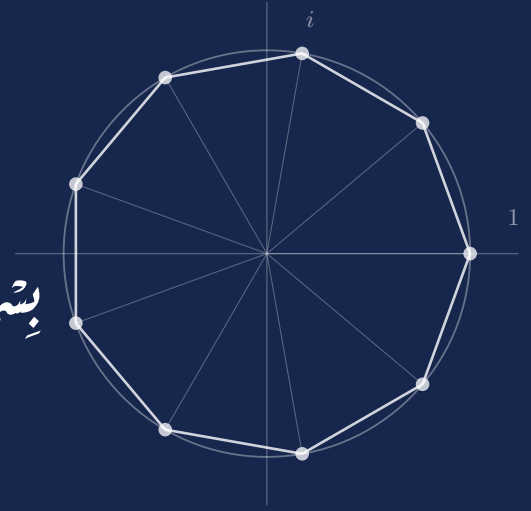


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



COLLECTION D'EXERCICES • NIVEAU BAC

Pour bien se préparer à l'examen national

للتّحضير الجيّد للاّمتحان الوطني

Polycopié III • Nombres complexes

المطبوع الثالث • الأعداد العقدية

Équations · Forme exponentielle · Rotations
Lieux géométriques · Cocyclicité · Transformations

40 problèmes de préparation

أربعون مسألة للتّحضير للاّمتحان الوطني

Sélection de problèmes issus des devoirs surveillés
et des sujets de l'examen national, sessions 2011 à 2025.

Niveau 2^{ème} année Baccalauréat – Sciences Mathématiques (السنة الثانية بكالوريا -- علوم رياضية)

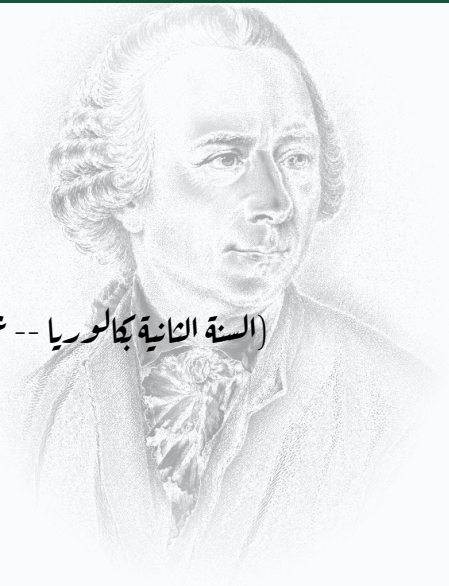
Discipline Mathématiques – Algèbre et Géométrie

Volume III – Recueil d'exercices

AUTEUR

Prof. Saad Choukri سعد شكري

© 2026 Prof. Saad Choukri — Tous droits réservés



Avant-propos

Ce polycopié rassemble **quarante problèmes** sur les nombres complexes, sélectionnés dans une base de devoirs surveillés et de sujets de l'examen national des sessions 2011 à 2025. Les énoncés couvrent l'intégralité du programme : équations du second et du troisième degré, racines carrées, formes trigonométrique et exponentielle, rotations et homothéties, alignement, orthogonalité, cocyclicité et lieux géométriques.

Les exercices sont regroupés en **sept parties thématiques**, de difficulté croissante à l'intérieur de chaque partie. Les trois dernières parties proposent des problèmes longs, de structure identique à celle des épreuves de l'examen national.

La plus grande partie des exercices de ce polycopié a été extraite des anciens devoirs surveillés du professeur **Abdellah Belkhatir** الأستاذ عبد الله بالخير , que nous remercions vivement.

Table des matières **الفهرس**

I	Équations du second degré et racines carrées Problèmes 1 à 6	المعادلات من الدرجة الثانية والجذور المربعة
II	Équations à paramètre complexe Problèmes 7 à 13	المعادلات ذات وسيط عقدي
III	Formes trigonométrique et exponentielle Problèmes 14 à 19	الشكلان المثلثي والأسي
IV	Équations du troisième degré Problèmes 20 à 22	المعادلات من الدرجة الثالثة
V	Rotations, homothéties et transformations Problèmes 23 à 29	الدورانات والتحويلات والتحويلات
VI	Alignement, orthogonalité et cocyclicité Problèmes 30 à 36	الاستقامة والتعامد والتوافق على دائرة
VII	Lieux géométriques et problèmes de synthèse Problèmes 37 à 40	المجموعات الهندسية ومسائل تركيبية

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تقديم المطبوع

يضمّ هذا المطبوع أربعين مسألة في الأعداد العقدية، انتُخبت من الفروض المحروسة ومن مواضيع الامتحان الوطني للسنوات 2011 إلى 2025، وهي موجهة لتلاميذ السنة الثانية من سلك البكالوريا، شعبة العلوم الرياضية.

تغطّي هذه المسائل مقرّر الأعداد العقدية كاملاً: المعادلات من الدرجة الثانية والثالثة، الجذور الرابعة، الشكلاّن المثلثي والأسي، الدورانات والتحاطات، ثم الاستقامية والتعامد والتواقع على دائرة والمجموعات الهندسية.

رُتبت التمارين في سبعة محاور، مع تدّرج في الصعوبة داخل كلّ محور. أمّا المحاور الثلاثة الأخيرة فتضمّن مسائل مركّبة تشبه في بنيتها مسائل الامتحان الوطني.

استُخرج الجزء الأكبر من تمارين هذا المطبوع من الفروض المحروسة السابقة للأستاذ عبد الله بلخخير، فله منّا جزيل الشكر والتقدير.

إرشادات للاستعمال

حاول حلّ كلّ تمرين دون النظر إلى الإرشادات لمدة عشرين دقيقة على الأقلّ. احرص على تحرير الحلّ كاملاً، فنقطة الامتحان تقيس الدقّة والصرامة كما تقيس النتيجة. لا ترجع إلى الإرشادات الملونة إلا عند الضرورة القصوى.

شكر وتقدير

يتقدم مُعدّ هذا الطبع بأصدق عبارات الشكر والتقدير إلى الأستاذ الفاضل عبد الله بلخاتير، الذي استخرج الجزء الأكبر من تمارين هذا العمل من فروض المحروسة السابقة، فجزاه الله خيراً على جهده في خدمة الرياضيات وتلاميذها.

Remerciements

L'auteur adresse ses plus sincères remerciements au professeur **Abdellah Belkhatir**, dont les anciens devoirs surveillés ont fourni la plus grande partie des exercices réunis ici, et le remercie chaleureusement pour son dévouement constant au service de l'enseignement des mathématiques.

إعداد الأستاذ سعد شكري
وفقكم الله

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ ET RACINES CARRÉES

RAPPEL DE COURS

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$) à coefficients complexes admet pour solutions $z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$, où δ est une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Pour $\Delta = x + iy$, les racines carrées $\delta = \alpha + i\beta$ s'obtiennent par le système $\alpha^2 - \beta^2 = x$, $2\alpha\beta = y$, $\alpha^2 + \beta^2 = |\Delta|$.

EXERCICE 1

Rotation • Homothétie • Cercle circonscrit

(1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E) : z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0.$$

(a) Vérifier que $(3 - i\sqrt{3})^2$ est le discriminant de l'équation (E).

(b) Déterminer a et b les deux solutions de l'équation (E), sachant que $b \in \mathbb{R}$.

(c) Vérifier que : $b = (1 - i\sqrt{3})a$.

(2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit A le point d'affixe a et B le point d'affixe b .

(a) Déterminer le nombre complexe b_1 , affixe du point B_1 image du point O par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

(b) Montrer que B est l'image de B_1 par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{3}$.

(c) Vérifier que : $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

(d) Soit C un point d'affixe c , appartenant au cercle circonscrit au triangle OAB et différent de O et de A . Déterminer un argument du nombre complexe $\frac{c}{c-a}$.

EXERCICE 2

Solution imaginaire pure • Rotation • Nombre réel

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i = 0.$$

(1) (a) Vérifier que $\Delta = (1 - 3i)^2$ est le discriminant de l'équation (E).

(b) Déterminer z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ (on prendra z_1 l'imaginaire pur).

(c) Montrer que : $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

- (2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectifs z_1 et z_2 .
- (a) Déterminer le nombre complexe e , affixe du point E , milieu du segment $[AB]$.
- (b) Soit R la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, et c l'affixe du point C tel que $R(E) = C$.
Montrer que : $z_C = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$.
- (c) Soit D le point d'affixe $d = 1 + \frac{3}{2}i$. Montrer que le nombre $\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) \times \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right)$ est réel, puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

EXERCICE 3

Racines carrées • Triangle rectangle isocèle • Translation

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- (1) (a) Déterminer les deux racines carrées du nombre complexe $(3 + 4i)$.
(b) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :
- $$(E) : 4z^2 - 10iz - 7 - i = 0.$$
- (2) Soient a et b les solutions de l'équation (E) avec $\operatorname{Re}(a) < 0$, et soient les deux points A et B d'affixes respectifs a et b dans le plan complexe.
- (a) Vérifier que : $\frac{b}{a} = 1 - i$.
(b) En déduire que le triangle AOB est rectangle et isocèle en A .
- (3) Soient C un point d'affixe c du plan différent du point A , et D l'image du point B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$; soit L l'image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.
- (a) Déterminer c en fonction de d , où d est l'affixe du point D .
(b) Déterminer en fonction de c le nombre complexe l , affixe du point L .
(c) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\left(\frac{l - c}{a - c}\right)$, puis en déduire la nature du triangle ACL .

EXERCICE 4

Forme trigonométrique • Cercle de diamètre $[AB]$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- (1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$.
- (a) Vérifier que le nombre $a = 1 + i(2 - \sqrt{3})$ est une solution de l'équation (E) .
(b) En déduire b , la deuxième solution de l'équation (E) .
- (2) (a) Montrer que : $a^2 = 4(2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{2}}$.
(b) Écrire a sous forme trigonométrique.

- (3) On considère les points A , B et C dont les affixes sont respectivement a , b et $c = 2i + 2e^{i\frac{\pi}{4}}$. Soit (Γ) le cercle de diamètre $[AB]$.
- (a) Déterminer ω , l'affixe du point Ω centre du cercle (Γ) .
 - (b) Montrer que les points O et C appartiennent au cercle (Γ) .
 - (c) Montrer que le nombre complexe $\frac{c-a}{c-b}$ est imaginaire pur.

EXERCICE 5

Équation $z^2 + i = 0$ • Valeur de $\cos \frac{\pi}{8}$ • Cercle circonscrit

Partie I

- (1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + i = 0$ (on note a la solution de l'équation telle que $\operatorname{Re}(a) > 0$).
- (2) (a) Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $1 + a$.
- (b) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.
- (c) Vérifier que $(1+a)(1-a) = 1+i$, puis en déduire la forme trigonométrique du nombre complexe $1-a$.

Partie II

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B , M et M' d'affixes respectifs a , $-a$, z et z' tels que $zz' + i = 0$.

- (1) Soit N le point d'affixe $\bar{z}$, conjugué de z . Montrer que les droites (ON) et (OM') sont perpendiculaires.
- (2) (a) Montrer que : $z' - a = i \frac{z - a}{az}$.
- (b) Montrer que si $z \neq -a$, alors $z' \neq -a$ et $\frac{z' - a}{z' + a} = -\frac{z - a}{z + a}$.
- (3) On suppose que les points A , B , M sont non alignés. Montrer que le point M' appartient au cercle circonscrit au triangle ABM .

EXERCICE 6

Deux parties indépendantes • Parallélogramme et rectangle

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Partie I

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E) : z^2 - 4\left(1 + \frac{2}{3}i\right)z + \frac{5}{3} + 4i = 0.$$

- (1) (a) Vérifier que le nombre $z_1 = 1 + \frac{2}{3}i$ est une solution de l'équation (E) .

(b) Montrer que la deuxième solution de l'équation (E) est $z_2 = 3z_1$.

- (2) Soit θ un argument du nombre complexe z_1 . Écrire en fonction de θ la forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{5}{3} + 4i$.

Partie II

On considère trois points A , B et Ω différents deux à deux et d'affixes respectifs a , b et ω . Soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On pose $P = r(A)$ et $Q = r(B)$, et soient p et q les affixes respectifs de P et Q .

- (1) (a) Montrer que $p = \omega + e^{i\frac{\pi}{3}}(a - \omega)$ et $q = \omega + e^{-i\frac{\pi}{3}}(b - \omega)$.
- (b) Montrer que : $\frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.
- (c) Montrer que : $\frac{p - a}{q - b} = \left(\frac{\omega - a}{\omega - b}\right) e^{i\frac{4\pi}{3}}$.
- (2) On suppose que $\left(\frac{\omega - a}{\omega - b}\right) = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
- (a) Montrer que $APQB$ est un parallélogramme.
- (b) Montrer que $\arg\left(\frac{b - a}{p - a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et en déduire que le quadrilatère $APQB$ est un rectangle.

ÉQUATIONS À PARAMÈTRE COMPLEXE



EXERCICE 7

Discriminant paramétré • Triangles rectangles isocèles • Cocyclicité

Partie I

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : 2z^2 - 2(m + 1 - i)z + m^2 + (1 - i)m - i = 0, \quad \text{où } m \in \mathbb{C}^*.$$

- (1) Déterminer les valeurs de m pour que l'une des solutions de (E) soit nulle.
- (2) (a) Vérifier que le discriminant de (E) est $\Delta = (2im)^2$.
- (b) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Partie II

On suppose dans la suite que $m \in \mathbb{C}^* - \{-1, 1, i, -i\}$. Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A , B et M d'affixes respectifs $a = 1$, $b = -i$ et $z_M = m$. Les points M_1 et M_2 sont d'affixes respectifs z_1 et z_2 , tels que BMM_1 et AMM_2

soient des triangles rectangles et isocèles avec :

$$\left(\overrightarrow{M_1B}, \overrightarrow{M_1M}\right) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{M_2A}, \overrightarrow{M_2M}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

- (1) Montrer que : $z_1 = \frac{1-i}{2}(m+1)$ et $z_2 = \frac{1+i}{2}(m-i)$.
- (2) (a) Vérifier que : $\frac{z_2}{z_1} = i \cdot \frac{m-i}{m+1}$.
 (b) Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ pour que les points O , M_1 et M_2 soient alignés.
 (c) Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ pour que OM_1M_2 soit un triangle rectangle en O .
- (3) (a) Montrer que $M_2 = R(M_1)$, où R est la rotation de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{1-i}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 (b) Vérifier que : $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = -i \cdot \frac{m-1}{m+i}$.
 (c) En déduire l'ensemble des points $M(m)$ pour que Ω , M , M_1 et M_2 soient cocycliques.

EXERCICE 8

Racine carrée d'un complexe • Orthogonalité • Point d'intersection

Partie I

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0, \quad \text{où } m \in \mathbb{C} - \{1\}.$$

- (1) (a) Vérifier que $a = 1+i$ est une solution de (E) .
 (b) En déduire que l'autre solution de (E) est $b = (1+i)m$.
- (2) Déterminer les valeurs de m sous forme algébrique, puis trigonométrique, pour que b soit une racine carrée de a .

Partie II

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ tels que $c = 1-i$. On désigne par D l'image de B par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et I est le milieu du segment $[CD]$.

- (1) (a) Montrer que l'affixe de I est $z_I = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$.
 (b) Calculer $\frac{b-a}{z_I}$, puis en déduire que $(OI) \perp (AB)$ et $AB = 2OI$.
- (2) Soit $H(h)$ le point d'intersection de (OI) et (AB) .
 • Montrer que : $\frac{h-a}{b-a} \in \mathbb{R}$ et $\frac{h}{b-a} \in i\mathbb{R}$, puis en déduire h en fonction de m .

EXERCICE 9

Alignement • Centre de rotation • Quadrilatère cocyclique

Partie I

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E) : iz^2 - (1 - i)(1 + im)z + m^2 - 1 = 0, \quad \text{où } m \in \mathbb{C} - \{-1; 1\}.$$

- (1) (a) Vérifier que le discriminant de (E) est $\Delta = -2i(m + i)^2$.
 (b) En déduire l'ensemble des solutions de (E) .
- (2) On suppose dans cette question que $m = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0; \pi[$.
 - Écrire les solutions de (E) sous forme trigonométrique.

Partie II

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectifs :

$$z_A = im, \quad z_B = i(1 + m), \quad z_C = 1 - m, \quad z_D = (z_B)^2, \quad z_E = \frac{m + (z_B)^2}{1 - i}.$$

- (1) Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ tels que O, B et C soient alignés.
- (2) Soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ telle que $R(A) = C$.
 - Montrer que l'axe du centre Ω de la rotation R est $\omega = \frac{1 + i}{2}$.
- (3) On suppose dans cette question que $|m| = 1$ et $m^2 + (2 + i)m + 1 \neq 0$.
 - (a) Montrer que ADE est un triangle rectangle et isocèle en E .
 - (b) Montrer que les points O, A, D et E sont cocycliques et déterminer l'axe du centre du cercle (Γ) circonscrit au quadrilatère formé par ces quatre points.

EXERCICE 10

Ensembles de points • Symétrie centrale • Cocyclicité

Partie I

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : z^2 - 2mz + m^2 + 4 = 0, \quad \text{où } m \in \mathbb{C}^*.$$

- (1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
- (2) On suppose que $m = 2e^{i\theta}$ où $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$.
 - Écrire les solutions de (E) sous forme trigonométrique.
- (3) Dans le plan complexe, on considère les points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ tels que : $z_1 = m + 2i$ et $z_2 = m - 2i$.

(a) Déterminer chacun des ensembles suivants :

$$(E_1) = \{M(m) \in (P) / OM_1 = OM_2\} \quad \text{et} \quad (E_2) = \left\{M(m) \in (P) / \overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2}\right\}.$$

(b) En déduire m pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle et isocèle en O .

Partie II

On considère la symétrie centrale S de centre $I(1)$ et la rotation R de centre $\Omega(1+i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Pour tout point $M(z)$ distinct de O , on pose : $M'(z') = S(M)$ et $M''(z'') = R(M)$.

(1) Montrer que : $z' = -z + 2$ et $z'' = iz + 2$.

(2) Déterminer l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ tels que les points $A(2)$, Ω , M' et M'' soient cocycliques.

EXERCICE 11

Solution évidente • Rotation composée • Cocyclicité

(1) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, on considère l'équation suivante :

$$(E) : z^2 - (1 + im + \overline{m})z + \overline{m} + i|m|^2 = 0, \quad \text{où } m \in \mathbb{C}^* - \{i\}.$$

(a) Vérifier que $u = \overline{m}$ est solution de l'équation (E) .

(b) En déduire que l'autre solution de (E) est $v = 1 + im$.

(2) On suppose dans cette question que $m = e^{i\theta}$ où $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

• Écrire le nombre complexe $\frac{v}{u}$ sous forme trigonométrique.

(3) Dans le plan complexe, on considère les points $A(u)$ et $B(v)$.

• Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ tels que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.

(4) On suppose que $m = a + \frac{1}{2}i$ où $a \in \mathbb{R}$, et on considère la transformation R qui lie tout point $M(z)$ avec le point $M'(z')$ tel que : $z' = -iz + 1 + 2ia$.

(a) Montrer que R est une rotation en précisant l'axe de son centre Ω et en donnant une mesure de son angle.

(b) Montrer que $R(A) = B$, puis en déduire que $\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = -i$.

(c) Montrer que les points O , A , B et Ω sont cocycliques.

EXERCICE 12

Racines carrées • Triangle rectangle • Cercle circonscrit

(1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : \frac{1}{m}z^2 + (1 - 3i)z - 4m = 0, \quad \text{où } m \in \mathbb{C}^*.$$

(a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $a = 8 - 6i$.

(b) Déterminer les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E) telles que $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{m}\right) < 0$.

(c) On pose $\theta \equiv \arg(m) [2\pi]$. Calculer $\arg(z_1)$ et $\arg(z_2)$ en fonction de θ .

(2) Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M_1, M_2, M et D d'affixes respectifs z_1, z_2, m et $z_D = 1 + 3i$.

(a) Montrer que OM_1M_2 est un triangle rectangle en O .

(b) Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ tels que O, D et M soient alignés.

(c) Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ tels que ODM soit un triangle rectangle en O .

(3) Le point N_1 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et le point N_2 est l'image de M_2 par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

(a) Montrer que les points M_1, N_1, M_2 et N_2 sont cocycliques.

(b) Déterminer en fonction de m le rayon et l'affixe du centre du cercle circonscrit au quadrilatère formé par ces quatre points.

EXERCICE 13

Ensembles de points • Suite de points • Équation diophantienne

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on considère l'équation :

$$(E) : z^2 - [1 + m(1 + i)]z + im^2 + m = 0, \quad \text{où } m \in \mathbb{C}^* - \{i\}.$$

(1) (a) Montrer que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = (1 + (i - 1)m)^2$.

(b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

(2) (a) Déterminer la nature des ensembles suivants :

$$(D) = \{M(m) \in (P) / |1 + im| = |m|\} \quad \text{et} \quad (\Gamma) = \{M(m) \in (P) / \arg(1 + im) \equiv \arg(m) [\pi]\}.$$

(b) Écrire sous forme trigonométrique l'affixe de chacun des points d'intersection de (D) et (Γ).

Partie II

Dans le plan complexe (P), on considère les points $A(1)$ et $B(1 + i)$, et soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$. On pose : $A' = R(A)$ et $B' = R(B)$.

(1) Montrer que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

- (2) Soient E et F les milieux respectifs des segments $[AA']$ et $[BB']$.
- (a) Montrer que : $\frac{z_E}{z_E - z_F} = i$, puis en déduire que $(OE) \perp (EF)$.
- (b) Montrer que la droite (AA') coupe le segment $[BB']$ en F .
- (3) Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de points définie par : $M_0(i)$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); M_{n+1} = R(M_n)$.
- (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); \text{aff}(M_n) = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}$.
- (b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(F) : 12x - 5y = 3$.
- (c) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $M_n \in [Ox)$.

FORMES TRIGONOMÉTRIQUE ET EXPONENTIELLE



EXERCICE 14

Équation en $\cos \theta$ • Lieu d'un milieu • Losange

Partie I

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E) : z^2 - 2(1 + i \cos \theta)z + 2i \cos \theta = 0, \quad \text{où } \theta \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[.$$

- (1) (a) Vérifier que le discriminant de (E) est $\Delta = (2i \sin \theta)^2$.
- (b) En déduire l'ensemble des solutions de (E) .
- (2) Écrire chacune des solutions de (E) sous forme trigonométrique.

Partie II

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A , M_1 et M_2 d'affixes respectifs $a = 1$, $z_1 = 1 + ie^{i\theta}$ et $z_2 = 1 + ie^{-i\theta}$. On désigne par I le milieu du segment $[M_1M_2]$.

- (1) Déterminer et construire l'ensemble décrit par I lorsque θ varie sur $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$.
- (2) (a) Écrire $\frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}$ sous forme exponentielle, puis en déduire que M_2 est l'image de M_1 par une rotation R que l'on précisera.
- (b) Déterminer θ pour que AM_1M_2 soit un triangle équilatéral.
- (3) Montrer que lorsque θ varie sur $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$, la droite (M_1M_2) a une direction fixe.
- (4) Soit (D) la droite d'équation $x = 1$.
- Montrer que $M_2 = s_{(D)}(M_1)$, puis déterminer θ pour que le quadrilatère OAM_2M_1 soit un losange.

EXERCICE 15

Rotation • Symétrie axiale • Ensembles de points

Pour tout $\theta \in]-\pi; \pi]$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : z^2 - 4i(1 + i \sin \theta)z - 8i \sin \theta = 0.$$

- (1) (a) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.
 (b) On suppose dans cette question que $\theta \in]-\pi; 0[\cup]0; \pi[$. Écrire chacune des solutions de (E) sous forme trigonométrique.
- (2) Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points M, M_1 et M_2 d'affixes respectifs :

$$z = 2e^{i\theta}, \quad z_1 = 2i(1 + e^{i\theta}), \quad z_2 = 2i(1 - e^{-i\theta}).$$

On désigne par I le milieu du segment $[M_1 M_2]$.

- (a) Montrer que $M_1 = R(M)$, où R est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $\omega = -1 + i$.
 (b) Montrer que $z_I = -2 \sin \theta + 2i$, puis en déduire que lorsque θ varie sur $]-\pi; \pi]$, le point I varie sur le segment $[AB]$ où $A(-2 + 2i)$ et $B(2 + 2i)$.
 (c) Montrer que $M_2 = s_{(AB)}(M_1)$, où $s_{(AB)}$ est la symétrie axiale d'axe (AB) .
 (d) Déterminer alors l'ensemble (E_2) des points M_2 lorsque θ varie sur $]-\pi; \pi]$.

EXERCICE 16

Forme exponentielle • Cercle • Homothétie

Partie I

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E_\theta) : z^2 - i(1 - \cos \theta \cdot e^{i\theta})z + \cos \theta \cdot e^{i\theta} = 0, \quad \text{où } \theta \in \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[.$$

- (1) Vérifier que $z_1 = i$ est solution de (E_θ) .
 (2) Déterminer l'autre solution z_2 sous forme exponentielle.

Partie II

Dans le plan complexe, on considère les points A, B et M tels que :

$$z_A = i, \quad z_B = \frac{1}{4}i, \quad z_M = \frac{1}{i + \tan \theta}.$$

Soit N le milieu du segment $[AM]$.

- (1) Montrer que : $z_N = \frac{1}{4}(\sin(2\theta) + 2i \sin^2 \theta)$.
 (2) Montrer que lorsque θ varie sur $\left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, le point N varie sur le cercle (Γ) de centre B et de

rayon $R = \frac{1}{4}$ (privé d'un point que l'on précisera).

- (3) (a) Vérifier que $M = h(N)$, où h est l'homothétie de centre A et de rapport 2.
 (b) En déduire le lieu géométrique (Γ') décrit par M lorsque θ varie.

EXERCICE 17

Triangle rectangle • Homothétie et rotation • Périmètre maximal

Partie I

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E_\theta) : 2z^2 - 2ze^{i\theta} + i \sin \theta \cdot e^{i\theta} = 0, \quad \text{où } \theta \in]0; \pi[.$$

- (1) Montrer que (E_θ) admet deux solutions distinctes que l'on déterminera.
 (2) On pose : $z_1 = \frac{e^{i\theta} + 1}{2}$ et $z_2 = \frac{e^{i\theta} - 1}{2}$.
 (a) Écrire $z_1 \cdot z_2$ sous forme trigonométrique.
 (b) Montrer que : $z_1 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$. Puis écrire z_2 sous forme trigonométrique.

Partie II

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M, A, B, M_1 et M_2 d'affixes respectifs $e^{i\theta}, a = 1, b = -1, z_1$ et z_2 .

- (1) (a) Montrer que MAB est un triangle rectangle en M .
 (b) Montrer que les droites (AB) et (M_1M_2) sont parallèles.
 (2) Soient h l'homothétie de centre M et de rapport $k = 2$, et r la rotation de centre M et d'angle $\frac{-\pi}{2}$. On pose : $r(A) = C$.
 (a) Montrer que : $h(M_1) = A$ et $h(M_2) = B$.
 (b) Montrer que les points M, B et C sont alignés, puis en déduire que le nombre $Z = \frac{1 + e^{i\theta}}{i(1 - e^{i\theta})}$ est réel.
 (3) Déterminer θ pour que le périmètre du triangle MAB soit maximal.

EXERCICE 18

Perpendicularité • Médiatrice • Translation

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soit θ un nombre réel tel que $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] - \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$.

- (1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(E) : z^2 - \sqrt{2}e^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$.

- (a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = (\sqrt{2}i e^{i\theta})^2$.
- (b) Écrire sous forme trigonométrique les deux racines z_1 et z_2 de l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$.
- (2) On considère les points I, J, T_1, T_2 et A d'affixes respectives $1, -1, e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}, e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})}$ et $\sqrt{2}e^{i\theta}$.
- (a) Montrer que les deux droites (OA) et (T_1T_2) sont perpendiculaires.
- (b) Soit K le milieu du segment $[T_1T_2]$. Montrer que les points O, K et A sont alignés.
- (c) En déduire que la droite (OA) est la médiatrice du segment $[T_1T_2]$.
- (3) Soit r la rotation de centre T_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- (a) Donner l'expression complexe de la rotation r .
- (b) Vérifier que l'affixe du point B , image du point I par la rotation r , est $b = \sqrt{2}e^{i\theta} + i$.
- (c) Montrer que les deux droites (AB) et (IJ) sont perpendiculaires.
- (4) Déterminer l'affixe du point C , image du point A par la translation de vecteur $(-\vec{v})$.
- (5) Montrer que A est le milieu du segment $[BC]$.

EXERCICE 19

Forme trigonométrique paramétrée • Milieux • Hauteur d'un triangle

Partie I

Soit a un nombre complexe différent de 1. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0.$$

- (1) Montrer que $z_1 = \frac{a-1}{2}(1+i)$ et $z_2 = \frac{a-1}{2}(1-i)$ sont les deux solutions de l'équation (E) .
- (2) On prend $a = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$.
- (a) Montrer que : $a - 1 = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i(\frac{\theta+\pi}{2})}$.
- (b) En déduire la forme trigonométrique de z_1 et z_2 .

Partie II

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on admet que $\operatorname{Re}(a) < 0$, et on considère les points $A(a), B(-i), C(i)$ et $B'(1)$.

- (1) Déterminer en fonction de a les affixes des points J et K , milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$.
- (2) Soit r_1 la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et r_2 la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose $C' = r_1(C)$ et $A' = r_2(A)$, et soient c' l'affixe de C' et a' l'affixe de A' .
- Montrer que : $a' = z_1$ et $c' = z_2$.
- (3) Calculer $\frac{a' - c'}{a - 1}$ et en déduire que la droite (AB') est une hauteur du triangle $A'B'C'$.

ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ

IV

EXERCICE 20

Équation de degré 3 • Trois rotations • Orthogonalité

Partie I

Soit m un nombre complexe non nul. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E) : z^3 - 2mz^2 + 2m^2z - m^3 = 0.$$

- (1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) (on remarquera que m est une solution de l'équation (E)).
- (2) On note z_1 et z_2 les deux autres solutions de l'équation (E) , autres que m .
 - (a) Vérifier que : $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{m}$.
 - (b) Dans le cas où $m = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$, écrire sous la forme algébrique z_1 et z_2 .

Partie II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = me^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = me^{-i\frac{\pi}{3}}$. On note :

- P le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme O en A ;
- Q le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme A en B ;
- R le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme B en O .

- (1) Montrer que les points O , A et B ne sont pas alignés.
- (2) (a) Montrer que l'affixe de P est $p = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ et que l'affixe de R est $r = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$.
 (b) Montrer que l'affixe de Q est $q = m\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.
- (3) Montrer que $OQ = PR$ et que les deux droites (OQ) et (PR) sont perpendiculaires.

EXERCICE 21

Solution imaginaire pure • Trois rotations • Orthogonalité

Soit m un nombre réel non nul. On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ les deux équations suivantes :

$$(E) : z^2 + 2z + 1 + m^2 = 0 \quad \text{et} \quad (F) : z^3 + 2(1-i)z^2 + (1+m^2-4i)z - 2i(1+m^2) = 0.$$

- (1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
- (2) (a) Montrer que l'équation (F) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (F) .

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les deux points $A(-1 + im)$ et $B(-1 - im)$. Soit Ω le milieu du segment $[AB]$, A' le milieu du segment $[OB]$ et B' le milieu du segment $[OA]$. La rotation de centre Ω et d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ transforme A en $P(p)$, la rotation de centre A' et d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ transforme B en $Q(q)$, et la rotation de centre B' et d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ transforme O en $R(r)$.

(1) Montrer que $p = -1 + m$, $q = \frac{1-i}{2}(-1 - im)$ et que $r = \bar{q}$.

(2) (a) Vérifier que : $q - r = -ip$.

(b) En déduire que $OP = QR$ et que les deux droites (OP) et (QR) sont orthogonales.

EXERCICE 22

Factorisation • Racines carrées • Point fixe

Partie I

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E) : z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = 0.$$

(1) Vérifier que $-2i$ est une solution de l'équation (E) .

(2) Déterminer les deux nombres complexes α et β tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = (z + 2i)(z^2 + \alpha z + \beta).$$

(3) (a) Déterminer les deux racines carrées du nombre $5 - 12i$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

Partie II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct. On considère les points A , B et C d'abscisses respectifs $a = -1 + 3i$, $b = -2i$ et $c = 2 + i$.

(1) Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en C .

(2) On considère la rotation $\mathcal{R}_1$ de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et la rotation $\mathcal{R}_2$ de centre A et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$. Soit M un point du plan complexe d'abscisse z , M_1 son image par la rotation $\mathcal{R}_1$ et M_2 son image par la rotation $\mathcal{R}_2$.

(a) Vérifier que l'écriture complexe de la rotation $\mathcal{R}_1$ est $z' = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)z - \sqrt{3} - i$.

(b) Déterminer z_2 , l'abscisse de M_2 , en fonction de z .

(c) En déduire que le point I , milieu du segment $[M_1M_2]$, est un point fixe.

ROTATIONS, HOMOTHÉTIES ET TRANSFORMATIONS



RAPPEL DE COURS

L'écriture complexe d'une rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α est $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$; celle d'une homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ est $z' - \omega = k(z - \omega)$. Plus généralement, $z' = az + b$ avec $a \neq 1$ définit une similitude directe de centre le point fixe $\omega = \frac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$.

EXERCICE 23

Similitude directe • Point fixe • Cercle circonscrit

Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectifs $a = 2i$ et $b = \frac{3}{2}(-\sqrt{3} + i)$. Soit F la transformation qui lie tout point $M(z)$ avec le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = (1 + 2i)z - (4 + 2i).$$

- (1) (a) On pose $A' = F(A)$ et $B' = F(B)$. Calculer $\text{aff}(A')$ et $\text{aff}(B')$.
 (b) Montrer que F admet un seul point fixe Ω dont on déterminera l'axe ω .
 (c) Montrer que $F = h \circ r$, où h est une homothétie et r une rotation de centre Ω , en déterminant le rapport de h et l'angle de r .
- (2) Soit $M(z)$ un point de (P) distinct de $\Omega(\omega)$, et $M'(z')$ son image par F .
 (a) Montrer que : $z' - z = -2i(\omega - z)$.
 (b) En déduire la valeur de $\frac{MM'}{M\Omega}$ et une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{M\Omega})$.
 (c) Comment construire le point $M'(z')$ sachant la position du point $M(z)$?
- (3) Soit C le centre du cercle (Γ) circonscrit au triangle OAB . On désigne par R le rayon du cercle (Γ) et on pose $c = \text{aff}(C)$.
 (a) Montrer que : $c - \bar{c} = 2i$ et $c + \bar{c} = \frac{-4\sqrt{3}}{3}$.
 (b) En déduire c et R .

EXERCICE 24

Racines cubiques de l'unité • Transformation • Triangle équilatéral

Soit m un complexe non nul donné et $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Partie I

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E_m) : z^2 + mjz + m^2j = 0.$$

- (1) Vérifier que : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.
- (2) (a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta = [m(1 - j)]^2$.
 (b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_m) .
- (3) Dans cette question, on suppose que $m = 1 + i$.
 • Montrer que $(z_1 + z_2)^{2022}$ est un imaginaire pur.

Partie II

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit φ la transformation du plan complexe qui à tout point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(z')$ tel que : $z' = (1 + j)z$.

- (1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application φ .
- (2) On considère les points A, B et C d'affixes respectives m, mj et mj^2 . On note $A'(a'), B'(b')$ et $C'(c')$ les images respectives des points A, B et C par l'application φ , et soient $P(p), Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[BA'], [CB']$ et $[AC']$.
 (a) Montrer que : $a' = -mj^2, b' = -m$ et $c' = -mj$.
 (b) Montrer que : $p + qj + rj^2 = 0$.
 (c) En déduire que le triangle PQR est équilatéral.

EXERCICE 25

Alignement • Deux rotations d'angle $\frac{\pi}{3}$ • Nature d'un triangle

Soit $m \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Partie I

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$(E_m) : mz^2 - (m - 1)^2z - (m - 1)^2 = 0.$$

- (1) (a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta = (m^2 - 1)^2$.
 (b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_m) .
- (2) On prend uniquement dans cette question $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

Partie II

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les deux points A et B d'affixes respectifs $m - 1$ et $\frac{1}{m} - 1$.

- (1) Montrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $m \in \mathbb{R}$.
- (2) On suppose que m n'est pas un nombre réel. Soient C l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et D l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$; soient $P(p), Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[AC], [AD]$ et $[OB]$.
 (a) Montrer que l'affixe du point C est $c = m - 1 + \left(\frac{1}{m} - m\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$ et que l'affixe du point D est $d = (m - 1)e^{i\frac{\pi}{3}}$.

- (b) Montrer que : $2(p-r) = m-1 + \left(\frac{1}{m} - m\right) \left(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1\right)$ et $2(q-r) = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}} - \left(\frac{1}{m} - m\right)$.
- (c) Montrer que : $q - r = e^{i\frac{\pi}{3}}(p - r)$.
- (d) Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 26

Équation à trois paramètres • Centres de rotation • Cocyclicité

Soient a , b et c trois nombres complexes non nuls tels que : $a + b \neq c$.

- (1) (a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - (a + b + c)z + c(a + b) = 0$.
- (b) On suppose dans cette question que : $a = i$, $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c = a - b$. Écrire les deux solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.
- (2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les trois points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ qu'on suppose non alignés. Soit $P(p)$ le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme B en A , $Q(q)$ le centre de la rotation d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme C en A , et $D(d)$ le milieu du segment $[BC]$.
- (a) Montrer que : $2p = b + a + (a - b)i$ et $2q = c + a + (c - a)i$.
- (b) Calculer : $\frac{p - d}{q - d}$.
- (c) En déduire la nature du triangle PDQ .
- (3) Soient E le symétrique de B par rapport à P , F le symétrique de C par rapport à Q , et K le milieu du segment $[EF]$.
- (a) Montrer que l'abscisse de K est $k = a + \frac{i}{2}(c - b)$.
- (b) Montrer que les points K , P , Q et D sont cocycliques.

EXERCICE 27

Forme exponentielle • Triangles équilatéraux • Losange

Soit α un nombre complexe non nul.

Partie I

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E_\alpha) : z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0.$$

- (1) (a) Vérifier que le discriminant de (E_α) est $\Delta = \alpha^2$.
- (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α) .
- (2) Sachant que $\alpha = |\alpha|e^{i\lambda}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), mettre les deux racines de l'équation (E_α) sous la forme exponentielle.

Partie II

On suppose que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points Ω , M_1 et M_2 d'affixes respectivement α , $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$, et soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

- (1) (a) Montrer que $R(\Omega) = M_1$ et que $R(M_1) = M_2$.
 (b) En déduire que les deux triangles $O\Omega M_1$ et $OM_1 M_2$ sont équilatéraux.
- (2) (a) Vérifier que : $z_1 - z_2 = \alpha$.
 (b) Montrer que les deux droites (ΩM_2) et (OM_1) sont orthogonales.
 (c) En déduire que $O\Omega M_1 M_2$ est un losange.
- (3) Montrer que pour tout réel θ , le nombre $Z = \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \div \frac{z_2 - |\alpha|e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha|e^{i\theta}}$ est un réel.

EXERCICE 28

Discussion selon le paramètre • Rotation • Lieu circulaire

Partie I

Soit m un nombre complexe. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E_m) : z^2 + (im + 2)z + im + 2 - m = 0.$$

- (1) (a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta = (im - 2i)^2$.
 (b) Donner suivant les valeurs de m l'ensemble des solutions de (E_m) .
- (2) Pour $m = i\sqrt{2}$, écrire les deux solutions de (E_m) sous la forme exponentielle.

Partie II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A , Ω , M et M' d'affixes respectifs $a = -1 - i$, $\omega = i$, m et $m' = -im - 1 + i$.

- (1) Soit R la rotation d'angle $\frac{-\pi}{2}$ et qui transforme M en M' .
 (a) Vérifier que Ω est le centre de la rotation R .
 (b) Déterminer l'affixe b du point B tel que $A = R(B)$.
- (2) (a) Vérifier que : $m' - a = \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$.
 (b) En déduire que les points A , M et M' sont alignés si et seulement si les points A , B , Ω et M sont cocycliques.
 (c) Montrer que l'ensemble des points M tels que les points A , M et M' soient alignés est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

EXERCICE 29

Rotation de centre Ω • Cercle de diamètre $[AB]$ • Cocyclicité

Soit m un complexe non nul.

Partie I

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E_m) : 2z^2 - 2(m+1+i)z + m^2 + (1+i)m + i = 0.$$

- (1) Vérifier que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta = (2im)^2$.
- (2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) .

Partie II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On suppose que $m \in \mathbb{C} - \{0, 1, i\}$ et on pose : $z_1 = \frac{1+i}{2}(m+1)$ et $z_2 = \frac{1-i}{2}(m+i)$. On considère les points A, B, M, M_1 et M_2 d'affixes respectives $1, i, m, z_1$ et z_2 .

- (1) (a) Vérifier que : $z_1 = iz_2 + 1$.
 (b) Montrer que M_1 est l'image de M_2 par la rotation de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{1+i}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- (2) (a) Vérifier que : $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i \frac{m-1}{m-i}$.
 (b) Montrer que si les points M, M_1 et M_2 sont alignés, alors le point M appartient au cercle (Γ) dont l'un des diamètres est le segment $[AB]$.
 (c) Déterminer l'ensemble des points M tels que les points Ω, M, M_1 et M_2 soient cocycliques.
 (Remarquer que $\frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} = i$.)

ALIGNEMENT, ORTHOGONALITÉ ET COCYCLICITÉ

VI

EXERCICE 30

Équation liée à $a^2 = b^2 + c^2$ • Cocyclicité • Alignement

Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient $\theta \in]-\pi; \pi[$ et a, b, c des réels strictement positifs tels que : $a^2 = b^2 + c^2$.

Partie I

On pose $p = a \cos \theta + ib \sin \theta$ et on considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : z^2 - 2pz + c^2 = 0.$$

- (1) Vérifier que : $p^2 - c^2 = (b \cos \theta + ia \sin \theta)^2$. Puis en déduire les solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.
- (2) On notera z_1 et z_2 les solutions de (E) . Soient M_1, M_2, E et F les points d'affixes respectifs

z_1, z_2, c et $-c$.

- Montrer que : $\frac{z_2 + c}{z_2 - c} = -\frac{z_1 + c}{z_1 - c}$. En déduire que les points M_1, M_2, E et F sont cocycliques.

Partie II

Dans cette partie, on considère les points $B(-a)$, $C(a)$, $D(b + ic)$, et A est le symétrique de D par rapport à l'axe imaginaire.

- (1) Justifier que l'affixe de A est $z_A = -b + ic$.
- (2) Soit R la rotation de centre C et d'angle θ . On pose : $A' = R(A)$ et $B' = R(B)$.
 - Montrer que : $z_{A'} = a(1 - e^{i\theta}) + (-b + ic)e^{i\theta}$ et $z_{B'} = a(1 - 2e^{i\theta})$.
- (3) On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[A'D]$ et $[B'C]$.
 - (a) Montrer que : $\frac{z_I}{z_J} = \frac{a+b}{2a} + i \cdot \frac{c}{2a} \times \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$.
 - (b) En déduire que les points O, I et J sont alignés.

EXERCICE 31

Ensemble $z' \in i\mathbb{R}$ • Racines carrées • Cercle

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A(1)$ et $B(-1)$. À tout point $M(z)$ distinct de B on associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \frac{z-1}{z+1}$.

- (1) Montrer que : $|z| = 1 \iff z' \in i\mathbb{R}$.
- (2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^2 - 2e^{i\theta}z + 1 = 0$, où $\theta \in]0; \pi[$.
 - (a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $a = e^{2i\theta} - 1$ sous forme exponentielle.
 - (b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) .
- (3) On considère les points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ d'affixes respectifs :

$$z_1 = e^{i\theta} + \sqrt{2\sin\theta} e^{i\frac{\theta+\pi}{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = e^{i\theta} - \sqrt{2\sin\theta} e^{i\frac{\theta+\pi}{2}}.$$
 - (a) Vérifier que $\text{Im}(z_1) \neq 0$.
 - (b) En déduire que les points A, B et M_1 ne sont pas alignés.
 - (c) Vérifier que : $\frac{z'_1}{z'_2} = -1$, puis en déduire que A, B, M_1 et M_2 sont cocycliques.
- (4) Montrer que : $e^{i\theta} - i = -2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}$, puis en déduire que le point M_1 appartient à un cercle (Γ) dont on déterminera le rayon et l'affixe du centre.

EXERCICE 32

Symétrique par rapport à l'axe imaginaire • Parallélogramme • Orthogonalité

Soit m un nombre complexe différent de 2 et de $-i$. Le plan complexe est rapporté à un repère

orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E) : z^2 - (m - i)z - im = 0.$$

- (1) (a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $(m + i)^2$.
 (b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de (E) .
 (c) Sachant que $m = e^{i\frac{\pi}{8}}$, écrire le nombre $z_1 + z_2$ sous forme exponentielle.
- (2) On considère les points A, B et M d'affixes respectifs $2, -i$ et m , et soit M' le symétrique de M par rapport à l'axe imaginaire.
 (a) Déterminer en fonction de m l'abscisse de M' .
 (b) Déterminer en fonction de m l'abscisse du point N tel que le quadrilatère $ANMB$ soit un parallélogramme.
 (c) Montrer que les deux droites (AM) et (BM') sont perpendiculaires si et seulement si $\operatorname{Re}((2 - i)m) = \operatorname{Re}(m^2)$.

EXERCICE 33

Point sur le cercle circonscrit • Médiatrice • Forme trigonométrique

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère dans le plan complexe deux points M_1 et M_2 tels que les points O, M_1 et M_2 soient distincts deux à deux et non alignés. Soient z_1 et z_2 les affixes respectives des points M_1 et M_2 , et soit M le point dont l'abscisse z vérifie la relation : $z = \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}$.

- (1) (a) Montrer que : $\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = -1$.
 (b) En déduire que le point M appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2 .
- (2) Montrer que si $z_2 = \overline{z_1}$ alors M appartient à l'axe des réels.
- (3) On suppose que M_2 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et de mesure d'angle α , où α est un réel de l'intervalle $]0; \pi[$.
 (a) Calculer z_2 en fonction de z_1 et de α .
 (b) Montrer que le point M appartient à la médiatrice du segment $[M_1M_2]$.
- (4) Soit θ un réel donné de l'intervalle $]0; \pi[$. On suppose que z_1 et z_2 sont les deux solutions de l'équation : $6t^2 - (e^{i\theta} + 1)t + (e^{i\theta} - 1) = 0$.
 (a) Sans calculer z_1 et z_2 , vérifier que : $z = 2 \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$.
 (b) Donner, en fonction de θ , la forme trigonométrique du nombre complexe z .

EXERCICE 34

Deux parties indépendantes • Projeté orthogonal • Orthogonalité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Partie I

Soit a un nombre complexe non nul. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : iz^2 + (2 - i)az - (1 + i)a^2 = 0.$$

- (1) Déterminer z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) .
- (2) (a) Vérifier que : $z_1 z_2 = a^2(i - 1)$.
 (b) Montrer que : $z_1 z_2$ est un nombre réel $\iff \arg(a) \equiv \frac{-3\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2} \right]$.

Partie II

Soient c un nombre réel non nul et z un nombre complexe non nul. On considère les points A, B, C, D et M d'affixes respectives $1, 1 + i, c, ic$ et z .

- (1) (a) Montrer que A, D et M sont alignés $\iff (ic + 1)z + (ic - 1)\bar{z} = 2ic$ (remarquer que $c = \bar{c}$).
 (b) Montrer que : $(AD) \perp (OM) \iff (ic + 1)z - (ic - 1)\bar{z} = 0$.
- (2) Soit h l'abscisse du point H , projeté orthogonal du point O sur (AD) .
 (a) Montrer que : $h - (1 + i) = \frac{i}{c}(h - c)$.
 (b) En déduire que $(CH) \perp (BH)$.

EXERCICE 35

Symétrie centrale • Rotation • Ensemble cocyclique

Partie I

Soit m un nombre complexe non nul. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E_m) : z^2 + [(1 - i)m - 4]z - im^2 - 2(1 - i)m + 4 = 0.$$

- (1) Vérifier que le nombre $z_1 = -m + 2$ est solution de l'équation (E_m) .
- (2) Soit z_2 la deuxième solution de l'équation (E_m) .
 (a) Montrer que : $z_1 \cdot z_2 = 1 \iff im^2 + 2(1 + i)m - 3 = 0$.
 (b) Déterminer les deux valeurs de m pour lesquelles on a $z_1 \cdot z_2 = 1$.

Partie II

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application S qui au point M d'abscisse z fait correspondre le point M' d'abscisse z' tel que : $z' - 1 = -(z - 1)$, et la rotation R de centre le point Ω d'abscisse $(1 + i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$; soit z'' l'abscisse du point $M'' = R(M)$.

- (1) (a) Montrer que l'application S est la symétrie centrale de centre le point d'abscisse 1.
 (b) Montrer que : $z'' = iz + 2$.
- (2) Soit A le point d'abscisse 2. On suppose que le point M est distinct du point O , origine du repère.

- (a) Calculer $\frac{z'' - 2}{z' - 2}$, en déduire la nature du triangle $AM'M''$.
- (b) Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels les points A, Ω, M' et M'' sont cocycliques.

EXERCICE 36

Partie imaginaire d'un rapport • Perpendicularité • Cocyclicité

Soit $\alpha \in [0; 2\pi[$. On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_α) d'inconnue z :

$$(E_\alpha) : z^2 - 2^\alpha e^{i\alpha}(1 + 2i)z + i 2^{2\alpha+1} e^{i2\alpha} = 0.$$

Partie I

- (1) (a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E_α) est $\Delta_\alpha = (2^\alpha e^{i\alpha}(1 - 2i))^2$.
- (b) En déduire les deux solutions a et b de l'équation (E_α) avec $|a| < |b|$.
- (2) Vérifier que $\frac{b}{a}$ est un imaginaire pur.

Partie II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note par $M(z)$ le point d'affixe le nombre complexe z . On pose $\frac{b}{a} = \lambda i$ avec $\lambda = \operatorname{Im}\left(\frac{b}{a}\right)$.

- (1) On considère les points $A(a)$, $B(b)$ et $H(h)$ avec $\frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
- (a) Montrer que : $\frac{h}{b-a} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}\right)i$, puis en déduire que les droites (OH) et (AB) sont perpendiculaires.
- (b) Montrer que : $\frac{h-a}{b-a} = \frac{1}{\lambda^2 + 1}$, puis en déduire que les points H, A et B sont alignés.
- (2) Soient $I(m)$ le milieu du segment $[OH]$ et $J(n)$ le milieu de $[HB]$.
- (a) Montrer que : $\frac{n}{m-a} = -\lambda i$.
- (b) En déduire que les droites (OJ) et (AI) sont perpendiculaires et que $OJ = |\lambda| AI$.
- (c) Soit K le point d'intersection des droites (OJ) et (AI) . Montrer que les points K, I, H et J sont cocycliques.
- (d) Montrer que les droites (IJ) et (OA) sont perpendiculaires.

EXERCICE 37

Transformation $z' = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ • Médiatrice et cercle

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient M le point d'affixe le nombre complexe non nul z et M' le point d'affixe $z' = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$.

- (1) Déterminer le nombre complexe z pour que les deux points M et M' soient confondus.
- (2) On suppose que M est distinct des points A et B d'affixes respectifs 1 et -1 . Montrer que :
$$\frac{z' + 1}{z' - 1} = \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right)^2.$$
- (3) Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$.
 - Montrer que si M appartient à (Δ) alors M' appartient à (Δ) .
- (4) Soit (Γ) le cercle dont un diamètre est $[AB]$.
 - Montrer que si M appartient à (Γ) alors M' appartient à la droite (AB) .

EXERCICE 38

Équation en $e^{i\theta}$ • Projeté orthogonal • Cocyclicité

Soit $\theta \in [0; \pi[$.

Partie I

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) d'inconnue z :

$$(E_\theta) : z^2 + (1 - i)e^{i\theta}z - ie^{i2\theta} = 0.$$

- (1) (a) Vérifier que : $(E_\theta) \iff (2z + (1 - i)e^{i\theta})^2 = ((1 + i)e^{i\theta})^2$.
 (b) En déduire les deux solutions z_1 et z_2 de l'équation (E_θ) avec $\text{Im}(z_1) \leq 0$.
- (2) (a) Montrer que : $\frac{z_1 + 1}{z_2 + i} = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
 (b) En déduire la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{z_1 + iz_2}{z_2 + i}$.

Partie II

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = e^{i\theta}$, $b = (1 + i)e^{i\theta}$ et $c = b - a$. Soient m un nombre réel de $]0; 1[$, R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et le point Q d'affixe $q = me^{i\theta}$.

- (1) (a) Déterminer l'affixe p du point P , image du point Q par la rotation R .
 (b) Vérifier que : $R(A) = C$.
- (2) Soit H le point d'affixe $h = \frac{m}{m - i}e^{i\theta}$.
 (a) Montrer que : $\frac{p - a}{h} = \frac{m^2 + 1}{m}i$ et $\frac{h - a}{p - a} = \frac{1}{m^2 + 1}$.
 (b) En déduire que H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AP) .

- (c) Montrer que : $\frac{b-h}{q-h} = \frac{1}{m}i$.
- (d) En déduire que les droites (QH) et (HB) sont perpendiculaires.
- (e) Montrer que les points A, Q, H et B sont cocycliques.

EXERCICE 39

Rotation et homothétie • Condition de cocyclicité

Partie I

Soit $m \in \mathbb{C}^*$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E) : z^2 - (2+i)mz + m^2(1+i) = 0.$$

- (1) (a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = (im)^2$.
- (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
- (2) Soient z_1 et z_2 les deux solutions de (E) . Mettre sous la forme exponentielle $z_1 z_2$ dans le cas où $m = re^{i\theta}$ ($r \in \mathbb{R}_+^*, \theta \in \mathbb{R}$).

Partie II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On pose $z_1 = m$ et $z_2 = m(1+i)$. Soit M_1 le point d'affixe z_1 , M_2 le point d'affixe z_2 , $M_3(z_3)$ l'image du point O par la rotation de centre M_2 et d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$, et $M_4(z_4)$ l'image du point M_1 par l'homothétie de centre O et de rapport k ($k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$).

- (1) Calculer z_3 en fonction de m et z_4 en fonction de m et k .
- (2) Donner la forme algébrique de $\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \times \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$.
- (3) En déduire que les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont cocycliques si et seulement si $k = -2$.

EXERCICE 40

Polygone régulier • Suite de points • Limite d'un périmètre

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soient $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon R ($R > 0$) et A le point du cercle $(\mathcal{C})$ d'affixe R . Soient n un entier naturel tel que $n \geq 2$, et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$. On considère la suite de points $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ du cercle $(\mathcal{C})$ définie par :

$$M_0 = A \quad \text{et} \quad M_{k+1} = r(M_k),$$

et soit z_k l'affixe du point M_k .

- (1) (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer z_{k+1} en fonction de z_k .
- (b) En déduire z_k en fonction de k et n .
- (c) Comparer M_n et M_0 .

(d) Construire la figure pour $n = 16$ et $R = 4$ cm.

(2) (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\left\| \overrightarrow{M_k M_{k+1}} \right\| = 2R \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

(b) On pose : $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{M_k M_{k+1}} \right\|$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n$ et donner une interprétation géométrique.

FIN DU POLYCOPIÉ III

Prof. Saad Choukri

© 2026 — Tous droits réservés