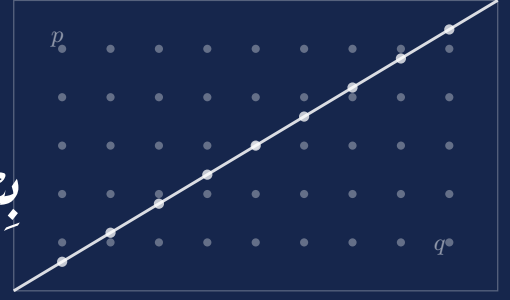


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



COLLECTION D'EXERCICES • NIVEAU BAC

Pour bien se préparer  
à l'examen national

للتّضير الجيد للاستّحان الوطني

Polycopié V • Arithmétique dans  $\mathbb{Z}$

المطبوع الخامس • الحسابات في  $\mathbb{Z}$

Divisibilité · Équations diophantiennes · Congruences  
Théorème de Fermat · Nombres premiers · Numération

40 exercices de préparation

أربعون تمريناً للتّضير للاستّحان الوطني

Sélection d'exercices issus des devoirs surveillés,  
devoirs libres et sujets d'examens blancs.

**Niveau** 2<sup>ème</sup> année Baccalauréat – Sciences Mathématiques (السنة الثانية بكالوريا -- علوم رياضية)

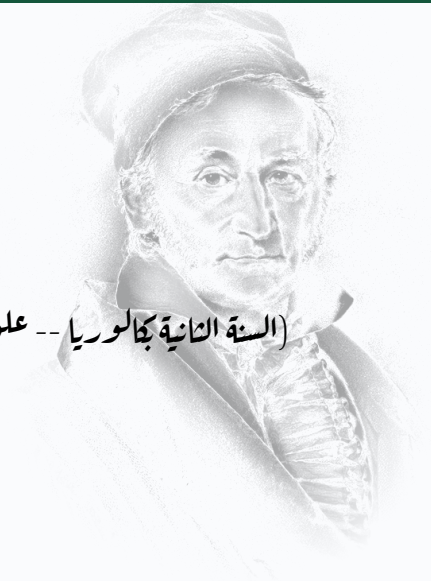
**Discipline** Mathématiques – Algèbre et Géométrie

**Volume** V – Recueil d'exercices

AUTEUR

Prof. Saad Choukri سعد شكري

© 2026 Prof. Saad Choukri — Tous droits réservés



## Avant-propos

Ce polycopié rassemble **quarante exercices** d'arithmétique dans  $\mathbb{Z}$ , sélectionnés dans une base de devoirs surveillés et d'examens blancs. Les énoncés couvrent l'intégralité du programme : divisibilité, PGCD et PPCM, équations diophantiennes, congruences et systèmes de congruences, petit théorème de Fermat, nombres premiers et systèmes de numération.

Les exercices sont regroupés en **sept parties thématiques**, de difficulté croissante à l'intérieur de chaque partie. Les trois dernières parties proposent des problèmes longs, de structure identique à celle des épreuves de l'examen national.

La plus grande partie des exercices de ce polycopié a été extraite des anciens devoirs surveillés du professeur **Abdellah Belkhatir** الأستاذ عبد الله بالخير , que nous remercions vivement.

## Table des matières **الفهرس**

|            |                                                             |                                        |
|------------|-------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| <b>I</b>   | Divisibilité, PGCD et PPCM<br>Exercices 1 à 6               | القابلية للقسمة والقاسم المشترك الأكبر |
| <b>II</b>  | Équations diophantiennes<br>Exercices 7 à 12                | المعادلات الديوفانتية                  |
| <b>III</b> | Congruences et systèmes de congruences<br>Exercices 13 à 18 | الموافقات وأنظمة الموافقات             |
| <b>IV</b>  | Petit théorème de Fermat<br>Exercices 19 à 24               | مبرهنة فيرما الصغرى                    |
| <b>V</b>   | Nombres premiers<br>Exercices 25 à 30                       | الأعداد الأولية                        |
| <b>VI</b>  | Systèmes de numération<br>Exercices 31 à 35                 | أنظمة العدّ                            |
| <b>VII</b> | Exercices de synthèse<br>Exercices 36 à 40                  | تمارين تركيبية                         |

# بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## تقديم المطبوع

يضمّ هذا المطبوع أربعين تمريناً في الحسابات في  $\mathbb{Z}$ ، انتُقيت من الفروض المحروسة والامتحانات التجريبية، وهي موجهة لتلاميذ السنة الثانية من سلك البكالوريا، شعبة العلوم الرياضية.

تغطّي هذه التمارين مقرّر الحسابات كاملاً: القابلية للقسمة، القاسم المشترك الأكبر والضاعف المشترك الأصغر، المعادلات الديوفانتية، الموافقات وأنظمتها، مبرهنة فيرما الصغرى، الأعداد الأولية، ثم أنظمة العد.

رُتبت التمارين في سبعة محاور، مع تدرّج في الصعوبة داخل كلّ محور. أمّا المحاور الثلاثة الأخيرة فتضمّن مسائل مرّبة تشبه في بنيتها مسائل الامتحان الوطني.

استُخرج الجزء الأكبر من تمارين هذا المطبوع من الفروض المحروسة السابقة للأستاذ عبد الله بلخخير، فله منا جزيل الشكر والتقدير.

## إرشادات للاستعمال

حاول حلّ كلّ تمرين دون النظر إلى الإرشادات لمدة عشرين دقيقة على الأقلّ. احرص على تحرير الحلّ كاملاً، فنقطة الامتحان تقيس الدقّة والصرامة كما تقيس النتيجة. لا ترجع إلى الإرشادات الملونة إلا عند الضرورة القصوى.

## شكر وتقدير

يتقدم مُعدّ هذا الطبع بأصدق عبارات الشكر والتقدير إلى الأستاذ الفاضل عبد الله بلخاتير، الذي استخرج الجزء الأكبر من تمارين هذا العمل من فروض المحروسة السابقة، فجزاه الله خيراً على جهده في خدمة الرياضيات وتلاميذها.

## Remerciements

L'auteur adresse ses plus sincères remerciements au professeur **Abdellah Belkhatir**, dont les anciens devoirs surveillés ont fourni la plus grande partie des exercices réunis ici, et le remercie chaleureusement pour son dévouement constant au service de l'enseignement des mathématiques.

إعداد الأستاذ سعد شكري  
وفقكم الله



## DIVISIBILITÉ, PGCD ET PPCM

### RAPPEL DE COURS

**Bézout** :  $a \wedge b = 1 \iff \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2; au + bv = 1$ . **Gauss** : si  $a \mid bc$  et  $a \wedge b = 1$ , alors  $a \mid c$ . Si  $d = a \wedge b$ , on écrit  $a = da'$  et  $b = db'$  avec  $a' \wedge b' = 1$ , et  $a \wedge b \times a \vee b = |ab|$ .

### EXERCICE 1

Équation  $x^2(x^2 + 7) = y(2x + y)$  • Méthode du PGCD

On considère dans  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  l'équation :

$$(E) : x^2(x^2 + 7) = y(2x + y).$$

- (1) Soit  $(x, y)$  une solution de  $(E)$ . On pose :  $x = da$  et  $y = db$ , où  $d = x \wedge y$ .
  - (a) Vérifier que :  $a^2(d^2a^2 + 7) = b(2a + b)$ .
  - (b) En déduire qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que :  $2a + b = ka^2$  et  $d^2a^2 + 7 = kb$ .
  - (c) Montrer que :  $a = 1$ . Puis en déduire que :  $(b + 1)^2 = d^2 + 8$ .
- (2) Résoudre dans  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  l'équation  $(E)$  en justifiant la réponse.

### EXERCICE 2

Carrés parfaits • Irrationalité • Équation  $a^2 = 2b^2 + 1$

#### Partie I

- (1) Soient  $x, y \in \mathbb{N}^*$  tels que :  $x \wedge y = 1$  et  $xy$  est un carré parfait.
  - Montrer que  $x$  et  $y$  sont des carrés parfaits.
- (2) En raisonnant par l'absurde, montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \notin \mathbb{Q}$ .

#### Partie II

Soient  $a, b \in \mathbb{N}^*$  tels que :  $a^2 = 2b^2 + 1$ .

- (1) Montrer que :  $a \wedge b = 1$ .
- (2) Déterminer  $(a - 1) \wedge (a + 1)$ , puis en déduire que  $a - 1$  ou  $a + 1$  est divisible par 2 et non divisible par 4.
- (3) On suppose que  $a - 1$  est divisible par 2 et non divisible par 4.
  - Montrer que :  $\left(\frac{a-1}{2}\right) \wedge (a+1) = 1$ . Puis en déduire que  $\sqrt{\frac{a-1}{2}}$  et  $\sqrt{a+1}$  sont des entiers naturels qui divisent  $b$ .

### EXERCICE 3

Entiers consécutifs • Nombres premiers de la forme  $3k + 1$

- (1) Soit  $a \in \mathbb{N}^*$  tel que  $a \geq 5$ . On considère les entiers  $a$  et  $a + 1$ .
  - (a) Montrer que :  $a \wedge (a + 1) = 1$ .
  - (b) Montrer que :  $(a + 1) \wedge (a^2 - a + 1)$  divise 3.
  - (c) Soit  $p$  un diviseur premier de  $a^2 - a + 1$ . Montrer que :  $a^3 \equiv -1 [p]$ , puis en déduire que  $a^6 \equiv 1 [p]$ .
- (2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $A_n = 3(n!)^3 + 3(n!) + 1$ .
  - (a) Soit  $p$  un diviseur premier de  $A_n$ . Montrer que :  $p > n$ .
  - (b) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers qui s'écrivent sous la forme  $3k + 1$ , où  $k \in \mathbb{N}^*$ .

### EXERCICE 4

Produit égal à un cube • PGCD de  $a - 1$  et  $a^2 + a + 1$

#### Partie I

Soient  $a, b$  et  $c$  des entiers naturels non nuls tels que :  $ab = c^3$  et  $a \wedge b = 1$ .

- Montrer qu'il existe  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que :  $a = \alpha^3$  et  $b = \beta^3$ .

#### Partie II

Soit  $a \in \mathbb{N}^*$  tel que :  $a \geq 2$ .

- (1) Vérifier que :  $a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$ .
- (2) Montrer que :  $(a - 1) \wedge (a^2 + a + 1)$  divise 3.
- (3) On suppose que  $a - 1$  et  $a^2 + a + 1$  ne sont pas divisibles par 3.
  - Montrer que :  $(a - 1) \wedge (a^2 + a + 1) = 1$ . Puis en déduire que si  $a^3 - 1$  est un cube parfait, alors  $a - 1$  et  $a^2 + a + 1$  sont des cubes parfaits.
- (4) Montrer que :  $\left(\frac{a - 1}{3}\right) \wedge (a^2 + a + 1) = 1$  lorsque 3 divise  $a - 1$  et 9 ne divise pas  $a^2 + a + 1$ .

### EXERCICE 5

Divisibilité • PGCD et PPCM • Système

- (1) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $(E) : 3x - 2y = 5$ .
- (2) Déterminer l'ensemble des solutions de  $(E)$  dans  $\mathbb{N}^2$ .
- (3) Déterminer le plus petit entier naturel  $x$  supérieur à 2014 vérifiant :  $(F) : y^3 \equiv 15x [41]$  pour un certain  $y \in \mathbb{Z}$ .
- (4) Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls tels que :  $a \wedge b = 6$  et  $a \vee b = 180$ .

- Déterminer tous les couples  $(a, b)$  possibles.

### EXERCICE 6

Somme  $S_n = \sum 11^k$  • Divisibilité • Équation associée

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $S_n = 1 + 11 + 11^2 + 11^3 + \dots + 11^n = \sum_{k=0}^n 11^k$ .

- (1) Vérifier que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 10 S_n = 11^{n+1} - 1$ .
- (2) Montrer que :  $S_{2018} \wedge 11 = 1$ , puis en déduire que  $S_{2018} \wedge 11^{2017} = 1$ .
- (3) (a) Montrer que :  $11x \equiv 1 \pmod{S_{2018}}$  admet des solutions dans  $\mathbb{Z}$ .  
(b) Déterminer l'ensemble  $S$  des solutions de l'équation  $(E) : 11x \equiv 1 \pmod{S_{2018}}$ , et vérifier que :  $S = \{11^{2017} + S_{2018} k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .
- (4) Soit  $p$  un diviseur premier de  $S_{2018}$ . Montrer que :  $p \neq 5$ , puis en déduire le reste de la division euclidienne de  $S_{2018}$  par 5.
- (5) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $11^{2018}x - 5y = 1$ .

## ÉQUATIONS DIOPHANTIENNES

II

### MÉTHODE

Pour résoudre  $ax + by = c$  dans  $\mathbb{Z}^2$  : on vérifie que  $d = a \wedge b$  divise  $c$ , on cherche une solution particulière  $(x_0, y_0)$  par l'algorithme d'Euclide, puis toutes les solutions s'écrivent  $x = x_0 + \frac{b}{d}k, y = y_0 - \frac{a}{d}k, k \in \mathbb{Z}$ .

### EXERCICE 7

Équation  $8x - 5y = 1$  • Système de congruences • Problème concret

On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $(E) : 8x - 5y = 1$ .

- (1) (a) Justifier que l'ensemble des solutions de  $(E)$  est non vide.  
(b) Déterminer l'ensemble des solutions de  $(E)$ .
- (2) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  le système  $(S) : \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{8} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$
- (3) (a) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $(F) : 8x - 5y = 100$ .  
(b) Un groupe de garçons et de filles a dépensé dans une excursion un montant de 1000 DH. Chaque garçon a dépensé 80 DH et chaque fille a dépensé 50 DH.  
• Donner les répartitions possibles du groupe, en justifiant la réponse.

### EXERCICE 8

Équation  $143u - 840v = 1$  • Anneau  $\mathbb{Z}/840\mathbb{Z}$  • Ordre

- (1) On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $(E) : 143u - 840v = 1$ .
  - (a) Vérifier que :  $143 \times 47 - 840 \times 8 = 1$ . Puis en déduire  $143 \wedge 840$ .
  - (b) Résoudre l'équation  $(E)$ , en précisant les différentes étapes.
  - (c) Résoudre dans  $\mathbb{Z}/840\mathbb{Z}$  l'équation  $(F) : \overline{143} \times d = \overline{1}$ .
- (2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que :  $n \wedge 899 = 1$ .
  - (a) Montrer que :  $n \wedge 29 = 1$  et  $n \wedge 31 = 1$ .
  - (b) En déduire que :  $n^{840} \equiv 1 [899]$ .
- (3) Déterminer un entier naturel  $n$  tel que :  $100 \leq n \leq 1000$  et  $n^{143} \equiv 2 [899]$ .

### EXERCICE 9

Équation  $148x - 97y = 1$  • Système à trois congruences • Somme  $S_n$

#### Partie I

On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $(E) : 148x - 97y = 1$ .

- (1) En utilisant l'algorithme d'Euclide, donner une solution de  $(E)$ .
- (2) Déterminer l'ensemble des solutions de  $(E)$ .
- (3) Résoudre dans  $\mathbb{Z}/148\mathbb{Z}$  l'équation  $(F) : \overline{97} \times u = \overline{1}$ .
- (4) (a) Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . Montrer que :  $\begin{cases} n \equiv 2 [4] \\ n \equiv 6 [37] \end{cases} \iff n \equiv 6 [148]$ .

(b) En déduire l'ensemble des solutions du système  $(S) : \begin{cases} n \equiv 2 [4] \\ n \equiv 6 [37] \\ n \equiv 7 [97] \end{cases}$

#### Partie II

Pour tout  $n$  appartenant à  $E = \{2; 3; \dots; 148\}$ , on pose :  $S_n = \sum_{k=0}^{147} n^k$ .

- (1) Vérifier que 149 est premier.
- (2) (a) Montrer que :  $(\forall n \in E); n^{148} \equiv 1 [149]$ .  
 (b) En déduire que :  $(\forall n \in E); S_n \equiv 0 [149]$ .
- (3) (a) Montrer que :  $(\forall n \in E); n^{148} \wedge (n - 1) = 1$ .  
 (b) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $(E_n) : n^{148}x - (n - 1)y = n$ .

**EXERCICE 10**

Équation  $8x - 17y = 11$  • Congruences de puissances • Système

**Partie I**

On considère dans l'ensemble  $\mathbb{Z}^2$  l'équation suivante :  $(E) : 8x - 17y = 11$ .

- (1) (a) Vérifier que  $(-22, -11)$  est une solution particulière de  $(E)$ .  
 (b) Résoudre l'équation  $(E)$  en précisant les différentes étapes.
- (2) On considère dans  $\mathbb{Z}$  l'équation  $(F) : x^{15} \equiv 4 [17]$ . Soit  $x \in \mathbb{Z}$  une solution de  $(F)$ .  
 (a) Montrer que :  $x \wedge 17 = 1$ . Puis en déduire que :  $x^{16} \equiv 1 [17]$ .  
 (b) Montrer que :  $4x \equiv 1 [17]$ . Puis en déduire que :  $x \equiv 13 [17]$ .  
 (c) Déterminer, en justifiant la réponse, l'ensemble des solutions de  $(F)$ .

**Partie II**

Soient  $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$  et  $p$  un entier naturel premier.

- (1) Montrer que :  $x^2 \equiv 0 [p^{2n}] \Rightarrow x \equiv 0 [p^n]$ .
- (2) On considère dans  $\mathbb{Z}$  le système  $(S) : \begin{cases} x^{15} \equiv 4 [17] \\ x^2 - 4x - 60 \equiv 0 [64] \end{cases}$  Soit  $x \in \mathbb{Z}$  une solution du système  $(S)$ .  
 (a) Montrer que :  $x \equiv 98 [136]$ .  
 (b) Déterminer, en justifiant la réponse, l'ensemble des solutions du système  $(S)$ .
- (3) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  le système  $(S') : \begin{cases} x^{15} \equiv 4 [17] \\ x^2 - 4x - 2021 \equiv 0 [2025] \end{cases}$  On donne :  $2025 = 3^4 \times 5^2$  la décomposition de 2025 en facteurs premiers.

**EXERCICE 11**

Équation  $23x - 47y = 1$  • Théorème de Wilson • Application

On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $(E) : 23x - 47y = 1$ .

- (1) (a) Vérifier que  $(E)$  admet au moins une solution dans  $\mathbb{Z}^2$ .  
 (b) Résoudre l'équation  $(E)$ , en précisant les différentes étapes.
- (2) Déterminer tous les entiers relatifs  $N$  tels que :  $\begin{cases} N \equiv 1 [23] \\ N \equiv 2 [47] \end{cases}$
- (3) (a) Résoudre dans  $\mathbb{Z}/47\mathbb{Z}$  l'équation :  $x^2 = \bar{1}$ .  
 (b) Montrer que pour tout  $x \in \{1, 2, 3, \dots, 46\}$ , on a :  $x^{23} \equiv 1 [47]$  ou  $x^{23} \equiv -1 [47]$ .  
 (c) Montrer que :  $46! \equiv -1 [47]$ .
- (4) Montrer que :  $2^{506} \equiv 1 [1081]$ .

EXERCICE 12

Équation  $4x - 5y = 1$  • PGCD de deux suites • Divisibilité de  $2^a + 3^b$

- (1) (a) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $(E) : 4x - 5y = 1$ .
- (b) En déduire l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{Z}$  du système  $(S) : \begin{cases} x \equiv 3 [5] \\ x \equiv 2 [4] \end{cases}$
- (2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $a = 4n + 3$  et  $b = 3n + 1$ .
- (a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; a \wedge b = (n + 2) \wedge 5$ , puis en déduire les valeurs de l'entier naturel  $n$  telles que :  $a \wedge b = 5$ .
- (b) Montrer que :  $2^a + 3^b \equiv 0 [5] \iff 2^{a-b} \equiv 4 [5]$ .
- (c) Déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que :  $\begin{cases} n \geq 2018 \\ 2^a + 3^b \equiv 0 [5] \\ a \wedge b = 5 \end{cases}$
- (3) Soit  $p \geq 5$  un nombre premier.
- Montrer que :  $2^p + 3^p \equiv 0 [p] \iff p = 5$ .

CONGRUENCES ET SYSTÈMES DE CONGRUENCES



EXERCICE 13

$6^{30} \equiv 1 [55]$  • Équation  $17x - 40y = 1$  • Système de puissances

- (1) (a) Montrer que :  $6^{30} \equiv 1 [55]$ .
- (b) En déduire le reste de la division euclidienne de  $6^{33}$  par 55.
- (2) On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $(E) : 17x - 40y = 1$ .
- (a) Montrer que l'ensemble des solutions de  $(E)$  est non vide.
- (b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, donner une solution de  $(E)$ .
- (c) Déterminer l'ensemble des solutions de  $(E)$ .
- (d) Déterminer le plus petit entier naturel  $x_0$  tel que :  $17x_0 \equiv 1 [40]$ .
- (3) On considère dans  $\mathbb{Z}$  le système  $(S) : \begin{cases} x^{17} \equiv a [55] \\ x^{40} \equiv 1 [55] \end{cases}$  où  $a \in \mathbb{N}$ .
- Montrer que si  $x \in \mathbb{Z}$  est solution de  $(S)$ , alors :  $x \equiv a^{33} [55]$ .
- (4) On suppose dans cette question que :  $a \wedge 55 = 1$ .
- (a) Montrer que :  $a^{40} \equiv 1 [55]$ .
- (b) En déduire que l'ensemble des solutions de  $(S)$  est  $S = \{a^{33} + 55k / k \in \mathbb{Z}\}$ .

- (5) Montrer que l'ensemble des solutions du système  $(S')$  :  $\begin{cases} x^{17} \equiv 6 [55] \\ x^{40} \equiv 1 [55] \end{cases}$  est :  $S' = \{51 + 55k / k \in \mathbb{Z}\}$ .

#### EXERCICE 14

Équation  $25x - 4y = 1$  • Suite  $a_n = 5^{2^n}$  • Chiffres identiques

##### Partie I

On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $(E) : 25x - 4y = 1$ .

- (1) (a) Justifier que l'ensemble des solutions de  $(E)$  est non vide.  
 (b) Déterminer l'ensemble des solutions de  $(E)$ .
- (2) On considère dans  $\mathbb{Z}$  le système  $(S) : \begin{cases} x \equiv 0 [25] \\ x \equiv 1 [4] \end{cases}$   
 (a) Montrer que si  $x$  est solution de  $(S)$ , alors :  $x \equiv 25 [100]$ .  
 (b) Déterminer l'ensemble des solutions de  $(S)$  en justifiant la réponse.

##### Partie II

Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on considère dans  $\mathbb{Z}$  le système  $(S_n) : \begin{cases} x \equiv 0 [5^n] \\ x \equiv 1 [2^n] \end{cases}$  On pose :  $a_n = 5^{2^n}$ .

- (1) Vérifier que  $a_n$  est solution de  $(S_n)$  pour tout  $n \geq 2$ .
- (2) Soit  $x$  une solution entière de  $(S_n)$ .  
 • Montrer que :  $x^2$  est solution de  $(S_{n+1})$  et que :  $x^2 \equiv x [10^n]$ .
- (3) Déterminer un entier naturel  $p$  strictement plus petit que 1000 tel que  $p$  et  $p^2$  ont respectivement le même chiffre des unités, des dizaines et des centaines.
- (4) Déterminer l'ensemble des solutions du système  $(S_n)$ .

#### EXERCICE 15

Équation  $10^x \equiv 2 [19]$  • Ordre multiplicatif

On considère dans  $\mathbb{N}$  l'équation :  $(E) : 10^x \equiv 2 [19]$ .

- (1) (a) Montrer que :  $10^{18} \equiv 1 [19]$ .  
 (b) En déduire que :  $10^{17} \equiv 2 [19]$  (on pourra utiliser le théorème de Gauss).
- (2) Soit  $x \in \mathbb{N}$  une solution de l'équation  $(E)$ . On pose :  $d = 18 \wedge (x + 1)$ .  
 (a) Vérifier que :  $10^{x+1} \equiv 1 [19]$ .  
 (b) Montrer que :  $10^d \equiv 1 [19]$ .  
 (c) Justifier que :  $d = 18$ , puis en déduire que :  $x \equiv 17 [18]$ .

- (3) Soit  $x \in \mathbb{N}$  tel que :  $x \equiv 17 [18]$ .
- Montrer que :  $10^x \equiv 2 [19]$  (on pourra utiliser 1)b)).
- (4) Donner l'ensemble des solutions de l'équation  $(E)$  en justifiant la réponse.

**EXERCICE 16**Équation  $2018x + 2017y = 2$  • Système de congruences

- (1) On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $(E) : 2018x + 2017y = 2$ .
- (a) Vérifier que  $2018 \wedge 2017 = 1$ , puis déterminer une solution particulière de  $(E)$ .
- (b) Déterminer l'ensemble des solutions de  $(E)$  dans  $\mathbb{Z}^2$ .
- (2) On considère dans  $\mathbb{Z}$  l'équation :  $(F) : 2016x^{2009} + x - 2 \equiv 0 [2018]$ .
- (a) Montrer que si  $x$  est solution de  $(F)$ , alors :  $x \wedge 2018 = 1$ .
- (b) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{Z}); x^{1009} \equiv \pm 1 [2018]$  lorsque  $x \wedge 2018 = 1$ .
- (c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $(F)$ .
- (3) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  le système  $(S) : \begin{cases} (x+2)^{2009} \equiv 6 [1009] \\ x \equiv 2 [2017] \end{cases}$

**EXERCICE 17**Équation  $7x - 3y = 1$  • Congruences quadratiques • Système**Partie I**

- (1) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $(F) : 7x - 3y = 18$ .
- (2) Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tels que :  $x = 7k + 2$  et  $y = 5k + 4$ .
- Vérifier que  $(7k + 2) \wedge (5k + 4)$  divise 18, puis en déduire les valeurs de  $k$  pour lesquelles  $x \wedge y = 1$ .

**Partie II**

- (1) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  chacune des équations : (1) :  $x^2 \equiv 2 [7]$  et (2) :  $x^2 \equiv 4 [5]$ .
- (2) En déduire l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{Z}^2$  de l'équation :  $(G) : 7x^2 - 5y^2 = 18$ .

**EXERCICE 18**Somme géométrique  $S_n = \sum 5^k$  • Reste modulo 7 • Équation associée

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n = \sum_{k=0}^n 5^k$ .

- (1) Vérifier que :  $(\forall n \in \mathbb{N}); 4S_n = 5^{n+1} - 1$ .

- (2) Déterminer, suivant les valeurs de  $n$ , le reste de la division euclidienne de  $5^n$  par 7.
- (3) En déduire le reste de la division euclidienne de  $S_{2017}$  par 7.
- (4) On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $(E_n) : 5^n x - S_n y = 7$ .
  - (a) Montrer que :  $5^n \wedge S_n = 1$ , puis en déduire que  $(E_n)$  admet des solutions dans  $\mathbb{Z}^2$ .
  - (b) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $(E_n)$  pour  $n = 1$ , c'est-à-dire  $5x - 6y = 7$ .
  - (c) Déterminer les couples  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  solutions de  $5x - 6y = 7$  tels que :  $x \wedge y = 7$ .

## PETIT THÉORÈME DE FERMAT

IV

### RAPPEL DE COURS

**Petit théorème de Fermat** : si  $p$  est premier et  $a \wedge p = 1$ , alors  $a^{p-1} \equiv 1 [p]$ . Sous forme générale : pour tout  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $a^p \equiv a [p]$ . On rappelle aussi que  $p \mid C_p^k$  pour tout  $k \in \{1, \dots, p-1\}$  lorsque  $p$  est premier.

### EXERCICE 19

$$N = 4a^2 + 1 \cdot \text{Diviseurs premiers} \equiv 1 [4] \cdot \text{Infinitude}$$

On pose :  $N = 4a^2 + 1$ , où  $a \in \mathbb{N}^*$ .

- (1) Soit  $p \geq 2$  un diviseur premier positif de  $N$ .
  - (a) Justifier que :  $p \geq 3$ .
  - (b) Montrer que :  $(2a)^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} [p]$ .
- (2) Montrer que :  $(2a) \wedge p = 1$ . Puis en déduire que :  $(2a)^{p-1} \equiv 1 [p]$ .
- (3) (a) En utilisant ce qui précède, montrer que :  $p \equiv 1 [4]$ .  
 (b) Montrer que si  $d$  est un diviseur positif de  $N = 4a^2 + 1$ , alors  $d \equiv 1 [4]$ .
- (4) En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que l'ensemble des nombres premiers qui s'écrivent sous la forme  $4k + 1$ , où  $k \in \mathbb{N}^*$ , est infini.

### EXERCICE 20

$$N_p = 7p + 3^p - 4 \cdot \text{Théorème de Bézout} \cdot \text{Carré parfait}$$

Pour tout entier naturel premier et impair  $p$ , on pose :  $N_p = 7p + 3^p - 4$ .

- (1) Montrer que :  $N_p \equiv -1 [p]$ .
- (2) On suppose qu'il existe un entier naturel  $m$  tel que :  $N_p = m^2$ .
  - (a) Montrer que :  $m^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} [p]$ .
  - (b) En utilisant le théorème de Bézout, montrer que :  $m \wedge p = 1$ . Puis en déduire que :

$$m^{p-1} \equiv 1 [p].$$

(c) Montrer que :  $p \equiv 1 [4]$ .

(d) Prouver que :  $m^2 \equiv 2 [4]$ .

(3) Soit  $a \in \mathbb{N}$ . Quels sont les restes possibles de la division de  $a^2$  par 4 ?

(4) En déduire de ce qui précède que  $N_p$  n'est jamais un carré parfait.

### EXERCICE 21

Équation  $9x^2 + 15x + 7 \equiv 0 [19]$  • Diviseurs premiers • Modulo 191

#### Partie I

On considère dans  $\mathbb{Z}$  l'équation suivante :  $(E) : 9x^2 + 15x + 7 \equiv 0 [19]$ .

(1) Vérifier que :  $(\forall x \in \mathbb{Z}); 9x^2 + 15x + 7 \equiv (3x - 7)^2 - 4 [19]$ .

(2) En déduire que l'ensemble des solutions de  $(E)$  est :  $S = \{19k + 3 / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{19k + 8 / k \in \mathbb{Z}\}$ .

#### Partie II

Soit  $p \geq 2$  un entier naturel premier. On suppose qu'il existe  $a \in \mathbb{Z}$  tel que :  $9a^2 + 15a + 7 \equiv 0 [p]$ .

(1) (a) Vérifier que :  $9a^2 + 15a + 7 = (3a + 2)(3a + 3) + 1$ .

(b) Montrer que :  $p \geq 5$ .

(2) (a) Montrer que :  $(3a + 2)^3 \equiv 1 [p]$ .

(b) En déduire que :  $(3a + 2) \wedge p = 1$ .

(3) En appliquant le théorème de Fermat, montrer que :  $p \equiv 1 [3]$ .

(4) On considère dans  $\mathbb{Z}$  l'équation  $(F) : 9x^2 + 15x + 7 \equiv 0 [191]$ .

(a) Justifier que 191 est premier.

(b) Déterminer, en justifiant la réponse, l'ensemble des solutions de  $(F)$ .

### EXERCICE 22

Équation  $x^2 - 2y^2 \equiv 0 [p]$  • Formule de Moivre • Binôme

Soit  $p$  un entier naturel premier et impair. On suppose qu'il existe  $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que :  $x \wedge y = 1$  et  $x^2 - 2y^2 \equiv 0 [p]$ .

(1) (a) Montrer que :  $y \wedge p = 1$ .

(b) En déduire qu'il existe  $u \in \mathbb{Z}$  tel que :  $uy \equiv 1 [p]$ .

(2) On pose :  $t = ux$ .

(a) Montrer que :  $t^2 \equiv 2 [p]$ .

(b) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que :  $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$ .

(3) Montrer que :  $(\forall k \in \{1, 2, \dots, p-1\}); p \mid C_p^k$ . On rappelle que :

$$(\forall k \in \{1, 2, \dots, p-1\}); k C_p^k = p C_{p-1}^{k-1}.$$

(4) (a) En utilisant la formule de Moivre, montrer que :

$$(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) + i 2^{\frac{p}{2}} \sin\left(\frac{p\pi}{4}\right).$$

(b) En utilisant la formule du binôme, montrer que :

$$(1+i)^p = \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} + i \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k+1}.$$

$$\text{Puis en déduire que : } 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z} \text{ et } 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) \equiv 1 [p].$$

(5) En déduire que si  $p \equiv 5 [8]$ , alors il n'existe pas de couple  $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que :  $x \wedge y = 1$  et  $x^2 - 2y^2 \equiv 0 [p]$ .

### EXERCICE 23

#### Diviseurs premiers de $n^2 + 1$ • Palindromes à trois chiffres

##### Partie I

Soit  $n \geq 2$  un entier naturel.

- (1) Montrer que :  $n^2 \equiv 0 [4]$  ou  $n^2 \equiv 1 [4]$ .
- (2) En raisonnant par l'absurde, montrer que  $n^2 + 1$  admet au moins un diviseur premier impair.

##### Partie II

Soit  $p \geq 3$  un diviseur premier impair de  $n^2 + 1$ .

- (1) Justifier que :  $n^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} [p]$ .
- (2) Montrer que :  $n \wedge p = 1$ . Puis en déduire que :  $n^{p-1} \equiv 1 [p]$ .
- (3) Prouver que :  $p \equiv 1 [4]$ .
- (4) Déterminer le plus petit diviseur premier positif et impair de l'entier naturel :  $m = 2023^{2022} + 1$ .
- (5) Un palindrome à trois chiffres est un entier naturel qui s'écrit dans le système décimal sous la forme  $N = \overline{udu}^{(10)}$ , où le chiffre  $u$  est non nul.
  - Déterminer tous les palindromes  $N$  à trois chiffres dont le plus petit diviseur premier positif et impair de  $N^2 + 1$  est  $p = 13$ .

### EXERCICE 24

#### Suite $u_n = 1006^n + 1007^n$ • Divisibilité par $2^n$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $u_n = (1006)^n + (1007)^n$ .

- (1) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel  $n$ , le reste de la division euclidienne de  $2^n$

par 5.

- (2) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n \equiv 1 + (-1)^n [3]$ .
- (3) En déduire le reste de la division euclidienne de  $u_{2013}$  par 5.
- (4) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{2n+1} \equiv 0 [2013]$ .

## NOMBRES PREMIERS

V

### EXERCICE 25

$A_n = (n!)^2 + 1$  • Diviseur premier  $> n$  • Infinitude

Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on pose :  $A_n = (n!)^2 + 1$ .

- (1) Vérifier que :  $(\forall n \geq 2); A_n \equiv 1 [2]$ .
- (2) Montrer que pour tout  $n \geq 2$ ,  $A_n$  admet un diviseur premier  $p$  tel que :  $p > n$ .
- (3) On suppose que :  $p \equiv 3 [4]$  et on pose :  $p = 4k + 3$ , où  $k \in \mathbb{N}$ .
  - (a) Montrer que l'entier naturel  $N = 1 + (n!)^{2(2k+1)}$  est divisible par  $A_n$  et que :  $(n!) + (n!)^p \equiv 0 [p]$ .
  - (b) En déduire que :  $p \equiv 1 [4]$ .
- (4) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels premiers qui s'écrivent sous la forme :  $p = 4k + 1$ , où  $k \in \mathbb{N}^*$ .

### EXERCICE 26

Deux premiers  $p, q$  avec  $10^{p+q-1} \equiv 1 [pq]$

Soient  $p$  et  $q$  deux entiers naturels premiers tels que :  $p \leq q$  et  $10^{p+q-1} \equiv 1 [pq]$ .

- (1) (a) Montrer que :  $p \wedge 10 = 1$ .
  - (b) En déduire que :  $10^{p-1} \equiv 1 [p]$  et  $10^q \equiv 1 [p]$ .
- (2) (a) Montrer que :  $(p-1) \wedge q = 1$ .
  - (b) Prouver que :  $p = 3$ , puis en déduire que :  $10^{q+2} \equiv 1 [q]$ .
- (3) (a) Décomposer  $10^3 - 1$  en facteurs premiers.
  - (b) Prouver que :  $q \in \{3; 37\}$ .

### EXERCICE 27

Diviseurs premiers de  $(x+1)^p - x^p$  • Forme  $kp + 1$

Soit  $p$  un entier naturel premier et  $x$  un entier naturel non nul. Il s'agit de montrer que tout diviseur premier de  $(x+1)^p - x^p$  est de la forme  $kp+1$ , où  $k \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $q$  un entier naturel premier qui divise  $(x+1)^p - x^p$ .

- (1) (a) Montrer que :  $q \geq 3$ .  
(b) Montrer que :  $q \nmid x = 1$ . Puis en déduire que :  $x^{p(q-1)} \equiv 1 [q]$ .
- (2) On pose :  $a = (x+1)x^{q-2}$  et  $d = (q-1) \wedge p$ .  
(a) Montrer que :  $a^p \equiv 1 [q]$  et que  $a$  n'est pas congru à 1 modulo  $q$ .  
(b) Montrer que :  $a^{q-1} \equiv 1 [q]$ . Puis en déduire que :  $a^d \equiv 1 [q]$ .  
(c) Montrer alors qu'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que :  $q = kp+1$ .
- (3) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que tout entier naturel premier divisant  $(n!+1)^p - (n!)^p$  est strictement plus grand que  $n$ .
- (4) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels premiers de la forme  $kp+1$  tel que  $k \in \mathbb{N}^*$ .

### EXERCICE 28

$$(5^p - 2^p)(5^q - 2^q) \equiv 0 [pq] \cdot \text{Ordre}$$

#### Partie I

Soit  $k$  un entier naturel non nul et premier.

- (1) Montrer que :  $5^k - 2^k \equiv 0 [k] \Rightarrow k = 3$ .
- (2) En déduire que :  $k > 3 \Rightarrow k \nmid (5^k - 2^k) = 1$ .

#### Partie II

Soient  $p$  et  $q$  deux entiers naturels non nuls et premiers tels que :

$$p < q \quad \text{et} \quad (5^p - 2^p)(5^q - 2^q) \equiv 0 [pq].$$

- (1) On suppose dans cette question que :  $p = 3$ .  
(a) Montrer que :  $39(5^q - 2^q) \equiv 0 [q]$ .  
(b) En déduire que :  $q = 13$  (on pourra utiliser le résultat de I.2)).
- (2) On suppose maintenant que :  $p > 3$ .  
(a) Vérifier que :  $p \neq 5$  et que :  $5^q - 2^q \equiv 0 [p]$  et  $5^{p-1} - 2^{p-1} \equiv 0 [p]$ .  
(b) Soit  $d$  le plus petit entier naturel non nul tel que :  $5^d - 2^d \equiv 0 [p]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on désigne par  $r$  le reste de la division euclidienne de  $n$  par  $d$ .  
• Montrer que :  $5^n \equiv 2^n [p] \Rightarrow 5^r \equiv 2^r [p]$ .  
(c) Prouver que  $d$  est un diviseur commun de  $p-1$  et  $q$ .  
(d) Quelle conclusion peut-on faire ?
- (3) En utilisant ce qui précède, déterminer les entiers naturels non nuls et premiers tels que :  $p < q$  et  $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q) \equiv 0 [pq]$ .

### EXERCICE 29

Couples  $(p, q)$  premiers avec  $2^{p-1} = 1 + pq^2$

On désigne par  $A$  l'ensemble des couples  $(p, q)$  de nombres premiers tels que :  $2^{p-1} = 1 + pq^2$ .  
Soit  $(p, q) \in A$ .

- (1) (a) Justifier que :  $p > 5$ .  
(b) En déduire que :  $q^2 \equiv 1 [2]$ .
- (2) Montrer que :  $q^2 \equiv 1 [4]$ .  
Dans la suite de l'exercice, on écrit :  $p = 2m + 1$ , où  $m$  est un entier naturel non nul.
- (3) Vérifier que :  $m \geq 3$ .
- (4) Justifier que les entiers  $2^m + 1$  et  $2^m - 1$  sont premiers entre eux.
- (5) Dans cette question, on suppose qu'il existe un entier naturel non nul  $k$  tel que :  $2^m + 1 = pk$ .  
(a) Montrer que  $k$  est impair, puis que :  $k \wedge (2^m - 1) = 1$ .  
(b) En déduire que :  $2^m = q^2 + 1$ .  
(c) Montrer que :  $q^2 \equiv 3 [4]$ .  
(d) En déduire que  $p$  ne divise pas  $2^m + 1$ .
- (6) (a) Montrer que  $p$  divise  $2^m - 1$ .  
(b) Montrer que :  $2^m = q^2 - 1$  et  $2^m - 1 = p$ .  
(c) Montrer que  $m$  est impair, puis déterminer le reste de  $2^m$  modulo 3.  
(d) En déduire que :  $q^2 \equiv 0 [3]$ .  
(e) Déterminer l'ensemble  $A$ .

### EXERCICE 30

$a \wedge 10 = 1$  • Puissances modulo  $10^{k+1}$  • Équation  $13x - 19y = 11$

#### Partie I

Soit  $a \in \mathbb{N}$  tel que :  $a \wedge 10 = 1$ .

- (1) Montrer que :  $a^4 \equiv 1 [10]$ .
- (2) Montrer par récurrence que :  $(\forall k \in \mathbb{N}); a^{4 \times 10^k} \equiv 1 [10^{k+1}]$ .
- (3) En déduire les deux derniers chiffres du nombre  $N_1 = 3^{2013}$  et du nombre  $N_2 = 67^{42}$ .

#### Partie II

On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $(E) : 13x - 19y = 11$ .

- (1) (a) Vérifier que l'ensemble des solutions de  $(E)$  est non vide.  
(b) Déterminer l'ensemble des solutions de  $(E)$ .
- (2) Déterminer les couples  $(x, y)$  solutions de  $(E)$  tels que :  $x \wedge y = 1$ .

- (3) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  l'équation : 
$$\begin{cases} (n+1)^2 \equiv 6 \pmod{13} \\ (n+1)^2 \equiv 5 \pmod{19} \end{cases}$$

## SYSTÈMES DE NUMÉRATION

VI

### RAPPEL DE COURS

Tout entier naturel  $N$  s'écrit de manière unique en base  $b \geq 2$  sous la forme  $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}^{(b)} = \sum_{k=0}^n a_k b^k$  avec  $0 \leq a_k < b$  et  $a_n \neq 0$ . Le *repunit*  $\underbrace{11 \dots 1}_n$  vaut  $\frac{10^n - 1}{9}$ .

### EXERCICE 31

Repunits  $a_n = \underbrace{11 \dots 1}_n$  • Divisibilité par 7

Dans le système décimal, on considère l'entier naturel :  $a_n = \underbrace{11 \dots 11}_{n \text{ fois}}$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- (1) (a) Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $a_n \equiv 1 \pmod{2}$  et  $a_n \equiv 1 \pmod{5}$ .  
(b) Déterminer toutes les valeurs de  $n \in \mathbb{N}^*$  pour lesquelles :  $a_n \equiv 0 \pmod{3}$ .
- (2) Soit  $p > 5$  un entier naturel premier.
  - Vérifier que :  $9a_{p-1} = 10^{p-1} - 1$ . Puis montrer que :  $a_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$ .
- (3) (a) Vérifier que si  $m, n \in \mathbb{N}^*$  et  $m < n$ , alors :  $a_n = 10^m a_{n-m} + a_m$ .  
(b) Soit  $q \in \mathbb{N}^*$  tel que :  $q \wedge 10 = 1$ .
  - Montrer qu'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que :  $a_k \equiv 0 \pmod{q}$ .
- (4) Quels sont les entiers naturels  $n \geq 2$  qui ont au moins un multiple qui s'écrit sous la forme  $a_k$ , où  $k \in \mathbb{N}^*$  ?
- (5) (a) Montrer que  $a_n$  est divisible par 7 si et seulement si  $n \equiv 0 \pmod{6}$ .  
(b) Déterminer le plus grand entier naturel  $a_n$ , divisible par 7 et plus petit que le nombre  $2^{561}$ .

### EXERCICE 32

$A_n = 3^{5n}$  • Chiffres des unités et des dizaines • Somme  $N$

#### Partie I

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $A_n = 3^{5n}$ .

- (1) Vérifier que :  $3^{20} \equiv 1 \pmod{4}$ .

(2) Montrer que :  $\sum_{k=0}^4 3^{4k} \equiv 0 \pmod{5}$ . Puis en déduire que :  $3^{20} \equiv 1 \pmod{25}$ .

(3) Montrer que :  $3^{20} \equiv 1 \pmod{100}$ . Puis en déduire, selon les valeurs de  $n$ , le chiffre des unités et celui des dizaines de  $A_n$ .

### Partie II

On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $(E)$  :  $49x - 20y = 1$ .

(1) Justifier que l'ensemble des solutions de  $(E)$  est non vide.

(2) En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouver une solution particulière de  $(E)$ .

(3) Montrer que l'ensemble des solutions de  $(E)$  est :  $S = \{(9 + 20k, 22 + 49k) / k \in \mathbb{Z}\}$ .

### Partie III

On pose :  $N = 3 + 3^7 + 3^{7^2} + 3^{7^3} + 3^{7^4} + \dots + 3^{7^{2023}}$ .

(1) Montrer que :  $3^{7^4} \equiv 3 \pmod{100}$ .

(2) En déduire que l'entier naturel  $N$  est divisible par 100. On donne :  $3^7 \equiv 87 \pmod{100}$  ;  $3^{7^2} \equiv 83 \pmod{100}$  et  $3^{7^3} \equiv 27 \pmod{100}$ .

## EXERCICE 33

Écriture décimale de  $N^{153}$  se terminant par 2021

Cet exercice a pour objectif de démontrer l'existence d'un entier naturel  $N$  tel que l'écriture dans le système décimal de  $N^{153}$  se termine par 2021.

(1) Soit  $a \in \mathbb{N}$  tel que :  $a \wedge 10 = 1$ .

(a) Montrer que :  $a^4 \equiv 1 \pmod{10}$ .

(b) Montrer par récurrence que :  $(\forall k \in \mathbb{N}) ; a^{4 \times 10^k} \equiv 1 \pmod{10^{k+1}}$ .

(2) On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $(E)$  :  $153x + 4 \times 10^3y = 1$ .

(a) Sachant que :  $28 \times 10^3 - 183 \times 153 = 1$ , montrer que :  $153 \wedge (4 \times 10^3) = 1$ .

(b) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $(E)$  en précisant les différentes étapes.

(c) Déterminer le couple  $(x, y)$  solution de  $(E)$  dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$  pour lequel  $x$  est minimal.

(3) On considère l'entier naturel :  $N = 2021^{3817}$ .

- En utilisant les résultats précédents, montrer que l'écriture dans le système décimal de  $N^{153}$  se termine par 2021.

## EXERCICE 34

$a = 2017^{2017}$  • Restes modulo 7 et 11 • Équation associée

(1) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $a = 2017^{2017}$  par 7.

- (2) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel  $n$ , le reste de la division euclidienne de  $4^n$  par 11.
- (3) En déduire que :  $a + 6 \equiv 0 [77]$ .
- (4) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $b_n = \sum_{k=0}^n 2017^k$ , et on considère dans  $\mathbb{Z}$  l'équation  $(E) : ax + b_n \equiv 0 [11]$ .
- (a) Montrer que si  $x$  est solution de  $(E)$ , alors :  $x \equiv 2b_n [11]$ .
- (b) Déterminer l'ensemble des solutions de  $(E)$ , puis en déduire ses solutions qui sont divisibles par 11.

### EXERCICE 35

Nombre  $a = \underbrace{33 \dots 3}_{p-1}$  • Divisibilité par un premier  $p \geq 7$

Soit  $p \geq 7$  un entier naturel premier. On considère l'entier naturel écrit dans le système décimal :  $a = \underbrace{33 \dots 3}_{(p-1) \text{ fois}}$ .

- (1) Montrer que :  $a \equiv 0 [3]$ .
- (2) Vérifier que :  $3a + 1 = 10^{p-1}$ .
- (3) Montrer que :  $10^{p-1} \equiv 1 [p]$ , puis en déduire que :  $a \equiv 0 [p]$ .
- (4) En déduire que  $a$  est divisible par  $3p$ .

## EXERCICES DE SYNTHÈSE

## VII

### EXERCICE 36

Diviseur premier de  $a^2 + b^2$  • Équation  $x(1447 - x) = y^2$

#### Partie I

Soit  $p$  un entier naturel premier et impair. On suppose qu'il existe  $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  tels que :  $a \wedge b = 1$  et  $p \mid a^2 + b^2$ .

- (1) Vérifier que :  $a^4 \equiv b^4 [p]$ .
- (2) (a) Montrer que :  $a \wedge p = 1$  et  $b \wedge p = 1$ .
- (b) En appliquant le théorème de Fermat, en déduire que :  $a^{p-1} \equiv b^{p-1} [p]$ .
- (3) Prouver que :  $p \equiv 1 [4]$ .

#### Partie II

Nous sommes en l'an 1447 de l'hégire. Soit  $(x, y)$  un couple de  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  solution de l'équation  $(E) : x(1447 - x) = y^2$ . On pose :  $d = x \wedge y$ ,  $x = da$  et  $y = db$ , où  $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ .

- (1) Vérifier que :  $a \wedge b = 1$  et que :  $1447a = d(a^2 + b^2)$ .
- (2) (a) Sachant que 1447 est premier, montrer que :  $d \wedge 1447 = 1$ .  
(b) En déduire que :  $1447 \mid a^2 + b^2$ .
- (3) Montrer que l'équation  $(E)$  n'a pas de solutions dans  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ .
- (4) On donne :  $2025 = 3^4 \times 5^2$  la décomposition de 2025 en facteurs premiers.
  - Déterminer tous les entiers naturels non nuls  $n$  tels que :  $\sqrt{n(2025 - n)} \in \mathbb{N}^*$ .

**Indication.** Pour la question I.3), on pourra raisonner par l'absurde et utiliser I.1) et I.2)b).

### EXERCICE 37

Suite  $a_n = 2 \times 7^n + 3 \times 5^n - 5$  • Divisibilité par 24 • Équation

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $a_n = 2 \times 7^n + 3 \times 5^n - 5$ .

- (1) (a) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; a_{n+1} \equiv a_n [24]$ .  
(b) En déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; a_n \equiv 0 [24]$ .
- (2) Soit  $p > 7$  un entier naturel premier.
  - (a) Montrer que :  $a_{p-1} \equiv 0 [p]$  (utiliser le théorème de Fermat).
  - (b) En déduire que l'entier naturel  $a_{p-1}$  est divisible par  $24p$ .
- (3) On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $(E) : a_3x - a_2y = 5a_1$ .
  - (a) Montrer que  $(E)$  est équivalente à l'équation :  $(F) : 44x - 7y = 5$ .
  - (b) Résoudre l'équation  $(E)$ , en précisant les différentes étapes.
- (4) Pour tout  $q \in \mathbb{N}$ , on pose :  $x_q = 7q + 6$  et  $y_q = 44q + 37$ .
  - Montrer que le couple  $(x_q, y_q)$  est solution de  $(E)$ , puis déterminer les valeurs de  $q$  pour lesquelles :  $x_q \wedge y_q = 1$ .

### EXERCICE 38

Suite récurrente  $u_{n+1} = 10u_n - 17$  • Écriture décimale • Congruences

On considère la suite  $(u_n)$  d'entiers naturels définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 10u_n - 17 \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- (1) Calculer  $u_1, u_2$  et  $u_3$ .
- (2) Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $u_n \wedge u_{n+1} \in \{1; 17\}$ .
- (3) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $9u_n = 17 + 10^{n+1}$ .

- (4) Montrer alors que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'écriture décimale de  $u_n$  est :  $\underbrace{11 \cdots 13}_{n \text{ fois le chiffre } 1}$ .
- (5) Montrer que  $(u_{2025} - 3)$  est divisible par 9.
- (6) (a) Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $9u_n \equiv 6 + (-1)^{n+1} [11]$ .  
 (b) En déduire le reste de  $u_n$  modulo 11 suivant les valeurs de  $n$ .
- (7) (a) Justifier que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a :  $10^{22k} \equiv 1 [23]$ .  
 (b) En déduire que 3 est le reste de  $u_{2024}$  modulo 23.
- (8) (a) Déterminer, suivant l'entier naturel  $n$ , le reste de  $10^n$  modulo 7.  
 (b) Déduire que si  $n \equiv 2 [6]$ , alors  $u_n \equiv 1 [7]$ .  
 (c) Montrer que pour tout entier  $a$ , si  $a \equiv 1 [7]$  alors  $a^7 \equiv 1 [49]$ .  
 (d) Déduire que  $u_{2025} \times \left((u_{2024})^7\right)$  est divisible par 343.

### EXERCICE 39

$$N = \sum_{k=0}^{2000} (2011)^k \cdot \text{Congruences modulo } 100$$

On considère les entiers naturels :

$$N = \sum_{k=0}^{2000} (2011)^k \quad \text{et} \quad a = (2011)^6.$$

- (1) Montrer que :  $a \equiv 1 [100]$ .
- (2) En déduire que :  $(2011)^n \equiv 1 [100]$  pour tout  $n$  multiple de 6.
- (3) Montrer que :  $N \equiv 2010 a [100]$ , puis déterminer les deux derniers chiffres du nombre  $N$  dans le système décimal.

### EXERCICE 40

$$\text{Somme } S_n = 1 + 5 + \cdots + 5^n \cdot \text{Reste modulo } 7 \cdot \text{Couples premiers entre eux}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^n$ .

- (1) Vérifier que :  $(\forall n \in \mathbb{N}); 4S_n = 5^{n+1} - 1$ .
- (2) Déterminer, suivant les valeurs de  $n$ , le reste de la division euclidienne de  $5^n$  par 7.
- (3) En déduire le reste de la division euclidienne de  $S_{2017}$  par 7.
- (4) On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $(E_n) : 5^n x - S_n y = 7$ .  
 (a) Montrer que :  $5^n \wedge S_n = 1$ , puis en déduire que  $(E_n)$  admet au moins une solution dans  $\mathbb{Z}^2$ .  
 (b) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation  $(E_2) : 25x - 31y = 7$ .  
 (c) Déterminer les couples  $(x, y)$  solutions de  $(E_2)$  tels que :  $x \wedge y = 7$ .

---

**FIN DU POLYCOPIÉ V**

---

Prof. Saad Choukri

© 2026 — Tous droits réservés