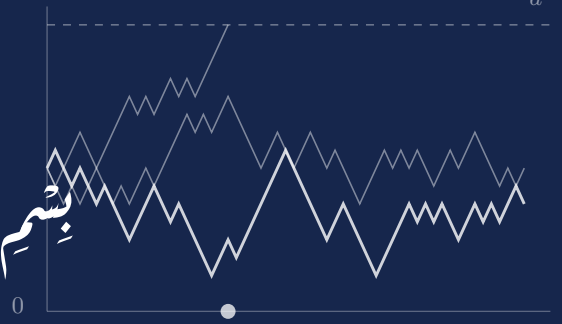


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



COLLECTION D'EXERCICES • NIVEAU BAC

Pour bien se préparer à l'examen national

للتّضير الجيد للاستّحان الوطني

Polycopié VII • Calcul de probabilités

المطبوع السابع • حساب الاحتمالات

Dénombrement • Probabilités conditionnelles
Variables aléatoires • Loi binomiale • Suites

15 exercices de préparation

خمسة عشر تمريناً للتّضير للاستّحان الوطني

Sélection d'exercices issus des devoirs surveillés,
devoirs libres et sujets d'examens blancs.

Niveau 2^{ème} année Baccalauréat – Sciences Mathématiques (السنة الثانية بكالوريا -- علوم رياضية)

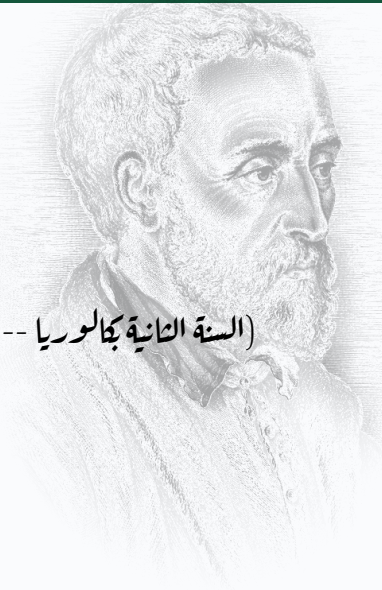
Discipline Mathématiques – Probabilités

Volume VII – Recueil d'exercices

AUTEUR

Prof. Saad Choukri سعد شكري

© 2026 Prof. Saad Choukri — Tous droits réservés



Avant-propos

Ce polycopié rassemble **quinze exercices** de calcul des probabilités, sélectionnés dans une base de devoirs surveillés et de sujets de l'examen national. Les énoncés couvrent l'intégralité du programme : dénombrement et tirages dans des urnes, probabilités conditionnelles et formule des probabilités totales, variables aléatoires, espérance et variance, loi binomiale et suites définies par une relation de récurrence probabiliste.

Les exercices sont regroupés en **cinq parties thématiques**, de difficulté croissante à l'intérieur de chaque partie. Les deux dernières parties proposent des exercices de structure identique à celle des épreuves de l'examen national.

La plus grande partie des exercices de ce polycopié a été extraite des anciens devoirs surveillés du professeur **Abdellah Belkhatir** الأستاذ عبد الله بالخير , que nous remercions vivement.

Table des matières **الفهرس**

I	Dénombrement et tirages dans des urnes Exercices 1 à 4	العدّ والسب من الصناديق
II	Probabilités conditionnelles Exercices 5 à 8	الاحتمالات الشرطية
III	Variables aléatoires, espérance et variance Exercices 9 à 12	المتغيرات العشوائية والأمل الرياضي
IV	Loi binomiale et répétition d'épreuves Exercices 13 et 14	القانون المدي وتكرار التجارب
V	Suites et probabilités Exercice 15	المتاليات والاحتمالات

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تقديم المطبوع

يضم هذا المطبوع خمسة عشر تمريناً في حساب الاحتمالات، انتُقيت من الفروض المحروسة ومن مواضيع الامتحان الوطني، وهي موجهة لتلاميذ السنة الثانية من سلك البكالوريا، شعبة العلوم الرياضية. تغطي هذه التمارين مقرر حساب الاحتمالات كاملاً: العدّ والسحب من الصناديق، الاحتمالات الشرطية وصيغة الاحتمالات الكلية، المتغيرات العشوائية، الأمل الرياضي والمغايرة، القانون الحدي، ثم المتاليات المعروفة بعلاقة تراجعية احتمالية. رُتبت التمارين في خمسة محاور، مع تدبج في الصعوبة داخل كل محور. أما المحوران الأخيران فيضمّنان تمارين تشبه في بنيتها تمارين الامتحان الوطني. استُخرج الجزء الأكبر من تمارين هذا المطبوع من الفروض المحروسة السابقة للأستاذ عبد الله بلخخير، فله منا جزيل الشكر والتقدير.

إرشادات للاستعمال

حاول حلّ كلّ تمرين دون النظر إلى الإرشادات لمئة عشرين دقيقة على الأقلّ. احرص على تحرير الحلّ كاملاً، فنقطة الامتحان تقيس الدقّة والصرامة كما تقيس النتيجة. لا ترجع إلى الإرشادات الملونة إلا عند الضرورة القصوى.

شكر وتقدير

يتقدم مُعدّ هذا الطبع بأصدق عبارات الشكر والتقدير إلى الأستاذ الفاضل عبد الله بلخاتير، الذي استخرج الجزء الأكبر من تمارين هذا العمل من فروض المحروسة السابقة، فجزاه الله خيراً على جهده في خدمة الرياضيات وتلاميذها.

Remerciements

L'auteur adresse ses plus sincères remerciements au professeur **Abdellah Belkhatir**, dont les anciens devoirs surveillés ont fourni la plus grande partie des exercices réunis ici, et le remercie chaleureusement pour son dévouement constant au service de l'enseignement des mathématiques.

إعداد الأستاذ سعد شكري
وفقكم الله

DÉNOMBREMENT ET TIRAGES DANS DES URNES

RAPPEL DE COURS

Dans une situation d'équiprobabilité, $p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$. Un tirage *simultané* de k boules parmi n donne C_n^k issues ; un tirage *successif sans remise* en donne A_n^k ; un tirage *successif avec remise* en donne n^k .

EXERCICE 1

Tirages simultanés et successifs • Indépendance • Espérance

Une urne contient 4 boules blanches, 3 noires et 2 rouges, toutes indiscernables au toucher.

Partie I

On tire de cette urne au hasard *successivement et sans remise* 2 boules. Soient les événements suivants :

- A : « la première boule tirée est rouge » ;
- B : « la deuxième boule tirée est blanche » ;
- C : « obtenir au moins une boule blanche ».

(1) (a) Montrer que : $p(A \cap B) = \frac{1}{9}$.

(b) Calculer $p(A)$ et $p(B)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

(2) Calculer $p(\overline{C})$, puis en déduire $p(C)$.

(3) Sachant que la deuxième boule tirée est blanche, calculer la probabilité pour que la première soit rouge.

Partie II

On tire cette fois-ci au hasard 3 boules *simultanément*. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage possible associe le nombre de boules rouges restantes dans l'urne.

(1) (a) Déterminer la loi de probabilité de X .

(b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$.

(2) On répète l'épreuve « tirer simultanément 3 boules » 5 fois de suite, en remettant à la fin de chaque épreuve les 3 boules tirées dans l'urne.

- Calculer la probabilité pour que l'événement $(X = 1)$ se réalise exactement 3 fois.

EXERCICE 2

Trois urnes • Probabilités totales • Probabilité des causes

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4. On a trois urnes U_1 , U_2 et U_3 :

- l'urne U_1 contient une boule rouge et $(n - 1)$ boules noires ;

- l'urne U_2 contient deux boules rouges et $(n - 2)$ boules noires ;
- l'urne U_3 contient trois boules rouges et $(n - 3)$ boules noires.

On considère l'expérience aléatoire suivante : on choisit aléatoirement une urne parmi les trois urnes précédentes, puis on en tire simultanément deux boules. Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules rouges tirées.

- (1) Déterminer les valeurs possibles de la variable aléatoire X .
- (2) (a) Montrer que : $P[X = 2] = \frac{8}{3n(n-1)}$.
 (b) Montrer que : $P[X = 1] = \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$.
 (c) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
- (3) Sachant que les deux boules tirées sont rouges, quelle est la probabilité pour qu'elles proviennent de l'urne U_3 ?

EXERCICE 3

Tirages sans remise • Rangs consécutifs • Loi de X_n

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$). On retire, sans remise, l'une après l'autre toutes les boules de cette urne. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

- (1) Quelle est la probabilité pour que les boules 1, 2 et 3 sortent consécutivement et dans cet ordre ?
- (2) Calculer la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre (consécutivement ou pas).
- (3) On considère la variable aléatoire X_n égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir les boules 1, 2 et 3.
 - Déterminer la loi de probabilité de X_n .

EXERCICE 4

Boules dans des compartiments • Compartiments vides • Limite de $E(X)$

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de 4 compartiments également numérotés de 1 à 4 (on suppose que $n \geq 4$). On lance simultanément les boules dans les 4 compartiments : elles viennent se ranger aléatoirement dans les 4 compartiments, chaque compartiment pouvant éventuellement contenir les n boules. On note X la variable aléatoire qui à chaque lancer des boules fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

- (1) Déterminer la loi de probabilité de X .
- (2) Déterminer $E(X)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X)$, puis interpréter ce résultat.

RAPPEL DE COURS

$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ lorsque $p(B) \neq 0$. **Probabilités totales** : si (B_i) est un système complet d'événements, $p(A) = \sum_i p(B_i) p_{B_i}(A)$. **Formule de Bayes** : $p_A(B_i) = \frac{p(B_i) p_{B_i}(A)}{p(A)}$.

EXERCICE 5

Deux boîtes • Arbre pondéré • Probabilités totales

On a deux boîtes U et V . La boîte U contient 4 boules rouges et 4 boules bleues. La boîte V contient deux boules rouges et 4 boules bleues.

On considère l'épreuve suivante : on tire au hasard une boule de la boîte U ; si elle est rouge, on la remet dans la boîte V , puis on tire au hasard une boule de la boîte V ; si elle est bleue, on la pose de côté, puis on tire une boule de la boîte V .

Soient les événements suivants :

- R_U : « la boule tirée de la boîte U est rouge » ;
- B_U : « la boule tirée de la boîte U est bleue » ;
- R_V : « la boule tirée de la boîte V est rouge » ;
- B_V : « la boule tirée de la boîte V est bleue ».

- (1) Calculer la probabilité de chacun des deux événements R_U et B_U .
- (2) (a) Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que l'événement R_U est réalisé.
(b) Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que l'événement B_U est réalisé.
- (3) Montrer que la probabilité de l'événement B_V est $\frac{13}{21}$.
- (4) En déduire la probabilité de l'événement R_V .

EXERCICE 6

Trois urnes • Épreuve en deux temps • Loi de X

Considérons trois urnes U , V et W . L'urne W contient 3 boules indiscernables au toucher : 1 boule noire et 2 boules blanches. Chacune des urnes U et V contient 4 boules indiscernables au toucher : 2 boules noires et 2 boules blanches.

On considère l'expérience suivante : on tire au hasard une boule de l'urne W ; si elle est blanche, on la met dans l'urne U , puis on tire deux boules simultanément de l'urne U ; si elle est noire, on la met dans l'urne V , puis on tire deux boules.

- (1) Quelle est la probabilité pour que le tirage des deux boules soit de l'urne U ?
- (2) Calculer la probabilité de tirer deux boules blanches à la fin de l'expérience.
- (3) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches à la fin de l'expérience. Déterminer la loi de probabilité de la variable X .

EXERCICE 7

Urne évolutive en trois étapes • Probabilité conditionnelle

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules noires indiscernables au toucher.

Partie I

On tire au hasard successivement et avec remise quatre boules de l'urne, et on considère la variable aléatoire X égale au nombre de boules noires tirées.

- (1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
- (2) Calculer $E(X)$, l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

Partie II

On réalise l'expérience aléatoire suivante en trois étapes :

- **Étape 1** : on tire une boule de l'urne, on marque sa couleur et on la remet dans l'urne.
- **Étape 2** : on ajoute dans l'urne 5 boules de même couleur que la boule tirée à l'étape 1.
- **Étape 3** : on tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne, qui contient alors 12 boules après l'étape 2.

On considère les événements suivants : N « la boule tirée à l'étape 1 est noire », R « la boule tirée à l'étape 1 est rouge » et E « toutes les boules tirées à l'étape 3 sont noires ».

- (1) Montrer que : $p(E \cap N) = \frac{12}{55}$.
- (2) Calculer $p(E)$.
- (3) Calculer la probabilité de l'événement R sachant que E est réalisé.

EXERCICE 8

Dés truqués • Formule de Bayes

On dispose de 100 dés à 6 faces, dont 20 sont truqués et donnent la face « 1 » avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ de tomber. On choisit au hasard un dé parmi les 100, on le lance n fois et on obtient $n - 1$ fois « 1 ».

- Avec quelle probabilité le dé choisi est-il truqué ?

VARIABLES ALÉATOIRES, ESPÉRANCE ET VARIANCE



RAPPEL DE COURS

$E(X) = \sum_k x_k p(X = x_k)$ et $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, l'écart-type valant $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

EXERCICE 9

Tirages sans remise jusqu'à la première blanche • Espérance et variance

Une urne contient 10 boules blanches et deux boules rouges. On tire les boules de l'urne l'une après l'autre et sans remise jusqu'à l'obtention pour la première fois d'une boule blanche, puis on arrête l'expérience. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées.

- (1) (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X .
 (b) Calculer la probabilité de l'événement $[X = 1]$.
 (c) Montrer que : $p[X = 2] = \frac{5}{33}$.
 (d) Calculer la probabilité de l'événement $[X = 3]$.
- (2) (a) Montrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $E(X) = \frac{13}{11}$.
 (b) Calculer $E(X^2)$, et en déduire la valeur de la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X .

EXERCICE 10

Rang d'arrêt • Deux boules successives de même couleur

Une urne contient 4 boules : une boule blanche et 3 boules rouges indiscernables au toucher. On tire aléatoirement une boule de l'urne, on note sa couleur puis on la remet à l'urne. On répète la même expérience plusieurs fois jusqu'à obtenir pour la première fois deux boules successives de même couleur, et on arrête l'expérience. Soit X la variable aléatoire qui vaut le rang du tirage où on a arrêté l'expérience.

- (1) Calculer la probabilité des deux événements suivants : $[X = 2]$ et $[X = 3]$.
- (2) Soit k un entier naturel non nul.
 (a) Montrer que la probabilité de l'événement $[X = 2k]$ est : $P_{2k} = \frac{5}{8} \left(\frac{3}{16} \right)^{k-1}$.
 (b) Montrer que la probabilité de l'événement $[X = 2k + 1]$ est : $P_{2k+1} = \left(\frac{3}{16} \right)^k$.

EXERCICE 11

Rang de la première boule blanche • Somme des carrés • Variance

Une urne contient 2 boules blanches et $n - 2$ boules rouges indiscernables au toucher, où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$. On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur et on ne la remet pas. On répète la même expérience jusqu'à obtenir pour la première fois une boule blanche, puis on arrête l'expérience. Soit X la variable aléatoire égale au rang du tirage où l'expérience s'est arrêtée.

- (1) (a) Déterminer $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs de la variable aléatoire X .
 (b) Calculer $p(X = 1)$, $p(X = 2)$ et $p(X = 3)$.
- (2) (a) Montrer que : $(\forall k \in X(\Omega)) ; p(X = k) = \frac{2(n - k)}{n(n - 1)}$.

(b) En déduire que : $E(X) = \frac{n+1}{3}$. On rappelle que : $(\forall m \in \mathbb{N}^*); \sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.

- (3) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges restant dans l'urne au moment où l'on obtient la première boule blanche.
- Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

EXERCICE 12

Jeu de gains et de pertes • Loi de X • Espérance

Un sac contient $2n$ boules ($n \in \mathbb{N}^*$), dont n sont blanches et n sont noires. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. Un jeu consiste à tirer une boule du sac, à noter sa couleur et à la remettre dans le sac, puis à tirer du même sac une nouvelle boule et à noter aussi sa couleur. La règle du jeu indique que :

- si les deux boules tirées sont blanches, on gagne 20 points ;
- si les deux boules tirées sont noires, on perd 20 points ;
- si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, le gain est nul.

- (1) Calculer la probabilité de gagner 20 points, la probabilité de perdre 20 points et la probabilité de réaliser un gain nul.
- (2) On répète 5 fois le jeu précédent.
- Calculer la probabilité de gagner 100 points.
 - Calculer la probabilité de gagner 40 points.
- (3) Au cours d'un jeu, on considère la variable X qui prend uniquement les valeurs -20 si on perd, 0 si le gain est nul et $+20$ si on gagne.
- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
 - Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

LOI BINOMIALE ET RÉPÉTITION D'ÉPREUVES

IV

RAPPEL DE COURS

Si l'on répète n fois de façon indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p , le nombre X de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$: $p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, avec $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

EXERCICE 13

Fréquence d'apparition de « pile » • Loi binomiale

On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. On désigne par X la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition de la face « pile » (c'est-à-dire le nombre de fois d'apparition de la face « pile » divisé par 10).

- (1) (a) Déterminer les valeurs prises par X .
 (b) Déterminer la probabilité de l'événement $\left[X = \frac{1}{2}\right]$.
- (2) Quelle est la probabilité de l'événement : « X supérieur ou égal à $\frac{9}{10}$ » ?

EXERCICE 14

Deux urnes • Répétition de cinq épreuves • Probabilités totales

On dispose de 2 urnes U_1 et U_2 : l'urne U_1 contient 3 boules blanches et 2 noires, et U_2 contient une boule blanche et 4 noires. Soit l'épreuve qui consiste à tirer au hasard 2 boules *simultanément* de U_1 et 3 boules *successivement et sans remise* de U_2 .

- (1) On considère l'événement A : « obtenir 5 boules noires ».
 - Montrer que : $p(A) = \frac{1}{25}$.
- (2) On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées.
 - (a) Déterminer la loi de probabilité de X .
 - (b) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
- (3) On répète l'épreuve précédente *cinq* fois de suite, en remettant à chaque fois les boules tirées dans leurs urnes d'origine.
 - (a) Calculer la probabilité de l'événement B : « A est réalisé exactement 3 fois ».
 - (b) Après les cinq répétitions, on réalise l'épreuve suivante : si B est réalisé, on mélange les deux urnes et on tire simultanément 2 boules du mélange ; sinon on tire une boule de chaque urne. On note C l'événement : « obtenir deux boules blanches ».
 - Calculer $p_B(C)$ et $p_{\bar{B}}(C)$, puis en déduire $p(C)$.

SUITES ET PROBABILITÉS



EXERCICE 15

Chaîne à deux urnes • Suite arithmético-géométrique • Limite

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules

noires ; l'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie, on note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 ; sinon, le tirage suivant se fait dans l'urne U_2 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au n -ième tirage est blanche » et on pose : $p_n = p(B_n)$.

(1) Calculer p_1 .

(2) Prouver que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; p_{n+1} = \frac{-6}{35} p_n + \frac{4}{7}$.

(3) En déduire la valeur de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

FIN DU POLYCOPIÉ VII

Prof. Saad Choukri

© 2026 — Tous droits réservés