}{2} \leq \varphi(-x)$.

(3) (a) حدد نهاية الدالة ϕ عند $+\infty$ ثم ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_ϕ) بجوار $+\infty$.

(b) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_ϕ) بجوار $-\infty$.

(4) (a) بيّن أن الدالة ϕ قابلة للاشتقاق في الصفر محددا $\phi'(0)$.

(b) بيّن أن الدالة ϕ قابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R}^*$ و أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\phi'(x) = \dfrac{\varphi(x) - \phi(x)}{x}$.

(c) ضع جدول تغيرات الدالة ϕ على $\mathbb{R}$.

(5) أنشئ (C_ϕ).

الجزء الرابع

• لكل n من $\mathbb{N}^*$ نعرف المتتاليتين $(a_n)_{n\geq 1}$ و $(b_n)_{n\geq 1}$ بما يلي: $a_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \varphi(j)$ و $b_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \varphi(-j)$.

(1) بيّن أن المتتالية $(b_n)_{n\geq 1}$ متقاربة و أن $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

(2) باستعمال تقارب المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$، برهن على أن $\sqrt{e} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n^2]{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (e^i - 1)}$.

Traduction française

Première partie

(1)(a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ e^x(1-x) \leq 1$.

(b) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ e^x - 1 \geq x\sqrt{e^x}$.

(2)(a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\,,\ \left|\dfrac{e^x - x - 1}{x^2} - \dfrac{1}{2}\right| \leq \left|\dfrac{e^x - 1}{x} - 1\right|$.

(b) En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2}$.

Deuxième partie

© Saad Choukri

- Soit φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \ln\left(\dfrac{x}{e^x - 1}\right)$ pour $x \neq 0$ et $\varphi(0) = 0$.

(1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement.

(2) Établir que φ est continue et dérivable en 0, avec $\varphi'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

(3)(a) Établir que φ est monotone sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que φ' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Troisième partie

- Soit ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \varphi(u)\,du$ pour $x \neq 0$ et $\phi(0) = 0$, de courbe (C_ϕ) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) Montrer que ϕ est continue en 0.

(2)(a) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ \phi(-x) - \phi(x) = \dfrac{x}{2}$.

(b) Soit $x \in]0, +\infty[$; montrer que $\dfrac{\varphi(x)}{2} \leq \phi(x) \leq -\dfrac{x}{4}$ et $\dfrac{\varphi(-x)}{2} \leq \phi(x) + \dfrac{x}{2} \leq \varphi(-x)$.

(3)(a) Déterminer la limite de ϕ en $+\infty$ puis étudier la branche infinie de (C_ϕ) au voisinage de $+\infty$.

(b) Étudier les branches infinies de (C_ϕ) au voisinage de $-\infty$.

(4)(a) Montrer que ϕ est dérivable en 0 en précisant $\phi'(0)$.

(b) Montrer que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $\phi'(x) = \dfrac{\varphi(x) - \phi(x)}{x}$.

(c) Dresser le tableau de variations de ϕ sur $\mathbb{R}$.

(5) Construire (C_ϕ).

Quatrième partie

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $a_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \varphi(j)$ et $b_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \varphi(-j)$.

(1) Montrer que $(b_n)_{n\geq 1}$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

(2) En utilisant la convergence de $(a_n)_{n\geq 1}$, démontrer que $\sqrt{e} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n^2]{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (e^i - 1)}$.

English translation

Part One

(1)(a) Show that $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ e^x(1 - x) \leq 1$.

(b) Show that $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ e^x - 1 \geq x\sqrt{e^x}$.

(2)(a) Show that $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\,,\ \left|\dfrac{e^x - x - 1}{x^2} - \dfrac{1}{2}\right| \leq \left|\dfrac{e^x - 1}{x} - 1\right|$.

© Saad Choukri

(b) Deduce $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}$.

Part Two

- Let φ be defined on $\mathbb{R}$ by $\varphi(x)=\ln\left(\dfrac{x}{e^x-1}\right)$ for $x\neq 0$ and $\varphi(0)=0$.

(1) Compute $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{x}$ and $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\varphi(x)}{x}$, then interpret the results geometrically.

(2) Prove that φ is continuous and differentiable at 0, with $\varphi'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

(3)(a) Prove that φ is monotone on $\mathbb{R}$.

(b) Show that φ' is strictly decreasing on $\mathbb{R}$.

Part Three

- Let ϕ be defined on $\mathbb{R}$ by $\phi(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\varphi(u)\,du$ for $x\neq 0$ and $\phi(0)=0$, with curve (C_ϕ) in an orthonormal frame $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(1) Show that ϕ is continuous at 0.

(2)(a) Check that $(\forall x\in\mathbb{R})\,,\ \phi(-x)-\phi(x)=\dfrac{x}{2}$.

(b) Let $x\in\,]0,+\infty[$; show that $\dfrac{\varphi(x)}{2}\leq\phi(x)\leq-\dfrac{x}{4}$ and $\dfrac{\varphi(-x)}{2}\leq\phi(x)+\dfrac{x}{2}\leq\varphi(-x)$.

(3)(a) Determine the limit of ϕ at $+\infty$ then study the infinite branch of (C_ϕ) near $+\infty$.

(b) Study the infinite branches of (C_ϕ) near $-\infty$.

(4)(a) Show that ϕ is differentiable at 0, giving $\phi'(0)$.

(b) Show that ϕ is differentiable on $\mathbb{R}^*$ and that $\phi'(x)=\dfrac{\varphi(x)-\phi(x)}{x}$.

(c) Draw up the table of variations of ϕ on $\mathbb{R}$.

(5) Sketch (C_ϕ).

Part Four

- For $n\in\mathbb{N}^*$ define $a_n=\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\varphi(j)$ and $b_n=\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\varphi(-j)$.

(1) Show that $(b_n)_{n\geq 1}$ converges with $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=0$.

(2) Using the convergence of $(a_n)_{n\geq 1}$, prove that $\sqrt{e}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n^2]{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(e^i-1)}$.

مسألة 10 حلول معادلات ومتتالية نيوتن

© Saad Choukri

النص الأصلي بالعربية

الجزء الأول

• ليكن n من $\mathbb{N}^*$. نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $]n,+\infty[$ بما يلي: $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x-k}$. نعتبر $\lambda>0$ عددا ثابتا.

(1) (a) بيّن أن الدالة f_n تقابل من $]n,+\infty[$ نحو $]0,+\infty[$.

(b) استنتج أن المعادلة $f_n(x)=\lambda$ تقبل حلا وحيدا λ_n في $]n,+\infty[$.

(c) حدد نهاية المتتالية $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ معللا جوابك.

(d) نضع $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. بيّن أن $H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(2) (a) بيّن أنه يوجد عدد صحيح طبيعي n_0 بحيث يكون لكل $n\geq n_0$: $\lambda_n>n+1$.

(b) بيّن أن $\int_{\lambda_n-n}^{\lambda_n+1}\frac{dt}{t}\leq\lambda\leq\int_{\lambda_n-n-1}^{\lambda_n}\frac{dt}{t}$، ثم استنتج تأطيرا للحدين λ_3 و λ_9. ماذا تستنتج بالنسبة لحدود المتتالية $(\lambda_n)_{n\geq 1}$؟

الجزء الثاني

• نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]\ln(2),+\infty[$ بما يلي: $f(x)=x-2\ln\left(\frac{e^x}{2}-1\right)$.

(1) (a) احسب النهايات التالية مع إعطاء التأويل الهندسي: $\lim_{x\to(\ln(2))^+}f(x)$، $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)$.

(b) بيّن أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]\ln(2),+\infty[$ و أن $f'(x)=\frac{2+e^x}{2-e^x}$, $(\forall x\in]\ln(2),+\infty[)$.

(c) ضع جدول تغيرات الدالة f على $]\ln(2),+\infty[$.

(d) ادرس تقعر منحنى الدالة f.

(e) أنشئ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(2) نضع $I=]\ln(2),+\infty[$.

(a) بيّن أن f تقابل من I نحو مجال J ينبغي تحديده، محددا التقابل العكسي f^{-1}.

(b) نضع $\alpha=f^{-1}(0)$. بيّن أن لكل x من المجال I لدينا: $x-\frac{f(x)}{f'(x)}\leq\alpha$.

(3) لتكن $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي: $\alpha_0=\ln(3)$ و $\alpha_{n+1}=\alpha_n-\frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}$.

(a) بيّن أن $(\forall n\in\mathbb{N}),\ \alpha_n\in]\ln(2),\alpha]$.

(b) بيّن أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبة، ثم استنتج أنها متقاربة.

(c) حدد نهاية المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معللا جوابك.

Traduction française

© Saad Choukri

Première partie

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère f_n définie sur $]n, +\infty[$ par $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-k}$, et $\lambda > 0$ une constante.

(1)(a) Montrer que f_n est une bijection de $]n, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$.

(b) En déduire que l'équation $f_n(x) = \lambda$ admet une unique solution λ_n dans $]n, +\infty[$.

(c) Déterminer la limite de $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ en justifiant la réponse.

(d) On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(2)(a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\lambda_n > n+1$.

(b) Montrer que $\int_{\lambda_n - n}^{\lambda_n + 1} \frac{dt}{t} \leq \lambda \leq \int_{\lambda_n - n - 1}^{\lambda_n} \frac{dt}{t}$, puis en déduire un encadrement de λ_3 et λ_9. Que peut-on en conclure sur les termes de $(\lambda_n)_{n\geq 1}$?

Deuxième partie

- Soit f définie sur $]\ln(2), +\infty[$ par $f(x) = x - 2\ln\left(\frac{e^x}{2} - 1\right)$.

(1)(a) Calculer les limites suivantes avec interprétation géométrique : $\lim_{x\to(\ln(2))^+} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} (f(x) + x)$.

(b) Montrer que f est dérivable sur $]\ln(2), +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{2+e^x}{2-e^x}$.

(c) Dresser le tableau de variations de f sur $]\ln(2), +\infty[$.

(d) Étudier la concavité de la courbe de f.

(e) Construire la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(2) On pose $I =]\ln(2), +\infty[$.

(a) Montrer que f est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer, en précisant f^{-1}.

(b) On pose $\alpha = f^{-1}(0)$. Montrer que pour tout $x \in I$: $x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leq \alpha$.

(3) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\alpha_0 = \ln(3)$ et $\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}$.

(a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ \alpha_n \in]\ln(2), \alpha]$.

(b) Montrer que (α_n) est monotone, puis en déduire qu'elle converge.

(c) Déterminer la limite de (α_n) en justifiant la réponse.

English translation

Part One

- Let $n \in \mathbb{N}^*$ and let f_n be defined on $]n, +\infty[$ by $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-k}$, with $\lambda > 0$ a fixed constant.

(1)(a) Show that f_n is a bijection from $]n, +\infty[$ onto $]0, +\infty[$.

(b) Deduce that the equation $f_n(x) = \lambda$ has a unique solution λ_n in $]n, +\infty[$.

(c) Determine the limit of $(\lambda_n)_{n\geq 1}$, justifying your answer.

© Saad Choukri

(d) Put $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; show that $H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(2)(a) Show that there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $\lambda_n > n+1$ for all $n \geq n_0$.

(b) Show that $\int_{\lambda_n - n}^{\lambda_n + 1} \frac{dt}{t} \leq \lambda \leq \int_{\lambda_n - n - 1}^{\lambda_n} \frac{dt}{t}$, then deduce bounds for λ_3 and λ_9. What do you conclude about the terms of $(\lambda_n)_{n\geq 1}$?

Part Two

- Let f be defined on $]\ln(2), +\infty[$ by $f(x) = x - 2\ln\left(\frac{e^x}{2} - 1\right)$.

(1)(a) Compute the following limits with geometric interpretation: $\lim_{x\to(\ln(2))^+} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ and $\lim_{x\to+\infty} (f(x) + x)$.

(b) Show that f is differentiable on $]\ln(2), +\infty[$ and that $f'(x) = \frac{2+e^x}{2-e^x}$.

(c) Draw up the table of variations of f on $]\ln(2), +\infty[$.

(d) Study the concavity of the curve of f.

(e) Sketch the curve of f in an orthonormal frame $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(2) Put $I =]\ln(2), +\infty[$.

(a) Show that f is a bijection from I onto an interval J to be determined, specifying f^{-1}.

(b) Put $\alpha = f^{-1}(0)$. Show that for every $x \in I$: $x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leq \alpha$.

(3) Let $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be defined by $\alpha_0 = \ln(3)$ and $\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}$.

(a) Show that $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ \alpha_n \in]\ln(2), \alpha]$.

(b) Show that (α_n) is monotone, then deduce that it converges.

(c) Determine the limit of (α_n), justifying your answer.

© Saad Choukri

المحور 2

الأعداد العقدية

Nombres complexes ▪ Complex numbers

مسألة 01 مجموع مثلثي وتكامل

النص الأصلي بالعربية

• لكل n من $\mathbb{N}^*$ نعرف المتتالية $(S_n(\theta))_{n\geq 1}$ بما يلي: $S_n(\theta)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k\theta)}{k}$، حيث $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

(1) بيّن أن $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-2x\cos(\theta)+1}=\frac{\pi-\theta}{2\sin(\theta)}$. (لاحظ أن $x^2-2x\cos(\theta)+1=(x-\cos(\theta))^2+\sin^2(\theta)$.)

(2) ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$.

(a) بيّن أن $\frac{1}{1-xe^{i\theta}}=\frac{x^ne^{in\theta}}{1-xe^{i\theta}}+\sum_{k=0}^{n-1}\left(xe^{i\theta}\right)^k$, $(\forall x\in[0,1])$.

(b) تحقق من أن $\Im\left(\frac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}\right)=\frac{\sin(\theta)}{x^2-2x\cos(\theta)+1}$, $(\forall x\in[0,1])$، حيث $\Im(z)$ يرمز للجزء التخيلي للعدد العقدي z.

(c) استنتج أنه $S_n(\theta)=\frac{\pi-\theta}{2}-\int_0^1 x^n\cdot\left(\frac{\sin((n+1)\theta)-x\sin(n\theta)}{x^2-2x\cos(\theta)+1}\right)dx$, $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$.

(3) بيّن أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا: $\left|\int_0^1 x^n\cdot\left(\frac{\sin((n+1)\theta)-x\sin(n\theta)}{x^2-2x\cos(\theta)+1}\right)dx\right|\leq\frac{2}{(n+1)\sin^2(\theta)}$.

(4) استنتج، من كل ما سبق، أن المتتالية $(S_n(\theta))_{n\geq 1}$ متقاربة محددا نهايتها.

Traduction française

• Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on définit $S_n(\theta)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k\theta)}{k}$, où $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

(1) Montrer que $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-2x\cos(\theta)+1}=\frac{\pi-\theta}{2\sin(\theta)}$. (Remarquer que $x^2-2x\cos(\theta)+1=(x-\cos(\theta))^2+\sin^2(\theta)$.)

(2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $(\forall x\in[0,1])$, $\frac{1}{1-xe^{i\theta}}=\frac{x^ne^{in\theta}}{1-xe^{i\theta}}+\sum_{k=0}^{n-1}\left(xe^{i\theta}\right)^k$.

(b) Vérifier que $(\forall x \in [0,1])$, $\Im\left(\dfrac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}\right) = \dfrac{\sin(\theta)}{x^2-2x\cos(\theta)+1}$, où $\Im(z)$ désigne la partie imaginaire de z.

(c) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $S_n(\theta) = \dfrac{\pi-\theta}{2} - \displaystyle\int_0^1 x^n \cdot \left(\frac{\sin((n+1)\theta) - x\sin(n\theta)}{x^2-2x\cos(\theta)+1}\right) dx$.

(3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|\displaystyle\int_0^1 x^n \cdot \left(\frac{\sin((n+1)\theta) - x\sin(n\theta)}{x^2-2x\cos(\theta)+1}\right) dx\right| \leq \dfrac{2}{(n+1)\sin^2(\theta)}$.

(4) En déduire, de tout ce qui précède, que $(S_n(\theta))_{n\geq 1}$ converge et déterminer sa limite.

English translation

- For $n \in \mathbb{N}^*$ define $S_n(\theta) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\theta)}{k}$, where $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

(1) Show that $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2-2x\cos(\theta)+1} = \frac{\pi-\theta}{2\sin(\theta)}$. (Note that $x^2-2x\cos(\theta)+1 = (x-\cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)$.)

(2) Let $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Show that $(\forall x \in [0,1])$, $\dfrac{1}{1-xe^{i\theta}} = \dfrac{x^n e^{in\theta}}{1-xe^{i\theta}} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(xe^{i\theta}\right)^k$.

(b) Check that $(\forall x \in [0,1])$, $\Im\left(\dfrac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}\right) = \dfrac{\sin(\theta)}{x^2-2x\cos(\theta)+1}$, where $\Im(z)$ denotes the imaginary part of z.

(c) Deduce that $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $S_n(\theta) = \dfrac{\pi-\theta}{2} - \displaystyle\int_0^1 x^n \cdot \left(\frac{\sin((n+1)\theta) - x\sin(n\theta)}{x^2-2x\cos(\theta)+1}\right) dx$.

(3) Show that for every $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|\displaystyle\int_0^1 x^n \cdot \left(\frac{\sin((n+1)\theta) - x\sin(n\theta)}{x^2-2x\cos(\theta)+1}\right) dx\right| \leq \dfrac{2}{(n+1)\sin^2(\theta)}$.

(4) Deduce from all the above that $(S_n(\theta))_{n\geq 1}$ converges and find its limit.

مسألة 02 معادلة من الدرجة الثانية ودورانان

النص الأصلي بالعربية

- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E_m) : z^2 - (m+\overline{m})z + m\overline{m} + i(\overline{m}-m) + 1 = 0$، حيث $m \in \mathbb{C}^*$.

(1) (a) تحقق من أن مميز المعادلة (E_m) يكتب على الشكل $\Delta = (m-\overline{m}+2i)^2$.

(b) حل المعادلة (E_m).

(2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط: $A(\overline{m})$، $B(m)$، $C(m-i)$ و $D(m+i)$.

(a) بيّن أن النقط A، B، C و D مستقيمية.

(b) نعتبر الدوران R_1 الذي مركزه A و زاوية دورانه θ_1، و الدوران R_2 الذي مركزه B و زاوية دورانه θ_2، حيث $\theta_1 - \theta_2 = \pi$. نعتبر النقط M، M' و M'' التي ألحاقها على التوالي z، z' و z'' بحيث $R_1(M) = M'$ و $R_2(M) = M''$. المطلوب: حدد مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها تكون النقط M، M' و M''

© Saad Choukri

مستقيمية.

Traduction française

- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_m) : z^2 - (m+\overline{m})\,z + m\overline{m} + i\,(\overline{m} - m) + 1 = 0$, où $m \in \mathbb{C}^*$.

(1)(a) Vérifier que le discriminant de (E_m) s'écrit $\Delta = (m - \overline{m} + 2i)^2$.

(b) Résoudre l'équation (E_m).

(2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A(\overline{m})$, $B(m)$, $C(m-i)$ et $D(m+i)$.

(a) Montrer que A, B, C et D sont alignés.

(b) On considère la rotation R_1 de centre A et d'angle θ_1, et la rotation R_2 de centre B et d'angle θ_2, avec $\theta_1 - \theta_2 = \pi$. Soient M, M' et M'' d'affixes respectives z, z' et z'' telles que $R_1(M) = M'$ et $R_2(M) = M''$. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels M, M' et M'' sont alignés.

English translation

- In $\mathbb{C}$ consider the equation $(E_m) : z^2 - (m+\overline{m})\,z + m\overline{m} + i\,(\overline{m} - m) + 1 = 0$, where $m \in \mathbb{C}^*$.

(1)(a) Check that the discriminant of (E_m) can be written $\Delta = (m - \overline{m} + 2i)^2$.

(b) Solve the equation (E_m).

(2) In the complex plane with orthonormal frame $(O, \vec{u}, \vec{v})$, consider the points $A(\overline{m})$, $B(m)$, $C(m-i)$ and $D(m+i)$.

(a) Show that A, B, C and D are collinear.

(b) Let R_1 be the rotation with centre A and angle θ_1, and R_2 the rotation with centre B and angle θ_2, where $\theta_1 - \theta_2 = \pi$. Let M, M' and M'' have affixes z, z' and z'' with $R_1(M) = M'$ and $R_2(M) = M''$. Determine the set of points $M(z)$ for which M, M' and M'' are collinear.

مسألة 03 دوران وتماثل محوري

النص الأصلي بالعربية

• المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B ذات اللحقين على التوالي $a = 1 - i$ و $b = 2 + \sqrt{3} + i$.

(1) تحقق من أنه $\dfrac{b}{a} = (1+\sqrt{3})\,e^{i\frac{\pi}{3}}$، ثم اكتب العدد العقدي b على شكله الأسي.

(2) لتكن B_1 صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $-\dfrac{\pi}{6}$. حدد لحق B_1، و استنتج أن النقطة B_1 مماثلة النقطة B بالنسبة للمحور $(O, \vec{u})$.

(3) لتكن M نقطة من المستوى و النقطة M_1 صورتها بالدوران R، و لتكن M' مماثلة النقطة M_1 بالنسبة للمحور $(O, \vec{u})$. و لتكن (H) مجموعة النقط M من المستوى بحيث $M = M'$.

(a) تحقق من أن النقطتين O و B تنتميان إلى المجموعة (H).

(b) لتكن M نقطة من المستوى، $M \neq O$، و لحقها $z = re^{i\theta}$ حيث $r > 0$. بيّن أن لحق النقطة M' هو

© Saad Choukri

$z' = re^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$، ثم حدد قيم θ التي من أجلها تنتمي النقطة M إلى المجموعة (H).

(c) بيّن أن النقط M، B و O تكون مستقيمية إذا و فقط إذا كانت M تنتمي إلى المجموعة (H)، ثم حدد المجموعة (H).

Traduction française

• Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 1 - i$ et $b = 2 + \sqrt{3} + i$.

(1) Vérifier que $\dfrac{b}{a} = \left(1 + \sqrt{3}\right) e^{i\frac{\pi}{3}}$, puis écrire b sous forme exponentielle.

(2) Soit B_1 l'image de B par la rotation R de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$. Déterminer l'affixe de B_1, et en déduire que B_1 est le symétrique de B par rapport à l'axe $(O, \vec{u})$.

(3) Soit M un point du plan, M_1 son image par R, et M' le symétrique de M_1 par rapport à l'axe $(O, \vec{u})$. Soit (H) l'ensemble des points M tels que $M = M'$.

(a) Vérifier que O et B appartiennent à (H).

(b) Soit $M \neq O$ d'affixe $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$. Montrer que l'affixe de M' est $z' = re^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$, puis déterminer les valeurs de θ pour lesquelles M appartient à (H).

(c) Montrer que M, B et O sont alignés si et seulement si M appartient à (H), puis déterminer (H).

English translation

• The complex plane is referred to a direct orthonormal frame $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Consider the points A and B with affixes $a = 1 - i$ and $b = 2 + \sqrt{3} + i$.

(1) Check that $\dfrac{b}{a} = \left(1 + \sqrt{3}\right) e^{i\frac{\pi}{3}}$, then write b in exponential form.

(2) Let B_1 be the image of B under the rotation R with centre O and angle $-\dfrac{\pi}{6}$. Determine the affix of B_1, and deduce that B_1 is the reflection of B in the axis $(O, \vec{u})$.

(3) Let M be a point of the plane, M_1 its image under R, and M' the reflection of M_1 in the axis $(O, \vec{u})$. Let (H) be the set of points M with $M = M'$.

(a) Check that O and B belong to (H).

(b) Let $M \neq O$ have affix $z = re^{i\theta}$ with $r > 0$. Show that the affix of M' is $z' = re^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$, then find the values of θ for which M belongs to (H).

(c) Show that M, B and O are collinear if and only if M belongs to (H), then determine (H).

مسألة 04 متتالية دورانات ومجموع أطوال

النص الأصلي بالعربية

• المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. ليكن n من $\mathbb{N}^*$، نعتبر الدوران (R_n) الذي مركزه النقطة B ذات اللحق 1 و زاوية دورانه $\dfrac{\pi}{2^n}$؛ و نضع $(\forall M \in (P))\,,\ R_n(M) = M_n$.

(1) تحقق من أن $(\forall M \in (P))\,,\ R_{n+1}^{-1}(M_n) = R_{n+1}(M)$.

© Saad Choukri

(2) استنتج أنه لكل نقطة M من (P) تخالف النقطة B لدينا: $\dfrac{M_nM_{n+1}}{BM} = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ و أنه $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right) \equiv \left(\dfrac{3}{2^{n+2}} - \dfrac{1}{2}\right)\pi\ [2\pi]$.

(3) نضع $\varphi_n = \sum_{k=2}^{n+2} OO_k$، حيث $O_k = R_k(O)$ لكل $k \in \{2, 3, \cdots, n+2\}$.

(a) بيّن أن $\left(\forall \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right),\ \dfrac{\alpha}{2} \leq \sin(\alpha) \leq \alpha$.

(b) بيّن أن المتتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة، و أن نهايتها L تحقق $\dfrac{\pi}{4} \leq L \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Traduction française

• Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit (R_n) la rotation de centre B d'affixe 1 et d'angle $\dfrac{\pi}{2^n}$; on pose $R_n(M) = M_n$ pour tout $M \in (P)$.

(1) Vérifier que $\left(\forall M \in (P)\right),\ R_{n+1}^{-1}(M_n) = R_{n+1}(M)$.

(2) En déduire que pour tout point $M \neq B$: $\dfrac{M_nM_{n+1}}{BM} = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right) \equiv \left(\dfrac{3}{2^{n+2}} - \dfrac{1}{2}\right)\pi\ [2\pi]$.

(3) On pose $\varphi_n = \sum_{k=2}^{n+2} OO_k$, où $O_k = R_k(O)$ pour $k \in \{2, 3, \cdots, n+2\}$.

(a) Montrer que $\left(\forall \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right),\ \dfrac{\alpha}{2} \leq \sin(\alpha) \leq \alpha$.

(b) Montrer que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite L vérifie $\dfrac{\pi}{4} \leq L \leq \dfrac{\pi}{2}$.

English translation

• The complex plane (P) is referred to a direct orthonormal frame $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. For $n \in \mathbb{N}^*$, let (R_n) be the rotation with centre B of affix 1 and angle $\dfrac{\pi}{2^n}$; put $R_n(M) = M_n$ for every $M \in (P)$.

(1) Check that $\left(\forall M \in (P)\right),\ R_{n+1}^{-1}(M_n) = R_{n+1}(M)$.

(2) Deduce that for every point $M \neq B$: $\dfrac{M_nM_{n+1}}{BM} = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ and $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right) \equiv \left(\dfrac{3}{2^{n+2}} - \dfrac{1}{2}\right)\pi\ [2\pi]$.

(3) Put $\varphi_n = \sum_{k=2}^{n+2} OO_k$, where $O_k = R_k(O)$ for $k \in \{2, 3, \cdots, n+2\}$.

(a) Show that $\left(\forall \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right),\ \dfrac{\alpha}{2} \leq \sin(\alpha) \leq \alpha$.

(b) Show that $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converges and that its limit L satisfies $\dfrac{\pi}{4} \leq L \leq \dfrac{\pi}{2}$.

مسألة 05 معادلة ذات وسيط واستقامية

النص الأصلي بالعربية

© Saad Choukri

• المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر المعادلة: $(E): z^2-(1+i)(\omega+2i)z+i(\omega+2i)^2=0$، حيث $\omega\in\mathbb{C}$. نرمز بـ z_1 و z_2 لحلي المعادلة (E)، حيث z_2 هو الحل الذي يكون حقيقيا عندما $\omega=0$.

(1) (a) بيّن أن مميز المعادلة (E) يكتب على الشكل $\Delta=((1-i)(\omega+2i))^2$.

(b) استنتج حلول المعادلة (E).

(2) فيما يلي، نعتبر النقط $A(z_1)$، $B(z_2)$ و $M(-2+2i)$. بيّن أن النقط A، B و M مستقيمية $\iff |\omega|=2$.

(3) نفترض أن $|\omega|\neq 2$. ليكن R الدوران الذي مركزه M و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

(a) بيّن أن الصيغة العقدية للدوران R هي $z'=i\cdot z+4i$.

(b) حدد لحق النقطة C صورة A بالدوران R.

(c) لتكن D صورة B بالدوران R. بيّن أن $BC=AD$ و $(BC)\perp(AD)$.

Traduction française

• Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère l'équation (E) : $z^2-(1+i)(\omega+2i)z+i(\omega+2i)^2=0$, où $\omega\in\mathbb{C}$. On note z_1 et z_2 les solutions de (E), z_2 désignant celle qui est réelle lorsque $\omega=0$.

(1)(a) Montrer que le discriminant de (E) s'écrit $\Delta=((1-i)(\omega+2i))^2$.

(b) En déduire les solutions de (E).

(2) Dans la suite, on considère les points $A(z_1)$, $B(z_2)$ et $M(-2+2i)$. Montrer que A, B et M sont alignés $\iff |\omega|=2$.

(3) On suppose $|\omega|\neq 2$. Soit R la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

(a) Montrer que l'écriture complexe de R est $z'=i\cdot z+4i$.

(b) Déterminer l'affixe du point C, image de A par R.

(c) Soit D l'image de B par R. Montrer que $BC=AD$ et $(BC)\perp(AD)$.

English translation

• The plane is referred to a direct orthonormal frame $(O,\vec{u},\vec{v})$. Consider the equation (E) : $z^2-(1+i)(\omega+2i)z+i(\omega+2i)^2=0$, where $\omega\in\mathbb{C}$. Let z_1 and z_2 denote its solutions, z_2 being the one that is real when $\omega=0$.

(1)(a) Show that the discriminant of (E) can be written $\Delta=((1-i)(\omega+2i))^2$.

(b) Deduce the solutions of (E).

(2) In what follows consider the points $A(z_1)$, $B(z_2)$ and $M(-2+2i)$. Show that A, B and M are collinear $\iff |\omega|=2$.

(3) Assume $|\omega|\neq 2$. Let R be the rotation with centre M and angle $\frac{\pi}{2}$.

(a) Show that the complex form of R is $z'=i\cdot z+4i$.

(b) Determine the affix of C, the image of A under R.

(c) Let D be the image of B under R. Show that $BC=AD$ and $(BC)\perp(AD)$.

© Saad Choukri

مسألة 06 جذور مكعبة ومثلث قائم متساوي الساقين

النص الأصلي بالعربية

الجزء الأول

• نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E_a) : z^2 - (3a - 2i)z + 2a^2 - 4ai = 0$، حيث $a \in \mathbb{C}$.

(1) (a) بيّن أن $\Delta = (a + 2i)^2$، حيث Δ هو مميز المعادلة (E_a).

(b) استنتج مجموعة حلول المعادلة (E_a).

(2) في هذا السؤال، نفترض أن $a = 1 + i$، و ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة بحيث $|z_1| < |z_2|$.

(a) اكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي، ثم تحقق من أنه $z_1^3 + z_2 = 0$.

(b) استنتج على الشكل الجبري الجذور المكعبة للعدد z_2.

الجزء الثاني

• المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. نعتبر النقط $I(z_I = i)$، $J(z_J = 2a)$ و $K(z_K = a - 2i)$.

(1) بيّن أن النقط I و J و K مستقيمية إذا و فقط إذا كان $a \in i\mathbb{R}$.

(2) فيما يلي، نفترض أن $a \notin i\mathbb{R}$. خارج المثلث IJK، ننشئ النقطة H بحيث يكون المثلث JKH قائم الزاوية و متساوي الساقين في النقطة H.

(a) بيّن أن لحق النقطة H يكتب على الشكل $z_H = \dfrac{(3 - i)a + 2 - 2i}{2}$ أو $z_H = \dfrac{(3 + i)a - 2 - 2i}{2}$.

(b) استنتج قيم a التي من أجلها يكون الرباعي $IJHK$ مربعا.

Traduction française

Première partie

• On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_a) : z^2 - (3a - 2i)z + 2a^2 - 4ai = 0$, où $a \in \mathbb{C}$.

(1)(a) Montrer que $\Delta = (a + 2i)^2$, où Δ est le discriminant de (E_a).

(b) En déduire l'ensemble des solutions de (E_a).

(2) On suppose $a = 1 + i$; soient z_1 et z_2 les solutions avec $|z_1| < |z_2|$.

(a) Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique, puis vérifier que $z_1^3 + z_2 = 0$.

(b) En déduire, sous forme algébrique, les racines cubiques de z_2.

Deuxième partie

© Saad Choukri

• Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. On considère $I(z_I=i)$, $J(z_J=2a)$ et $K(z_K=a-2i)$.

(1) Montrer que I, J et K sont alignés si et seulement si $a\in i\mathbb{R}$.

(2) On suppose $a\notin i\mathbb{R}$. À l'extérieur du triangle IJK, on construit le point H tel que le triangle JKH soit rectangle isocèle en H.

(a) Montrer que l'affixe de H s'écrit $z_H=\dfrac{(3-i)a+2-2i}{2}$ ou $z_H=\dfrac{(3+i)a-2-2i}{2}$.

(b) En déduire les valeurs de a pour lesquelles $IJHK$ est un carré.

English translation

Part One

• Consider in $\mathbb{C}$ the equation $(E_a): z^2-(3a-2i)z+2a^2-4ai=0$, where $a\in\mathbb{C}$.

(1)(a) Show that $\Delta=(a+2i)^2$, where Δ is the discriminant of (E_a).

(b) Deduce the solution set of (E_a).

(2) Assume $a=1+i$; let z_1 and z_2 be the solutions with $|z_1|<|z_2|$.

(a) Write z_1 and z_2 in trigonometric form, then check that $z_1^3+z_2=0$.

(b) Deduce, in algebraic form, the cube roots of z_2.

Part Two

• The complex plane (P) is referred to a direct orthonormal frame $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. Consider $I(z_I=i)$, $J(z_J=2a)$ and $K(z_K=a-2i)$.

(1) Show that I, J and K are collinear if and only if $a\in i\mathbb{R}$.

(2) Assume $a\notin i\mathbb{R}$. Outside the triangle IJK, construct the point H such that the triangle JKH is right-angled and isosceles at H.

(a) Show that the affix of H can be written $z_H=\dfrac{(3-i)a+2-2i}{2}$ or $z_H=\dfrac{(3+i)a-2-2i}{2}$.

(b) Deduce the values of a for which $IJHK$ is a square.

مسألة 07 تحاك ودوران ومحيه أقصى

النص الأصلي بالعربية

• نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E_\theta): 2z^2-2e^{i\theta}z+i\sin(\theta)e^{i\theta}=0$، حيث $\theta\in]0,\pi[$.

(1) حل المعادلة (E_θ) مبرزا مراحل الحل، ثم اكتب حلولها على الشكل المثلثي.

(2) المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. نعتبر النقط $M(e^{i\theta})$، $I(1)$، $J(-1)$، $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$. و ليكن h التحاكي الذي مركزه M و نسبته 2، و r الدوران الذي مركزه M و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

(a) بيّن أن المثلث MIJ قائم الزاوية في M، ثم استنتج أن المستقيم (IJ) يوازي المستقيم (M_1M_2).

© Saad Choukri

(b) i. بيّن أن $h(M_1) = I$ و $h(M_2) = J$.

ii. بيّن أن النقط M و J و $r(I)$ مستقيمية.

iii. استنتج أن $\dfrac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} \in i\mathbb{R}$.

(c) حدد قيم θ التي من أجلها يكون محيط المثلث MIJ قصويا.

Traduction française

- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\theta) : 2z^2 - 2e^{i\theta}z + i\sin(\theta)e^{i\theta} = 0$, où $\theta \in]0, \pi[$.

(1) Résoudre (E_θ) en détaillant les étapes, puis écrire ses solutions sous forme trigonométrique.

(2) Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. On considère $M(e^{i\theta})$, $I(1)$, $J(-1)$, $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$. Soient h l'homothétie de centre M et de rapport 2, et r la rotation de centre M et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

(a) Montrer que le triangle MIJ est rectangle en M, puis en déduire que (IJ) est parallèle à (M_1M_2).

(b) i. Montrer que $h(M_1) = I$ et $h(M_2) = J$.

ii. Montrer que M, J et $r(I)$ sont alignés.

iii. En déduire que $\dfrac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} \in i\mathbb{R}$.

(c) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles le périmètre du triangle MIJ est maximal.

English translation

- Consider in $\mathbb{C}$ the equation $(E_\theta) : 2z^2 - 2e^{i\theta}z + i\sin(\theta)e^{i\theta} = 0$, where $\theta \in]0, \pi[$.

(1) Solve (E_θ), showing the steps, then write its solutions in trigonometric form.

(2) The complex plane (P) is referred to a direct orthonormal frame $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Consider $M(e^{i\theta})$, $I(1)$, $J(-1)$, $M_1(z_1)$ and $M_2(z_2)$. Let h be the homothety with centre M and ratio 2, and r the rotation with centre M and angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

(a) Show that the triangle MIJ is right-angled at M, then deduce that (IJ) is parallel to (M_1M_2).

(b) i. Show that $h(M_1) = I$ and $h(M_2) = J$.

ii. Show that M, J and $r(I)$ are collinear.

iii. Deduce that $\dfrac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} \in i\mathbb{R}$.

(c) Determine the values of θ for which the perimeter of the triangle MIJ is maximal.

مسألة 08 استقامية وتعامد بواسطة الدوران

النص الأصلي بالعربية

- ليكن m عددا عقديا غير منعدم، نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(F_m) : m^2z^2 + m^3z + 1 - im^2 = 0$.

(1) (a) تحقق من أن مميز المعادلة (F_m) يكتب على الشكل $\Delta = m^2\left(m^2 + 2i\right)^2$.

© Saad Choukri

(b) أعط حلول المعادلة (F_m).

(2) المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. نعتبر النقط $A\left(z_A=-\dfrac{m^2+i}{m}\right)$، $B\left(z_B=\dfrac{i}{m}\right)$ و $M(z_M=m)$.

(a) بيّن أن $\dfrac{m-z_A}{m-z_B}\in\mathbb{R} \iff \arg(m)\equiv\pm\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$.

(b) استنتج مجموعة النقط $M(m)$ بحيث تكون النقط A و B و M مستقيمية.

(3) ليكن r الدوران الذي مركزه B و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$. نضع $r(A)=A'$، $r(M)=M'$ و $r^{-1}(M)=B'$.

(a) حدد لحق كل من النقطتين A' و B'.

(b) بيّن أن B هي منتصف القطعة $[B'M']$.

(c) ليكن I منتصف القطعة $[AM]$ و z_I لحقها. أثبت أن $\dfrac{z_{B'}-z_{A'}}{z_B-z_I}\in i\mathbb{R}$، ثم استنتج أنه $(BI)\perp(A'B')$ و $A'B'=2BI$.

Traduction française

• Soit m un nombre complexe non nul ; on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(F_m): m^2z^2+m^3z+1-im^2=0$.

(1)(a) Vérifier que le discriminant de (F_m) s'écrit $\Delta=m^2\left(m^2+2i\right)^2$.

(b) Donner les solutions de (F_m).

(2) Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. On considère $A\left(z_A=-\dfrac{m^2+i}{m}\right)$, $B\left(z_B=\dfrac{i}{m}\right)$ et $M(z_M=m)$.

(a) Montrer que $\dfrac{m-z_A}{m-z_B}\in\mathbb{R} \iff \arg(m)\equiv\pm\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$.

(b) En déduire l'ensemble des points $M(m)$ tels que A, B et M soient alignés.

(3) Soit r la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On pose $r(A)=A'$, $r(M)=M'$ et $r^{-1}(M)=B'$.

(a) Déterminer les affixes de A' et B'.

(b) Montrer que B est le milieu du segment $[B'M']$.

(c) Soit I le milieu de $[AM]$ et z_I son affixe. Établir que $\dfrac{z_{B'}-z_{A'}}{z_B-z_I}\in i\mathbb{R}$, puis en déduire que $(BI)\perp(A'B')$ et $A'B'=2BI$.

English translation

• Let m be a non-zero complex number; consider in $\mathbb{C}$ the equation $(F_m): m^2z^2+m^3z+1-im^2=0$.

(1)(a) Check that the discriminant of (F_m) can be written $\Delta=m^2\left(m^2+2i\right)^2$.

(b) Give the solutions of (F_m).

(2) The complex plane (P) is referred to a direct orthonormal frame $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. Consider $A\left(z_A=-\dfrac{m^2+i}{m}\right)$, $B\left(z_B=\dfrac{i}{m}\right)$ and $M(z_M=m)$.

(a) Show that $\dfrac{m-z_A}{m-z_B}\in\mathbb{R} \iff \arg(m)\equiv\pm\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$.

(b) Deduce the set of points $M(m)$ for which A, B and M are collinear.

(3) Let r be the rotation with centre B and angle $\dfrac{\pi}{2}$. Put $r(A)=A'$, $r(M)=M'$ and $r^{-1}(M)=$

© Saad Choukri

B'.

(a) Determine the affixes of A' and B'.

(b) Show that B is the midpoint of the segment $[B'M']$.

(c) Let I be the midpoint of $[AM]$ with affix z_I. Prove that $\dfrac{z_{B'}-z_{A'}}{z_B-z_I}\in i\mathbb{R}$, then deduce that $(BI)\perp(A'B')$ and $A'B'=2BI$.

مسألة 09 جذور الوحدة ومجموعة نقط

النص الأصلي بالعربية

• المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$، و ليكن (a,b) من $\mathbb{R}^2$.

(1) فيما يلي، نفترض أن $ab\neq 0$، و نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E): 2z^2-4az+2a^2+\left(1+i\sqrt{3}\right)b^2=0$.

(a) تحقق من أن $u=a+b\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ حل للمعادلة (E).

(b) استنتج مجموعة حلول المعادلة (E).

(c) تحقق من أن $|u|^2+|v|^2=2|a+ib|^2$، ثم اكتب $v-u$ على الشكل المثلثي.

(d) لتكن A و B و E و U و V خمس نقط من (P) التي ألحاقها على التوالي a و b و $a-b$ و u و v.

i. بيّن أن النقط A و U و V مستقيمية.

ii. بيّن أن المستقيمين (EU) و (EV) متعامدان.

iii. انطلاقا من النقطتين A و B، أعط طريقة هندسية لإنشاء النقطتين U و V.

(2) (H) هي مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى ذات اللحق $z=a+ib$ بحيث $a^2-ab+b^2=1$.

(a) أثبت أنه $M\in(H)\Longrightarrow\sqrt{\dfrac{2}{3}}\leq|z|\leq\sqrt{2}$، ثم أوّل هندسيا النتيجة المحصل عليها.

(b) ليكن (D) القرص الذي مركزه النقطة J ذات اللحق $j=\sqrt{\dfrac{2}{3}}(1+i)$ و شعاعه $r=\sqrt{2}$، و ليكن (D') مماثله بالنسبة للنقطة O. بيّن أن $(H)\subset((D)\cap(D'))$.

(c) لتكن الدائرة (C) التي تحصر القرص (D)، و (C') مماثلتها بالنسبة للنقطة O. حدد نقطتي تقاطع الدائرتين (C) و (C') (نرمز لهما بـ P و S و يكفي تحديد لحقيهما).

(d) بيّن أن المستقيم (PS) هو محور تماثل (H).

(3) ليكن h التحاكي الذي مركزه O و نسبته $\dfrac{1}{2}$، و r الدوران الذي مركزه O و زاويته $\pi-\arctan(3)$. و لتكن T و Q صورتي S و P بالتطبيق $r\circ h$.

(a) بيّن أن النقطتين T و Q تنتميان إلى (H).

(b) بيّن أن الرباعي $PTSQ$ متوازي الأضلاع.

Traduction française

• Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$, et soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

© Saad Choukri

(1) On suppose $ab \neq 0$ et on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : 2z^2 - 4az + 2a^2 + \left(1 + i\sqrt{3}\right) b^2 = 0$.

(a) Vérifier que $u = a + b\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ est solution de (E).

(b) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

(c) Vérifier que $|u|^2 + |v|^2 = 2|a + ib|^2$, puis écrire $v - u$ sous forme trigonométrique.

(d) Soient A, B, E, U et V cinq points de (P) d'affixes respectives a, b, $a - b$, u et v.

i. Montrer que A, U et V sont alignés.

ii. Montrer que les droites (EU) et (EV) sont perpendiculaires.

iii. À partir des points A et B, donner une méthode géométrique de construction des points U et V.

(2) (H) est l'ensemble des points $M(z)$ d'affixe $z = a + ib$ tels que $a^2 - ab + b^2 = 1$.

(a) Établir que $M \in (H) \Longrightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} \leq |z| \leq \sqrt{2}$, puis interpréter géométriquement.

(b) Soit (D) le disque de centre J d'affixe $j = \sqrt{\frac{2}{3}}(1 + i)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$, et (D') son symétrique par rapport à O. Montrer que $(H) \subset ((D) \cap (D'))$.

(c) Soit (C) le cercle bordant le disque (D), et (C') son symétrique par rapport à O. Déterminer les deux points d'intersection de (C) et (C') (notés P et S ; il suffit de déterminer leurs affixes).

(d) Montrer que la droite (PS) est un axe de symétrie de (H).

(3) Soient h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$, et r la rotation de centre O et d'angle $\pi - \arctan(3)$. Soient T et Q les images de S et P par $r \circ h$.

(a) Montrer que T et Q appartiennent à (H).

(b) Montrer que le quadrilatère $PTSQ$ est un parallélogramme.

English translation

- The plane (P) is referred to a direct orthonormal frame $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, and let $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(1) Assume $ab \neq 0$ and consider in $\mathbb{C}$ the equation $(E) : 2z^2 - 4az + 2a^2 + \left(1 + i\sqrt{3}\right) b^2 = 0$.

(a) Check that $u = a + b\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ is a solution of (E).

(b) Deduce the solution set of (E).

(c) Check that $|u|^2 + |v|^2 = 2|a + ib|^2$, then write $v - u$ in trigonometric form.

(d) Let A, B, E, U and V be five points of (P) with affixes a, b, $a - b$, u and v respectively.

i. Show that A, U and V are collinear.

ii. Show that the lines (EU) and (EV) are perpendicular.

iii. Starting from A and B, give a geometric construction of U and V.

(2) (H) is the set of points $M(z)$ with affix $z = a + ib$ such that $a^2 - ab + b^2 = 1$.

(a) Prove that $M \in (H) \Longrightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} \leq |z| \leq \sqrt{2}$, then interpret the result geometrically.

(b) Let (D) be the disc with centre J of affix $j = \sqrt{\frac{2}{3}}(1 + i)$ and radius $r = \sqrt{2}$, and (D') its symmetric with respect to O. Show that $(H) \subset ((D) \cap (D'))$.

(c) Let (C) be the circle bounding (D), and (C') its symmetric with respect to O. Determine the two intersection points of (C) and (C') (call them P and S; it is enough to give their

© Saad Choukri

affixes).

(d) Show that the line (PS) is an axis of symmetry of (H).

(3) Let h be the homothety with centre O and ratio $\frac{1}{2}$, and r the rotation with centre O and angle $\pi - \arctan(3)$. Let T and Q be the images of S and P under $r \circ h$.

(a) Show that T and Q belong to (H).

(b) Show that the quadrilateral $PTSQ$ is a parallelogram.

مسألة 10 مجموعة نقط ومثلث قائم في المبدأ

النص الأصلي بالعربية

• نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(E_m) : z^2 - 2mz - 2(1+i) = 0$، حيث $m \in \mathbb{C}$.

(1) (a) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $\left(E_{i\sqrt{2}}\right)$.

(b) تحقق من أن النقط O و $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ تكوّن مثلثا قائم الزاوية في النقطة O، حيث z_1 و z_2 حلا المعادلة $\left(E_{i\sqrt{2}}\right)$.

(2) لتكن في المستوى العقدي النقط $M(m)$، $N(m^2)$، $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$، حيث z_1 و z_2 حلا المعادلة (E_m). و لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(m)$ التي من أجلها يكون المثلث OM_1M_2 قائم الزاوية في النقطة O.

(a) بيّن أن: (المثلث OM_1M_2 قائم الزاوية في O) $\iff 4\left|m^2\right| = |\Delta|$ ، حيث Δ هو مميز المعادلة (E_m).

(b) بيّن أن $M(x,y) \in (\Gamma) \iff x^2 - y^2 + 2xy + 2 = 0$ (بوضع $m = x + iy$).

(c) بيّن أنه إذا كانت $M(m) \in (\Gamma)$ فإن الرباعي OM_1NM_2 مستطيل، ثم أعط طريقة هندسية لإنشاء النقطتين M_1 و M_2 بحيث تكون عمدة العدد العقدي z_1 معلومة.

Traduction française

• On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_m) : z^2 - 2mz - 2(1+i) = 0$, où $m \in \mathbb{C}$.

(1)(a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(E_{i\sqrt{2}}\right)$.

(b) Vérifier que les points O, $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ forment un triangle rectangle en O, où z_1 et z_2 sont les solutions de $\left(E_{i\sqrt{2}}\right)$.

(2) Dans le plan complexe, soient $M(m)$, $N(m^2)$, $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$, où z_1 et z_2 sont les solutions de (E_m). Soit (Γ) l'ensemble des points $M(m)$ pour lesquels le triangle OM_1M_2 est rectangle en O.

(a) Montrer que : (le triangle OM_1M_2 est rectangle en O) $\iff 4\left|m^2\right| = |\Delta|$, où Δ est le discriminant de (E_m).

(b) Montrer que $M(x,y) \in (\Gamma) \iff x^2 - y^2 + 2xy + 2 = 0$ (en posant $m = x + iy$).

(c) Montrer que si $M(m) \in (\Gamma)$ alors le quadrilatère OM_1NM_2 est un rectangle, puis donner une méthode géométrique de construction de M_1 et M_2 connaissant un argument de z_1.

English translation

© Saad Choukri

- Consider in $\mathbb{C}$ the equation $(E_m) : z^2 - 2mz - 2(1+i) = 0$, where $m \in \mathbb{C}$.

(1)(a) Solve in $\mathbb{C}$ the equation $\left(E_{i\sqrt{2}}\right)$.

(b) Check that the points O, $M_1(z_1)$ and $M_2(z_2)$ form a triangle right-angled at O, where z_1 and z_2 are the solutions of $\left(E_{i\sqrt{2}}\right)$.

(2) In the complex plane let $M(m)$, $N(m^2)$, $M_1(z_1)$ and $M_2(z_2)$, where z_1 and z_2 are the solutions of (E_m). Let (Γ) be the set of points $M(m)$ for which the triangle OM_1M_2 is right-angled at O.

(a) Show that: (the triangle OM_1M_2 is right-angled at O) $\iff 4\left|m^2\right| = |\Delta|$, where Δ is the discriminant of (E_m).

(b) Show that $M(x,y) \in (\Gamma) \iff x^2 - y^2 + 2xy + 2 = 0$ (setting $m = x + iy$).

(c) Show that if $M(m) \in (\Gamma)$ then the quadrilateral OM_1NM_2 is a rectangle, then give a geometric construction of M_1 and M_2 when an argument of z_1 is known.

© Saad Choukri

المحور 3

البنيات الجبرية

Structures algébriques ▪ Algebraic structures

مسألة 01 جسم من المصفوفات وقوى مصفوفة

النص الأصلي بالعربية

• في مجموعة المصفوفات المربعة $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ نضع: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$، $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$، $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$، و نعتبر المجموعة الجزئية: $F = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

(1) بيّن أن $(F,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي، ثم حدد أساسا له و بعده.

(2) بيّن أن F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

(3) نعتبر التطبيق φ المعرف من $\mathbb{C}$ نحو F، و الذي يربط كل عدد عقدي $z = a+ib$ حيث $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ بالمصفوفة $M(a-b,b)$.

(a) بيّن أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(F-\{O\},\times)$.

(b) استنتج بنية $(F-\{O\},\times)$.

(c) حدد بنية $(F,+,\times)$.

(d) حل في المجموعة F المعادلة التالية: $J \times X = 3J - 4I$، حيث المجهول هو المصفوفة X.

(4) برهن أن $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$, $J^n = -\left(\sqrt{2}\right)^{n+1} \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right) I + \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) J$.

Traduction française

• Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on pose $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, et on considère $F = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

(1) Montrer que $(F,+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel, puis en déterminer une base et la dimension.

(2) Montrer que F est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

(3) Soit φ l'application de $\mathbb{C}$ vers F qui à tout $z = a+ib$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, associe la matrice $M(a-b,b)$.

(a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(F-\{O\},\times)$.

(b) En déduire la structure de $(F-\{O\},\times)$.

(c) Déterminer la structure de $(F,+,\times)$.

(d) Résoudre dans F l'équation $J\times X = 3J-4I$, d'inconnue la matrice X.

(4) Démontrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\})$, $J^n = -\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right)I + \left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)J$.

English translation

- In $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ set $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0&1\\-2&2\end{pmatrix}$, and consider $F = \left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b\\-2b&a+2b\end{pmatrix} \;/\; (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

(1) Show that $(F,+,\cdot)$ is a real vector space, then determine a basis and its dimension.

(2) Show that F is closed under multiplication in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(3) Let φ be the map from $\mathbb{C}$ to F sending each $z=a+ib$ with $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ to the matrix $M(a-b,b)$.

(a) Show that φ is a homomorphism from $(\mathbb{C}^*,\times)$ to $(F-\{O\},\times)$.

(b) Deduce the structure of $(F-\{O\},\times)$.

(c) Determine the structure of $(F,+,\times)$.

(d) Solve in F the equation $J\times X = 3J-4I$, where the unknown is the matrix X.

(4) Prove that $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\})$, $J^n = -\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right)I + \left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)J$.

مسألة 02 زمرة على القرص الوحدة

النص الأصلي بالعربية

- نعتبر المجموعة $G=\{z\in\mathbb{C},\ |z|<1\}$.

(1) بيّن أن $(\forall (z,z')\in G\times G)\,,\ 1+\overline{z}z'\neq 0$.

(2) لكل (z,z') من $G\times G$ نضع $z*z' = \frac{z+z'}{1+\overline{z}z'}$.

(a) بيّن أن $(\forall (z,z')\in G\times G)\,,\ |1+\overline{z}z'|^2-|z+z'|^2 = (1-|z|^2)(1-|z'|^2)$.

(b) استنتج أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة G.

(c) هل القانون $*$ تبادلي في المجموعة G؟ (علل جوابك.)

(d) بيّن أن $(G,*)$ زمرة غير تبادلية.

(3) نعتبر المجموعة $H_\theta=\{z=\alpha\cdot e^{i\theta},\ \alpha\in]-1,1[\}$ حيث $\theta\in\mathbb{R}$.

(a) تحقق من أن $(\forall (z,z')\in H_\theta\times H_\theta)$، $(\forall(\alpha,\alpha')\in]-1,1[\times]-1,1[)$; $z*z' = \frac{\alpha+\alpha'}{1+\alpha\cdot\alpha'}\cdot e^{i\theta}$.

(b) استنتج أن H_θ جزء مستقر من $(G,*)$، ثم بيّن أن $(H_\theta,*)$ زمرة تبادلية.

Traduction française

- On considère $G=\{z\in\mathbb{C},\ |z|<1\}$.

© Saad Choukri

(1) Montrer que $(\forall (z,z') \in G \times G)\,,\ 1+\overline{z}z' \neq 0$.

(2) Pour $(z,z') \in G \times G$ on pose $z * z' = \dfrac{z+z'}{1+\overline{z}z'}$.

(a) Montrer que $|1+\overline{z}z'|^2 - |z+z'|^2 = \left(1-|z|^2\right)\left(1-|z'|^2\right)$.

(b) En déduire que $*$ est une loi de composition interne dans G.

(c) La loi $*$ est-elle commutative dans G ? (Justifier.)

(d) Montrer que $(G,*)$ est un groupe non commutatif.

(3) On considère $H_\theta = \left\{z = \alpha \cdot e^{i\theta},\ \alpha \in]-1,1[\right\}$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) Vérifier que pour tous $z,z' \in H_\theta$ et $\alpha,\alpha' \in]-1,1[$: $z * z' = \dfrac{\alpha+\alpha'}{1+\alpha\cdot\alpha'} \cdot e^{i\theta}$.

(b) En déduire que H_θ est une partie stable de $(G,*)$, puis montrer que $(H_\theta,*)$ est un groupe commutatif.

English translation

- Consider $G = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$.

(1) Show that $(\forall (z,z') \in G \times G)\,,\ 1+\overline{z}z' \neq 0$.

(2) For $(z,z') \in G \times G$ set $z * z' = \dfrac{z+z'}{1+\overline{z}z'}$.

(a) Show that $|1+\overline{z}z'|^2 - |z+z'|^2 = \left(1-|z|^2\right)\left(1-|z'|^2\right)$.

(b) Deduce that $*$ is an internal composition law on G.

(c) Is the law $*$ commutative on G? (Justify your answer.)

(d) Show that $(G,*)$ is a non-commutative group.

(3) Consider $H_\theta = \left\{z = \alpha \cdot e^{i\theta},\ \alpha \in]-1,1[\right\}$, where $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) Check that for all $z,z' \in H_\theta$ and $\alpha,\alpha' \in]-1,1[$: $z * z' = \dfrac{\alpha+\alpha'}{1+\alpha\cdot\alpha'} \cdot e^{i\theta}$.

(b) Deduce that H_θ is closed in $(G,*)$, then show that $(H_\theta,*)$ is a commutative group.

مسألة 03 جسم من المصفوفات مشاكل لجسم الأعداد العقدية

النص الأصلي بالعربية

• لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ نضع $N(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -5b & a+2b \end{pmatrix}$ و نعتبر المجموعة $H = \{N(a,b) \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. نضع $I = N(1,0)$ و $J = N(0,1)$.

(1) (a) بيّن أن $(H,+)$ زمرة تبادلية.

(b) بيّن أن $J^2 = 2J - 5I$، ثم استنتج أن H جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

(c) بيّن أن $(H,+,\times)$ جسم تبادلي.

(2) ليكن $(\mathbb{C},+,\cdot)$ فضاء متجهيا بعده 2.

(a) بيّن أن الأسرة $(1,1+2i)$ أساس للفضاء $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

(b) استنتج أن كل عدد عقدي z يكتب بكيفية وحيدة على الشكل $z = a+b(1+2i)$، حيث $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

© Saad Choukri

(c) ليكن $z = a+b(1+2i)$ نعتبر التطبيق φ المعرف من $(\mathbb{C},+)$ نحو $(H,+)$، و الذي يربط كل عدد عقدي z بالمصفوفة $N(a,b)$. بيّن أن φ تشاكل تقابلي من $\mathbb{C}$ نحو H.

(d) بيّن أن $(\forall z, z' \in \mathbb{C})\,,\ \varphi(z \times z') = \varphi(z) \times \varphi(z')$.

(3) (a) أثبت أنه $\varphi\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{5\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$.

(b) لكل n من $\mathbb{N}^*$، بيّن أن $\left[\varphi\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^n = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) & \frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \\ -\frac{5}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$.

Traduction française

- Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on pose $N(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -5b & a+2b \end{pmatrix}$ et on considère $H = \left\{N(a,b) \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$, avec $I = N(1,0)$ et $J = N(0,1)$.

(1)(a) Montrer que $(H,+)$ est un groupe commutatif.
(b) Montrer que $J^2 = 2J - 5I$, puis en déduire que H est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.
(c) Montrer que $(H,+,\times)$ est un corps commutatif.

(2) Soit $(\mathbb{C},+,\cdot)$ l'espace vectoriel de dimension 2.
(a) Montrer que la famille $(1, 1+2i)$ est une base de $(\mathbb{C},+,\cdot)$.
(b) En déduire que tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique $z = a+b(1+2i)$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
(c) Soit $z = a+b(1+2i)$ et φ l'application de $(\mathbb{C},+)$ vers $(H,+)$ associant à z la matrice $N(a,b)$. Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$ vers H.
(d) Montrer que $(\forall z, z' \in \mathbb{C})\,,\ \varphi(z \times z') = \varphi(z) \times \varphi(z')$.

(3)(a) Établir que $\varphi\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{5\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$.
(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\left[\varphi\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^n = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) & \frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \\ -\frac{5}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$.

English translation

- For $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ set $N(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -5b & a+2b \end{pmatrix}$ and consider $H = \left\{N(a,b) \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$, with $I = N(1,0)$ and $J = N(0,1)$.

(1)(a) Show that $(H,+)$ is a commutative group.
(b) Show that $J^2 = 2J - 5I$, then deduce that H is closed in $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.
(c) Show that $(H,+,\times)$ is a commutative field.

(2) Let $(\mathbb{C},+,\cdot)$ be the vector space of dimension 2.
(a) Show that the family $(1, 1+2i)$ is a basis of $(\mathbb{C},+,\cdot)$.
(b) Deduce that every $z \in \mathbb{C}$ is written uniquely as $z = a+b(1+2i)$ with $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
(c) Let $z = a+b(1+2i)$ and let φ be the map from $(\mathbb{C},+)$ to $(H,+)$ sending z to $N(a,b)$. Show that φ is an isomorphism from $\mathbb{C}$ onto H.
(d) Show that $(\forall z, z' \in \mathbb{C})\,,\ \varphi(z \times z') = \varphi(z) \times \varphi(z')$.

© Saad Choukri

(3)(a) Prove that $\varphi\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{5\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}$.

(b) For every $n\in\mathbb{N}^*$, show that $\left[\varphi\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^n=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) & \frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\\ -\frac{5}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\end{pmatrix}$.

مسألة 04 عناصر منعدمة القوى وحلقة مصفوفات

النص الأصلي بالعربية

الجزء الأول

• لتكن $(A,+,\times)$ حلقة واحدية و ليكن a عنصرا من A بحيث: $(\exists n\in\mathbb{N}-\{0,1\})$;$a^n=0_A$ و $a^{n-1}\neq 0_A$.

(1) بيّن أن العنصر a لا يقبل مقلوبا في الحلقة $(A,+,\times)$.

(2) بيّن أن العنصر 1_A-a يقبل مقلوبا في الحلقة $(A,+,\times)$ ينبغي تحديده.

الجزء الثاني

• نعتبر المصفوفتين $H=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ و $K=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. و لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ نضع $M(a,b)=\begin{pmatrix}a+b & a-b\\ a-b & a+b\end{pmatrix}$، و نعتبر المجموعة الجزئية $\mathcal{M}=\{M(a,b)\ /\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(1) بيّن أن $(\mathcal{M},+)$ زمرة تبادلية.

(2) بيّن أن $\mathcal{M}$ مستقرة بالنسبة لضرب المصفوفات في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(3) استنتج أن $(\mathcal{M},+,\times)$ حلقة. هل هي كاملة؟

(4) بيّن أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*),\ (M(a,b))^n=2^{n-1}\left(a^n\cdot H+b^n\cdot K\right)$.

Traduction française

Première partie

• Soit $(A,+,\times)$ un anneau unitaire et $a\in A$ tel que $(\exists n\in\mathbb{N}-\{0,1\})$; $a^n=0_A$ et $a^{n-1}\neq 0_A$.

(1) Montrer que a n'est pas inversible dans $(A,+,\times)$.

(2) Montrer que 1_A-a est inversible dans $(A,+,\times)$ et déterminer son inverse.

© Saad Choukri

Deuxième partie

• Soient $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on pose $M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$, et on considère $\mathcal{M} = \{M(a,b) \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

(1) Montrer que $(\mathcal{M}, +)$ est un groupe commutatif.

(2) Montrer que $\mathcal{M}$ est stable pour le produit matriciel dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(3) En déduire que $(\mathcal{M}, +, \times)$ est un anneau. Est-il intègre ?

(4) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ (M(a,b))^n = 2^{n-1}\,(a^n \cdot H + b^n \cdot K)$.

English translation

Part One

• Let $(A, +, \times)$ be a unital ring and $a \in A$ such that $(\exists n \in \mathbb{N} - \{0,1\})$; $a^n = 0_A$ and $a^{n-1} \neq 0_A$.

(1) Show that a is not invertible in $(A, +, \times)$.

(2) Show that $1_A - a$ is invertible in $(A, +, \times)$ and determine its inverse.

Part Two

• Let $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ and $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. For $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ set $M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$, and consider $\mathcal{M} = \{M(a,b) \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

(1) Show that $(\mathcal{M}, +)$ is a commutative group.

(2) Show that $\mathcal{M}$ is closed under matrix multiplication in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(3) Deduce that $(\mathcal{M}, +, \times)$ is a ring. Is it an integral domain?

(4) Show that $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ (M(a,b))^n = 2^{n-1}\,(a^n \cdot H + b^n \cdot K)$.

مسألة 05 زمر جزئية مولدة بعنصر

النص الأصلي بالعربية

• لتكن $(G, *)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد e. لكل $a \in G$ نضع $a^0 = e$، $a^1 = a$، $a^{n+1} = a^n * a$ لكل n من $\mathbb{N}$، و ليكن a^{-1} مماثل a في $(G, *)$. نفترض أنه يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم ℓ بحيث $a^\ell = e$. نعتبر المجموعتين: $E = \{x \in G \mid (\exists k \in \mathbb{Z}),\ x = a^k\}$ و $F = \{x \in G \mid (\exists k \in \mathbb{Z}),\ x = b^k\}$، حيث $b = a^q$ مع q عدد صحيح طبيعي غير منعدم يخالف 1.

(1) بيّن أن $(E, *)$ زمرة جزئية للزمرة $(G, *)$ و أن $(F, *)$ زمرة جزئية للزمرة $(E, *)$.

(2) بيّن الاستلزام التالي: $\ell \wedge q = 1 \Longrightarrow E = F$.

Traduction française

© Saad Choukri

• Soit $(G,*)$ un groupe commutatif d'élément neutre e. Pour $a \in G$ on pose $a^0 = e$, $a^1 = a$, $a^{n+1} = a^n * a$ pour $n \in \mathbb{N}$, et a^{-1} désigne le symétrique de a dans $(G,*)$. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^\ell = e$. On considère $E = \{x \in G \mid (\exists k \in \mathbb{Z}),\ x = a^k\}$ et $F = \{x \in G \mid (\exists k \in \mathbb{Z}),\ x = b^k\}$, où $b = a^q$ avec $q \in \mathbb{N}^*$, $q \neq 1$.

(1) Montrer que $(E,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$ et que $(F,*)$ est un sous-groupe de $(E,*)$.

(2) Montrer l'implication : $\ell \wedge q = 1 \Longrightarrow E = F$.

English translation

• Let $(G,*)$ be a commutative group with identity element e. For $a \in G$ set $a^0 = e$, $a^1 = a$, $a^{n+1} = a^n * a$ for $n \in \mathbb{N}$, and let a^{-1} be the symmetric of a in $(G,*)$. Assume there exists $\ell \in \mathbb{N}^*$ with $a^\ell = e$. Consider $E = \{x \in G \mid (\exists k \in \mathbb{Z}),\ x = a^k\}$ and $F = \{x \in G \mid (\exists k \in \mathbb{Z}),\ x = b^k\}$, where $b = a^q$ with $q \in \mathbb{N}^*$, $q \neq 1$.

(1) Show that $(E,*)$ is a subgroup of $(G,*)$ and that $(F,*)$ is a subgroup of $(E,*)$.

(2) Prove the implication: $\ell \wedge q = 1 \Longrightarrow E = F$.

مسألة 06 زمرة على مجال بواسطة دالة الظل

النص الأصلي بالعربية

• في المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ نعرف قانون التركيب الداخلي $\star$ كما يلي: $\left(\forall (x,y) \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[^2\right),\quad x \star y = \arctan\left(\sqrt{3} + \tan(x) + \tan(y)\right)$.

(1) بيّن أن $\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\star\right)$ زمرة تبادلية.

(2) لكل x من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ نضع $f(x) = \sqrt{3} + \tan(x)$.

(a) بيّن أن f تشاكل تقابلي من $\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\star\right)$ نحو $(\mathbb{R},+)$.

(b) استنتج مرة أخرى بنية $\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\star\right)$.

(c) بيّن أن المجموعة $\left\{\arctan\left(\ln(x) - \sqrt{3}\right) \ / \ x > 0\right\}$ زمرة جزئية من $\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\star\right)$.

(3) لكل x من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ نضع $x^{(n)} = \underbrace{x \star x \cdots \star x}_{n \text{ مرة}}$، حيث $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) حدد تعبير $x^{(n)}$ بدلالة x و n.

(b) حل في المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ المعادلة التالية: $x^{(2016)} = x + \frac{\pi}{2017}$.

Traduction française

• Sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ on définit la loi interne $\star$ par $x \star y = \arctan\left(\sqrt{3} + \tan(x) + \tan(y)\right)$.

(1) Montrer que $\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\star\right)$ est un groupe commutatif.

(2) Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ on pose $f(x) = \sqrt{3} + \tan(x)$.

(a) Montrer que f est un isomorphisme de $\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\star\right)$ vers $(\mathbb{R},+)$.

(b) En déduire de nouveau la structure de $\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\star\right)$.

(c) Montrer que $\left\{\arctan\left(\ln(x) - \sqrt{3}\right) \ / \ x > 0\right\}$ est un sous-groupe de $\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\star\right)$.

© Saad Choukri

(3) Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on pose $x^{(n)} = \underbrace{x \star x \cdots \star x}_{n \text{ fois}}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Déterminer l'expression de $x^{(n)}$ en fonction de x et n.

(b) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation $x^{(2016)} = x + \dfrac{\pi}{2017}$.

English translation

- On $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ define the internal law $\star$ by $x \star y = \arctan\left(\sqrt{3} + \tan(x) + \tan(y)\right)$.

(1) Show that $\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \star\right)$ is a commutative group.

(2) For $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ set $f(x) = \sqrt{3} + \tan(x)$.

(a) Show that f is an isomorphism from $\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \star\right)$ onto $(\mathbb{R}, +)$.

(b) Deduce again the structure of $\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \star\right)$.

(c) Show that $\left\{\arctan\left(\ln(x) - \sqrt{3}\right) \ / \ x > 0\right\}$ is a subgroup of $\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \star\right)$.

(3) For $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ set $x^{(n)} = \underbrace{x \star x \cdots \star x}_{n \text{ times}}$, with $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Determine the expression of $x^{(n)}$ in terms of x and n.

(b) Solve in $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ the equation $x^{(2016)} = x + \dfrac{\pi}{2017}$.

مسألة 07 زمرة غير تبادلية وحلقة مصفوفات

النص الأصلي بالعربية

الجزء الأول

- نزود $G = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي $\top$ المعرف كما يلي: $\forall (x,y) \in G,\ \forall (x',y') \in G;\ (x,y)\top(x',y') = (xx',\ \sqrt[n]{x}\,y' + x'y)$، حيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

(1) بيّن أن $(G, \top)$ زمرة غير تبادلية.

(2) أثبت أن $(H, \top)$ زمرة تبادلية، حيث $H = \{(1,y) \ / \ y \in \mathbb{Z}\}$.

الجزء الثاني

- نعتبر المجموعة الجزئية $D = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt[n]{x} & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \ / \ (x,y) \in G \right\}$.

(1) بيّن أن D جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

(2) بيّن أن التطبيق φ الذي يربط كل زوج (x,y) بالمصفوفة $M(x,y)$ تشاكل تقابلي من $(G, \top)$ نحو $(D, \times)$، ثم استنتج بنية $(D, \times)$ محددا مقلوب المصفوفة $M(x,y)$.

© Saad Choukri

(3) نضع $A = M(1,1)$ و $I = M(1,0)$، و نعتبر المجموعة $F = \{aI + bA \ / \ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

(a) تحقق من أن $A^2 = 2A - I$.

(b) بيّن أن $(F, +, \times)$ حلقة تبادلية و واحدية.

(c) هل $(F, +, \times)$ جسم؟ و هل هي حلقة كاملة؟

Traduction française

Première partie

• On munit $G = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de la loi interne $\top$ définie par $(x,y)\top(x',y') = (xx', \ \sqrt[n]{x}\,y' + x'y)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Montrer que $(G, \top)$ est un groupe non commutatif.

(2) Établir que $(H, \top)$ est un groupe commutatif, où $H = \{(1,y) \ / \ y \in \mathbb{Z}\}$.

Deuxième partie

• On considère $D = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt[n]{x} & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \ / \ (x,y) \in G \right\}$.

(1) Montrer que D est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

(2) Montrer que l'application φ qui à (x,y) associe $M(x,y)$ est un isomorphisme de $(G, \top)$ vers $(D, \times)$, puis en déduire la structure de $(D, \times)$ en précisant l'inverse de $M(x,y)$.

(3) On pose $A = M(1,1)$ et $I = M(1,0)$, et on considère $F = \{aI + bA \ / \ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

(a) Vérifier que $A^2 = 2A - I$.

(b) Montrer que $(F, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

(c) $(F, +, \times)$ est-il un corps ? Est-ce un anneau intègre ?

English translation

Part One

• Equip $G = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ with the internal law $\top$ defined by $(x,y)\top(x',y') = (xx', \ \sqrt[n]{x}\,y' + x'y)$, where $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Show that $(G, \top)$ is a non-commutative group.

(2) Prove that $(H, \top)$ is a commutative group, where $H = \{(1,y) \ / \ y \in \mathbb{Z}\}$.

Part Two

• Consider $D = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt[n]{x} & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \ / \ (x,y) \in G \right\}$.

(1) Show that D is closed in $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

(2) Show that the map φ sending (x,y) to $M(x,y)$ is an isomorphism from $(G, \top)$ onto $(D, \times)$, then deduce the structure of $(D, \times)$, giving the inverse of $M(x,y)$.

(3) Put $A = M(1,1)$ and $I = M(1,0)$, and consider $F = \{aI + bA \ / \ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

© Saad Choukri

(a) Check that $A^2 = 2A - I$.

(b) Show that $(F, +, \times)$ is a commutative unital ring.

(c) Is $(F, +, \times)$ a field? Is it an integral domain?

مسألة 08 زمرة على مجال ومتتالية حلول

النص الأصلي بالعربية

• في المجال $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ نعرف قانون التركيب الداخلي $*$ بما يلي: $\forall (x,y) \in I^2,\ x * y = \arctan\left(\tan(x) + \tan(y) - 1\right)$.

(1) بيّن أن $(I, *)$ زمرة تبادلية.

(2) لكل x من I نضع $f(x) = \tan(x) - 1$.

(a) بيّن أن f تقابل من I نحو $\mathbb{R}$، محددا تقابله العكسي f^{-1}.

(b) بيّن أن f^{-1} تشاكل من $(\mathbb{R}, +)$ نحو $(I, *)$.

(c) استنتج مرة أخرى بنية $(I, *)$.

(3) لكل x من I نضع $x^{(n)} = x*x*\cdots*x$ (تتم العملية n مرة). نعتبر في المجموعة I المعادلة $(E_n) : x^{(n)} + x^3 = 0$.

(a) بيّن أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا α_n في المجال I، حيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

(b) أثبت أنه لكل n عدد صحيح طبيعي غير منعدم لدينا $0 \leq \alpha_n < \frac{\pi}{4}$.

(c) برهن على أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محددا نهايتها.

Traduction française

• Sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on définit la loi interne $*$ par $\forall (x,y) \in I^2,\ x*y = \arctan\left(\tan(x) + \tan(y) - 1\right)$.

(1) Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.

(2) Pour $x \in I$ on pose $f(x) = \tan(x) - 1$.

(a) Montrer que f est une bijection de I vers $\mathbb{R}$, en précisant f^{-1}.

(b) Montrer que f^{-1} est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(I, *)$.

(c) En déduire de nouveau la structure de $(I, *)$.

(3) Pour $x \in I$ on pose $x^{(n)} = x * x * \cdots * x$ (n fois). On considère dans I l'équation (E_n) : $x^{(n)} + x^3 = 0$.

(a) Montrer que (E_n) admet une unique solution α_n dans I, $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \alpha_n < \frac{\pi}{4}$.

(c) Démontrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

English translation

• On $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ define the internal law $*$ by $\forall (x,y) \in I^2,\ x*y = \arctan\left(\tan(x) + \tan(y) - 1\right)$.

(1) Show that $(I, *)$ is a commutative group.

© Saad Choukri

(2) For $x \in I$ set $f(x) = \tan(x) - 1$.

(a) Show that f is a bijection from I onto $\mathbb{R}$, giving f^{-1}.

(b) Show that f^{-1} is a homomorphism from $(\mathbb{R}, +)$ to $(I, *)$.

(c) Deduce again the structure of $(I, *)$.

(3) For $x \in I$ set $x^{(n)} = x * x * \cdots * x$ (n times). Consider in I the equation $(E_n) : x^{(n)} + x^3 = 0$.

(a) Show that (E_n) has a unique solution α_n in I, where $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Prove that for every $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \alpha_n < \dfrac{\pi}{4}$.

(c) Prove that $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converges and determine its limit.

مسألة 09 جسم من المصفوفات وتشاكل ضربي

النص الأصلي بالعربية

• لكل (a, b) من $\mathbb{R}^2$ نعتبر المصفوفة $M(a,b) = \begin{pmatrix} a + \dfrac{b}{\sqrt{2}} & -\dfrac{b}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{3b}{\sqrt{2}} & a - \dfrac{b}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ في الحلقة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ نعتبر المجموعة $H = \{M(a,b) \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

(1) بيّن أن $(H, +)$ زمرة تبادلية.

(2) بيّن أن H جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

(3) بيّن أن التطبيق ϕ الذي يربط كل عدد عقدي $z = a + ib$ بالمصفوفة $M(a,b)$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(H - \{O\}, \times)$.

(4) استنتج أن $(H, +, \times)$ جسم تبادلي.

Traduction française

• Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on considère $M(a,b) = \begin{pmatrix} a + \dfrac{b}{\sqrt{2}} & -\dfrac{b}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{3b}{\sqrt{2}} & a - \dfrac{b}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ et, dans l'anneau $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$, l'ensemble $H = \{M(a,b) \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

(1) Montrer que $(H, +)$ est un groupe commutatif.

(2) Montrer que H est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

(3) Montrer que l'application ϕ qui à tout $z = a + ib$ associe $M(a,b)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(H - \{O\}, \times)$.

(4) En déduire que $(H, +, \times)$ est un corps commutatif.

English translation

• For $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ consider $M(a,b) = \begin{pmatrix} a + \dfrac{b}{\sqrt{2}} & -\dfrac{b}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{3b}{\sqrt{2}} & a - \dfrac{b}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ and, in the ring $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$, the

© Saad Choukri

set $H = \{M(a,b) \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

(1) Show that $(H,+)$ is a commutative group.

(2) Show that H is closed in $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

(3) Show that the map ϕ sending each $z = a+ib$ to $M(a,b)$ is an isomorphism from $(\mathbb{C}^*,\times)$ onto $(H-\{O\},\times)$.

(4) Deduce that $(H,+,\times)$ is a commutative field.

مسألة 10 قانون تركيب لوغاريتمي

النص الأصلي بالعربية

• نعرف على $\mathbb{R}$ قانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي: $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a*b=\ln\left(e^a+e^b\right)$.

(1) (a) هل القانون $*$ تجميعي؟

(b) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $(x*x)*x=0$.

(2) بيّن أنه: $(\exists x\in\mathbb{R}),\ a*x=b$ إذا و فقط إذا كان $b>a$. هل هو وحيد؟

(3) تحقق من أنه لكل a و b و c من $\mathbb{R}$: $a+(b*c)=(a+b)*(a+c)$. هل الجمع $+$ توزيعي بالنسبة للقانون $*$؟

Traduction française

• On définit sur $\mathbb{R}$ la loi interne $*$ par $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a*b=\ln\left(e^a+e^b\right)$.

(1)(a) La loi $*$ est-elle associative ?

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x*x)*x=0$.

(2) Montrer que : $(\exists x\in\mathbb{R}),\ a*x=b$ si et seulement si $b>a$. Est-il unique ?

(3) Vérifier que pour tous a, b, c de $\mathbb{R}$: $a+(b*c)=(a+b)*(a+c)$. L'addition $+$ est-elle distributive par rapport à la loi $*$?

English translation

• On $\mathbb{R}$ define the internal law $*$ by $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a*b=\ln\left(e^a+e^b\right)$.

(1)(a) Is the law $*$ associative?

(b) Solve in $\mathbb{R}$ the equation $(x*x)*x=0$.

(2) Show that: $(\exists x\in\mathbb{R}),\ a*x=b$ if and only if $b>a$. Is it unique?

(3) Check that for all a, b, c in $\mathbb{R}$: $a+(b*c)=(a+b)*(a+c)$. Is addition $+$ distributive with respect to the law $*$?

© Saad Choukri

المحور 4

الحسابيات

Arithmétique ▪ Arithmetic

مسألة 01 ظل نسبي وقوى العدد اثنين

النص الأصلي بالعربية

• ليكن $n \in \mathbb{N}$. نفترض أن $n \geq 5$ و أنه يوجد زوج (a,b) من $\mathbb{N}^{*2}$ بحيث $\tan\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{a}{b}$، مع a و b أوليان فيما بينهما. نضع $z = a + ib$ و $\theta = \arg(z) \in]-\pi, \pi[$.

(1) احسب θ بدلالة a و b، ثم بيّن أن $(a+ib)^n = (a-ib)^n$.

(2) استنتج أن $-2(2ib)^{n-1} = (a-ib)\left(\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (a-ib)^{n-1-k}(2ib)^{k-1}\right)$.

(3) استنتج أن a^2+b^2 يقسم $(2b)^{2n-2}$.

(4) استنتج أن $\exists k \in \{1,2,\cdots,2n-2\}$; $a^2+b^2 = 2^k$.

(5) بيّن أن $k=1$، ثم استنتج أن $n=8$.

Traduction française

• Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$. On suppose qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $\tan\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{a}{b}$, avec a et b premiers entre eux. On pose $z = a + ib$ et $\theta = \arg(z) \in]-\pi, \pi[$.

(1) Calculer θ en fonction de a et b, puis montrer que $(a+ib)^n = (a-ib)^n$.

(2) En déduire que $-2(2ib)^{n-1} = (a-ib)\left(\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (a-ib)^{n-1-k}(2ib)^{k-1}\right)$.

(3) En déduire que a^2+b^2 divise $(2b)^{2n-2}$.

(4) En déduire qu'il existe $k \in \{1,2,\cdots,2n-2\}$ tel que $a^2+b^2 = 2^k$.

(5) Montrer que $k=1$, puis en déduire que $n=8$.

English translation

• Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$. Assume there exists $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ with $\tan\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{a}{b}$, where a and b are coprime. Put $z = a + ib$ and $\theta = \arg(z) \in]-\pi, \pi[$.

(1) Compute θ in terms of a and b, then show that $(a+ib)^n = (a-ib)^n$.

(2) Deduce that $-2(2ib)^{n-1} = (a-ib)\left(\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (a-ib)^{n-1-k}(2ib)^{k-1}\right)$.

(3) Deduce that a^2+b^2 divides $(2b)^{2n-2}$.

(4) Deduce that there exists $k \in \{1, 2, \cdots, 2n-2\}$ with $a^2+b^2 = 2^k$.

(5) Show that $k = 1$, then deduce that $n = 8$.

مسألة 02 أعداد أولية من الشكل $4k+1$ ومسائل قابلية القسمة

النص الأصلي بالعربية

الجزء الأول

• ليكن p عددا أوليا بحيث $p \geq 3$، و ليكن x عددا من $\mathbb{Z}$ بحيث $x^2+1 \equiv 0\ [p]$.

(1) بيّن أن $p \equiv 1\ [4]$. (يمكنك استعمال مبرهنة فيرما.)

(2) لتكن I مجموعة الأعداد الأولية التي تكتب على شكل $4k+1$. نضع $P = \left(2\prod_{p_i \in I} p_i\right)^2 + 1$.

(a) بيّن أن 3 لا يقسم P.

(b) أثبت أنه $p \mid P \Longrightarrow p \equiv 1\ [4]$.

(c) استنتج أن المجموعة I غير منتهية.

الجزء الثاني

(1) ليكن $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ بحيث $a \neq b$ و $ab(a+b)$ يقبل القسمة على a^2+ab+b^2. بيّن أنه $\dfrac{|a-b|}{\sqrt[3]{ab}} > 1$.

(2) بيّن أنه لكل زوج (a,b) من $\mathbb{N}^{*2}$ بحيث $a \wedge b = 1$ و $ab = c^n$ مع $(c,n) \in \mathbb{N}^{*2}$؛ يوجد زوج $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^{*2}$ يحقق $(a,b) = (\alpha^n, \beta^n)$.

الجزء الثالث

• ليكن $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ بحيث $a^2 = 2b^2+1$.

(1) بيّن أن $a \wedge b = 1$.

(2) بيّن أن $(a+1) \wedge (a-1) = 2$.

© Saad Choukri

(3) بيّن أن أحد العددين $a-1$ و $a+1$ لا يقبل القسمة على 4.

(4) نفترض أن $a-1$ لا يقبل القسمة على 4.

(a) بيّن أنه $(a+1)\wedge\left(\dfrac{a-1}{2}\right)=1$.

(b) استنتج أن العددين $\sqrt{\dfrac{a-1}{2}}$ و $\sqrt{a+1}$ عددان صحيحان طبيعيان يقبلان القسمة عليهما العدد b.

(5) نفترض أن $p^3=3q^3+1$ حيث $(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}$. بيّن أنه إذا كان 9 لا يقسم $(p-1)$ فإن العددين $\sqrt[3]{\dfrac{p-1}{3}}$ و $\sqrt[3]{p^2+p+1}$ عددان صحيحان طبيعيان و يقسمان العدد q.

Traduction française

Première partie

- Soit p un nombre premier avec $p\geq 3$, et $x\in\mathbb{Z}$ tel que $x^2+1\equiv 0\ [p]$.

(1) Montrer que $p\equiv 1\ [4]$. (On pourra utiliser le théorème de Fermat.)

(2) Soit I l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k+1$. On pose $P=\left(2\prod_{p_i\in I}p_i\right)^2+1$.

(a) Montrer que 3 ne divise pas P.

(b) Établir que $p\,|\,P\Longrightarrow p\equiv 1\ [4]$.

(c) En déduire que I est infini.

Deuxième partie

(1) Soit $(a,b)\in\mathbb{N}^{*2}$ avec $a\neq b$ et a^2+ab+b^2 divisant $ab(a+b)$. Montrer que $\dfrac{|a-b|}{\sqrt[3]{ab}}>1$.

(2) Montrer que pour tout $(a,b)\in\mathbb{N}^{*2}$ tel que $a\wedge b=1$ et $ab=c^n$ avec $(c,n)\in\mathbb{N}^{*2}$, il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^{*2}$ vérifiant $(a,b)=(\alpha^n,\beta^n)$.

Troisième partie

- Soit $(a,b)\in\mathbb{N}^{*2}$ tel que $a^2=2b^2+1$.

(1) Montrer que $a\wedge b=1$.

(2) Montrer que $(a+1)\wedge(a-1)=2$.

(3) Montrer que l'un des deux nombres $a-1$ et $a+1$ n'est pas divisible par 4.

(4) On suppose que $a-1$ n'est pas divisible par 4.

(a) Montrer que $(a+1)\wedge\left(\dfrac{a-1}{2}\right)=1$.

(b) En déduire que $\sqrt{\dfrac{a-1}{2}}$ et $\sqrt{a+1}$ sont des entiers naturels qui divisent b.

(5) On suppose $p^3=3q^3+1$ avec $(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}$. Montrer que si 9 ne divise pas $(p-1)$, alors $\sqrt[3]{\dfrac{p-1}{3}}$ et $\sqrt[3]{p^2+p+1}$ sont des entiers naturels qui divisent q.

© Saad Choukri

English translation

Part One

- Let p be a prime with $p \geq 3$, and $x \in \mathbb{Z}$ with $x^2 + 1 \equiv 0\ [p]$.

(1) Show that $p \equiv 1\ [4]$. (Fermat's theorem may be used.)

(2) Let I be the set of primes of the form $4k+1$. Put $P = \left(2\prod_{p_i \in I} p_i\right)^2 + 1$.

(a) Show that 3 does not divide P.

(b) Prove that $p \mid P \Longrightarrow p \equiv 1\ [4]$.

(c) Deduce that I is infinite.

Part Two

(1) Let $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ with $a \neq b$ and $a^2 + ab + b^2$ dividing $ab(a+b)$. Show that $\dfrac{|a-b|}{\sqrt[3]{ab}} > 1$.

(2) Show that for every $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ with $a \wedge b = 1$ and $ab = c^n$, $(c,n) \in \mathbb{N}^{*2}$, there exists $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^{*2}$ such that $(a,b) = (\alpha^n, \beta^n)$.

Part Three

- Let $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ with $a^2 = 2b^2 + 1$.

(1) Show that $a \wedge b = 1$.

(2) Show that $(a+1) \wedge (a-1) = 2$.

(3) Show that one of the two numbers $a-1$ and $a+1$ is not divisible by 4.

(4) Assume $a-1$ is not divisible by 4.

(a) Show that $(a+1) \wedge \left(\dfrac{a-1}{2}\right) = 1$.

(b) Deduce that $\sqrt{\dfrac{a-1}{2}}$ and $\sqrt{a+1}$ are natural integers dividing b.

(5) Assume $p^3 = 3q^3 + 1$ with $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$. Show that if 9 does not divide $(p-1)$, then $\sqrt[3]{\dfrac{p-1}{3}}$ and $\sqrt[3]{p^2+p+1}$ are natural integers dividing q.

مسألة 03 موافقات وبواقي القسمة الإقليدية

النص الأصلي بالعربية

(1) (a) حدد باقي القسمة الإقليدية للعدد 2017^{2017} على 7.

(b) حدد، تبعا لقيم العدد الصحيح الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.

© Saad Choukri

(c) استنتج أن $2017^{2017}+6\equiv 0\ [77]$.

(2) لكل n من $\mathbb{N}$ نضع $a=2017^{2017}$ و $\alpha_n=\sum_{k=0}^{n}2017^k$، و نعتبر في $\mathbb{Z}$ المعادلة التالية: $(E): ax+\alpha_n\equiv 0\ [11]$.

(a) بيّن أنه إذا كان x حلا للمعادلة (E)، فإن $x\equiv 2\alpha_n\ [11]$.

(b) حدد مجموعة حلول المعادلة (E)، ثم استنتج حلولها القابلة للقسمة على 11.

Traduction française

(1)(a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2017^{2017} par 7.

(b) Déterminer, suivant les valeurs de $n\in\mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de 4^n par 11.

(c) En déduire que $2017^{2017}+6\equiv 0\ [77]$.

(2) Pour $n\in\mathbb{N}$ on pose $a=2017^{2017}$ et $\alpha_n=\sum_{k=0}^{n}2017^k$, et on considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E): ax+\alpha_n\equiv 0\ [11]$.

(a) Montrer que si x est solution de (E), alors $x\equiv 2\alpha_n\ [11]$.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E), puis en déduire celles qui sont divisibles par 11.

English translation

(1)(a) Determine the remainder of the Euclidean division of 2017^{2017} by 7.

(b) Determine, according to the values of $n\in\mathbb{N}$, the remainder of the Euclidean division of 4^n by 11.

(c) Deduce that $2017^{2017}+6\equiv 0\ [77]$.

(2) For $n\in\mathbb{N}$ put $a=2017^{2017}$ and $\alpha_n=\sum_{k=0}^{n}2017^k$, and consider in $\mathbb{Z}$ the equation (E) : $ax+\alpha_n\equiv 0\ [11]$.

(a) Show that if x is a solution of (E), then $x\equiv 2\alpha_n\ [11]$.

(b) Determine the solution set of (E), then deduce those solutions divisible by 11.

مسألة 04 أعداد أولية من الشكل $3k+1$

النص الأصلي بالعربية

الجزء الأول

- ليكن $a\in\mathbb{Z}$ و ليكن p عددا أوليا أكبر قطعا من 5 بحيث p يقسم العدد a^2+a+1.

(1) بيّن أن $a^3\equiv 1\ [p]$. (لاحظ أن $a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$).

© Saad Choukri

(2) بيّن أن $p \wedge (a-1) = 1$ و $p \wedge (a+1) = 1$.

(3) باستعمال ما سبق، أثبت أن أصغر عدد صحيح طبيعي غير منعدم k يحقق $a^k \equiv 1\ [p]$ هو $k = 3$. (يمكنك استعمال البرهان بالخلف.)

(4) بتطبيق مبرهنة فيرما، بيّن أن $p \equiv 1\ [3]$.

الجزء الثاني

- لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $A_n = (3(n!))^2 + 3(n!) + 1$.

(1) بيّن أن لكل n من $\mathbb{N}^*$، العدد A_n يقبل قاسما أوليا p_n بحيث $p_n > n$ و $p_n \equiv 1\ [3]$. (استعمل نتيجة السؤال 4 من الجزء الأول.)

(2) استنتج أنه توجد مالانهاية من الأعداد الأولية الموجبة التي تكتب على الشكل $3k+1$، حيث $k \in \mathbb{N}^*$.

Traduction française

Première partie

- Soit $a \in \mathbb{Z}$ et p un nombre premier strictement supérieur à 5 tel que p divise $a^2 + a + 1$.

(1) Montrer que $a^3 \equiv 1\ [p]$. (Remarquer que $a^3 - 1 = (a-1)(a^2+a+1)$.)

(2) Montrer que $p \wedge (a-1) = 1$ et $p \wedge (a+1) = 1$.

(3) En utilisant ce qui précède, établir que le plus petit entier naturel non nul k vérifiant $a^k \equiv 1\ [p]$ est $k = 3$. (On pourra raisonner par l'absurde.)

(4) En appliquant le théorème de Fermat, montrer que $p \equiv 1\ [3]$.

Deuxième partie

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $A_n = (3(n!))^2 + 3(n!) + 1$.

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n admet un diviseur premier p_n tel que $p_n > n$ et $p_n \equiv 1\ [3]$. (Utiliser le résultat de la question 4 de la première partie.)

(2) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers positifs de la forme $3k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

English translation

Part One

- Let $a \in \mathbb{Z}$ and let p be a prime strictly greater than 5 such that p divides $a^2 + a + 1$.

(1) Show that $a^3 \equiv 1\ [p]$. (Note that $a^3 - 1 = (a-1)(a^2+a+1)$.)

(2) Show that $p \wedge (a-1) = 1$ and $p \wedge (a+1) = 1$.

(3) Using the above, prove that the smallest non-zero natural integer k with $a^k \equiv 1\ [p]$ is $k = 3$. (A proof by contradiction may be used.)

(4) Applying Fermat's theorem, show that $p \equiv 1\ [3]$.

© Saad Choukri

Part Two

- For $n \in \mathbb{N}^*$ put $A_n = (3(n!))^2 + 3(n!) + 1$.

(1) Show that for every $n \in \mathbb{N}^*$, A_n has a prime divisor p_n with $p_n > n$ and $p_n \equiv 1\ [3]$. (Use the result of question 4 of Part One.)

(2) Deduce that there are infinitely many positive primes of the form $3k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

مسألة 05 قواسم مجموع قوى رابعة

النص الأصلي بالعربية

- نضع $D = a^4 + b^4$، حيث $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ و $a \wedge b = 1$.

(1) (a) بيّن أن $(\forall k \in \mathbb{Z})\,,\ (2k+1)^4 \equiv 1\ [16]$.

(b) استنتج أن $D \equiv 1\ [16]$ أو $D \equiv 2\ [16]$.

(2) ليكن p قاسما أوليا فرديا للعدد D.

(a) بيّن أن $p \wedge a = 1$.

(b) بيّن أنه يوجد عدد صحيح نسبي c بحيث $(ac)^4 \equiv -1\ [p]$. (استعمل مبرهنة بيزو و السؤال السابق.)

(c) استنتج أن $(\exists x \in \mathbb{Z})\,,\ x^r \equiv -1\ [p]$، حيث r هو باقي القسمة الإقليدية للعدد p على 8.

(d) أثبت أن $p \equiv 1\ [8]$. (يمكنك استعمال البرهان بفصل الحالات.)

Traduction française

- On pose $D = a^4 + b^4$, où $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ et $a \wedge b = 1$.

(1)(a) Montrer que $(\forall k \in \mathbb{Z})\,,\ (2k+1)^4 \equiv 1\ [16]$.

(b) En déduire que $D \equiv 1\ [16]$ ou $D \equiv 2\ [16]$.

(2) Soit p un diviseur premier impair de D.

(a) Montrer que $p \wedge a = 1$.

(b) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{Z}$ tel que $(ac)^4 \equiv -1\ [p]$. (Utiliser le théorème de Bézout et la question précédente.)

(c) En déduire que $(\exists x \in \mathbb{Z})\,,\ x^r \equiv -1\ [p]$, où r est le reste de la division euclidienne de p par 8.

(d) Établir que $p \equiv 1\ [8]$. (On pourra raisonner par disjonction des cas.)

English translation

- Put $D = a^4 + b^4$, where $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ and $a \wedge b = 1$.

(1)(a) Show that $(\forall k \in \mathbb{Z})\,,\ (2k+1)^4 \equiv 1\ [16]$.

(b) Deduce that $D \equiv 1\ [16]$ or $D \equiv 2\ [16]$.

(2) Let p be an odd prime divisor of D.

© Saad Choukri

(a) Show that $p \wedge a = 1$.

(b) Show that there exists $c \in \mathbb{Z}$ with $(ac)^4 \equiv -1\ [p]$. (Use Bézout's theorem and the previous question.)

(c) Deduce that $(\exists x \in \mathbb{Z})\,,\ x^r \equiv -1\ [p]$, where r is the remainder of the Euclidean division of p by 8.

(d) Prove that $p \equiv 1\ [8]$. (A case-by-case argument may be used.)

مسألة 06 متتالية تراجعية وأعداد أولية فيما بينها

النص الأصلي بالعربية

• لتكن $(a_n)_{n\geq 0}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $a_0 = 2$، $a_1 = 2a+1$ و $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ a_{n+2} = (2a+1)a_{n+1} - a(a+1)a_n$، حيث $a \in \mathbb{N}^*$.

(1) بيّن أن $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ a_{n+1} \wedge [a(a+1)] = 1$.

(2) بيّن أن $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ a_{n+1} \wedge a_n = 1$.

(3) بيّن أن $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ a_{2n+1} \equiv 0\ [2a+1]$.

(4) (a) بيّن الاستلزام التالي: $\big((\forall(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{Z}^3)\,,\ \alpha \wedge \beta = 1 \text{ و } \gamma \,|\, \alpha\big) \Rightarrow \alpha \wedge \beta\gamma = |\gamma|$.

(b) استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ a_{2n+3} \wedge a_{2n+1} = 1$.

Traduction française

• Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_0 = 2$, $a_1 = 2a+1$ et $a_{n+2} = (2a+1)a_{n+1} - a(a+1)a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $a \in \mathbb{N}^*$.

(1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ a_{n+1} \wedge [a(a+1)] = 1$.

(2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ a_{n+1} \wedge a_n = 1$.

(3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ a_{2n+1} \equiv 0\ [2a+1]$.

(4)(a) Montrer l'implication suivante : $\big((\forall(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{Z}^3)\,,\ \alpha \wedge \beta = 1 \text{ et } \gamma \,|\, \alpha\big) \Rightarrow \alpha \wedge \beta\gamma = |\gamma|$.

(b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ a_{2n+3} \wedge a_{2n+1} = 1$.

English translation

• Let $(a_n)_{n\geq 0}$ be defined by $a_0 = 2$, $a_1 = 2a+1$ and $a_{n+2} = (2a+1)a_{n+1} - a(a+1)a_n$ for every $n \in \mathbb{N}$, where $a \in \mathbb{N}^*$.

(1) Show that $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ a_{n+1} \wedge [a(a+1)] = 1$.

(2) Show that $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ a_{n+1} \wedge a_n = 1$.

(3) Show that $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ a_{2n+1} \equiv 0\ [2a+1]$.

(4)(a) Prove the following implication: $\big((\forall(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{Z}^3)\,,\ \alpha \wedge \beta = 1 \text{ and } \gamma \,|\, \alpha\big) \Rightarrow \alpha \wedge \beta\gamma = |\gamma|$.

(b) Deduce that $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ a_{2n+3} \wedge a_{2n+1} = 1$.

© Saad Choukri

مسألة 07 العدد الأولي 2017 ومجموعتان

النص الأصلي بالعربية

• ليكن k من $\mathbb{Z}-\{2\}$. نضع $\varphi(k)=\dfrac{k+2015}{k-2}$.

(1) (a) بيّن أن $(k-2)\wedge(k+2015)=(k-2)\wedge 2017$.

(b) تحقق من أن 2017 عدد أولي.

(c) حدد بتفصيل المجموعة التالية: $H_1=\{\varphi(k)\in\mathbb{Z}\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$.

(2) بيّن أن $\alpha\wedge\beta=1\Rightarrow\beta^2\wedge\left(\alpha^2-\beta^2\right)=1$.

(3) حدد بتفصيل المجموعة التالية: $H_2=\left\{\sqrt{\varphi(k)}\in\mathbb{Q}\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Traduction française

• Soit $k\in\mathbb{Z}-\{2\}$. On pose $\varphi(k)=\dfrac{k+2015}{k-2}$.

(1)(a) Montrer que $(k-2)\wedge(k+2015)=(k-2)\wedge 2017$.

(b) Vérifier que 2017 est un nombre premier.

(c) Déterminer explicitement l'ensemble $H_1=\{\varphi(k)\in\mathbb{Z}\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$.

(2) Montrer que $\alpha\wedge\beta=1\Rightarrow\beta^2\wedge\left(\alpha^2-\beta^2\right)=1$.

(3) Déterminer explicitement l'ensemble $H_2=\left\{\sqrt{\varphi(k)}\in\mathbb{Q}\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

English translation

• Let $k\in\mathbb{Z}-\{2\}$. Put $\varphi(k)=\dfrac{k+2015}{k-2}$.

(1)(a) Show that $(k-2)\wedge(k+2015)=(k-2)\wedge 2017$.

(b) Check that 2017 is a prime number.

(c) Determine explicitly the set $H_1=\{\varphi(k)\in\mathbb{Z}\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$.

(2) Show that $\alpha\wedge\beta=1\Rightarrow\beta^2\wedge\left(\alpha^2-\beta^2\right)=1$.

(3) Determine explicitly the set $H_2=\left\{\sqrt{\varphi(k)}\in\mathbb{Q}\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

مسألة 08 رقما الوحدات والعشرات لعدد كبير

النص الأصلي بالعربية

• نعتبر العددين $a=\sum_{k=0}^{9}2011^k$ و $b=\sum_{k=0}^{2009}2011^k$.

(1) (a) بيّن أن $a\equiv 60\ [100]$.

© Saad Choukri

(b) استنتج أنه $a^k \equiv 0\ [100]$; $\forall k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

(2) بيّن أن $b \equiv 201a\ [100]$.

(3) استنتج رقمي وحدات و عشرات العدد b.

Traduction française

- On considère $a = \sum_{k=0}^{9} 2011^k$ et $b = \sum_{k=0}^{2009} 2011^k$.

(1)(a) Montrer que $a \equiv 60\ [100]$.

(b) En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $a^k \equiv 0\ [100]$.

(2) Montrer que $b \equiv 201a\ [100]$.

(3) En déduire les chiffres des unités et des dizaines de b.

English translation

- Consider $a = \sum_{k=0}^{9} 2011^k$ and $b = \sum_{k=0}^{2009} 2011^k$.

(1)(a) Show that $a \equiv 60\ [100]$.

(b) Deduce that $\forall k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $a^k \equiv 0\ [100]$.

(2) Show that $b \equiv 201a\ [100]$.

(3) Deduce the units and tens digits of b.

مسألة 09 نظمة موافقات و مبرهنة فيرما

النص الأصلي بالعربية

• ليكن $a, b \in \mathbb{N}^*$ بحيث $\forall n \in \mathbb{N},\ a^n + n \mid b^n + n$. نفترض أن العددين a و b مختلفان و يخالفان 1. ليكن p عددا أوليا موجبا بحيث $(a - b) \wedge p = 1$.

(1) تحقق من أن $m = a(p-1) + p$ حل للنظمة (S): $(S) : \begin{cases} x \equiv -a\ [p] \\ x \equiv 1\ [p-1] \end{cases}$

(2) استنتج أن مجموعة حلول النظمة (S) هي $S = \{m + kp(p-1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(3) (يمكنك استعمال مبرهنة فيرما الصغرى)

(a) بيّن أن $a \wedge p = 1$.

(b) بيّن أن $a^m + m \equiv 0\ [p]$.

(c) بيّن أن $b^m + m \equiv b - a\ [p]$.

(d) استنتج.

Traduction française

© Saad Choukri

• Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ a^n + n \,|\, b^n + n$. On suppose a et b distincts et différents de 1. Soit p un nombre premier positif tel que $(a-b) \wedge p = 1$.

(1) Vérifier que $m = a(p-1) + p$ est solution du système (S) : $(S) : \begin{cases} x \equiv -a\ [p] \\ x \equiv 1\ [p-1] \end{cases}$

(2) En déduire que l'ensemble des solutions de (S) est $S = \{m + kp(p-1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(3) (On pourra utiliser le petit théorème de Fermat.)

(a) Montrer que $a \wedge p = 1$.

(b) Montrer que $a^m + m \equiv 0\ [p]$.

(c) Montrer que $b^m + m \equiv b - a\ [p]$.

(d) Conclure.

English translation

• Let $a, b \in \mathbb{N}^*$ be such that $\forall n \in \mathbb{N},\ a^n + n \,|\, b^n + n$. Assume a and b are distinct and different from 1. Let p be a positive prime with $(a-b) \wedge p = 1$.

(1) Check that $m = a(p-1) + p$ is a solution of the system (S): $(S) : \begin{cases} x \equiv -a\ [p] \\ x \equiv 1\ [p-1] \end{cases}$

(2) Deduce that the solution set of (S) is $S = \{m + kp(p-1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(3) (Fermat's little theorem may be used.)

(a) Show that $a \wedge p = 1$.

(b) Show that $a^m + m \equiv 0\ [p]$.

(c) Show that $b^m + m \equiv b - a\ [p]$.

(d) Conclude.

مسألة 10 مسألة قابلية القسمة $a^n + n \mid b^n + n$

النص الأصلي بالعربية

• بيّن أنه إذا كان لكل n من $\mathbb{N}$، $a^n + n$ يقسم $b^n + n$ فإن $a = b$.

Traduction française

• Montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^n + n$ divise $b^n + n$, alors $a = b$.

English translation

• Show that if, for every $n \in \mathbb{N}$, $a^n + n$ divides $b^n + n$, then $a = b$.

© Saad Choukri