

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

$e^{-x^2}$

COLLECTION D'EXERCICES • NIVEAU BAC

Pour bien se préparer  
à l'examen national

للتّضير الجيد للاستحان الوطني

Polycopié IV • Analyse III

المطبوع الرابع • التحليل الثالث

Intégrales • Suites d'intégrales • Sommes de Riemann  
Fonctions intégrales • Équations différentielles

30 problèmes de préparation

ثلاثون مسألة للتّضير للاستحان الوطني

Sélection de problèmes issus des devoirs surveillés,  
devoirs libres et sujets d'examens blancs.

**Niveau** 2<sup>ème</sup> année Baccalauréat – Sciences Mathématiques (السنة الثانية بكالوريا -- علوم رياضية)

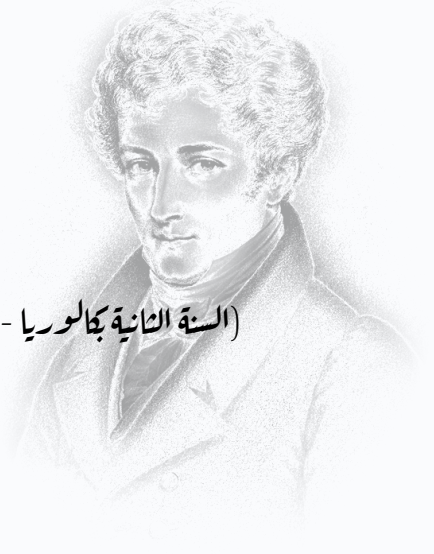
**Discipline** Mathématiques – Analyse

**Volume** IV – Recueil d'exercices

AUTEUR

Prof. Saad Choukri سعد شكري

© 2026 Prof. Saad Choukri — Tous droits réservés



## Avant-propos

Ce polycopié rassemble **trente problèmes** de calcul intégral, sélectionnés dans une base de devoirs surveillés et d'examens blancs. Les énoncés couvrent l'intégralité du programme d'*Analyse III* : calcul d'intégrales et intégration par parties, suites d'intégrales, sommes de Riemann, fonctions définies par une intégrale, encadrements et équations différentielles.

Les exercices sont regroupés en **sept parties thématiques**, de difficulté croissante à l'intérieur de chaque partie. Les trois dernières parties proposent des problèmes longs, de structure identique à celle des épreuves de l'examen national.

La plus grande partie des exercices de ce polycopié a été extraite des anciens devoirs surveillés du professeur **Abdellah Belkhatir** الأستاذ عبد الله بالخير , que nous remercions vivement.

## Table des matières **الفهرس**

|            |                                                                   |                                         |
|------------|-------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| <b>I</b>   | Calcul d'intégrales et intégration par parties<br>Problèmes 1 à 4 | <b>حساب التكاملات والماملة بالأجزاء</b> |
| <b>II</b>  | Suites d'intégrales<br>Problèmes 5 à 10                           | <b>ساليات التكاملات</b>                 |
| <b>III</b> | Sommes de Riemann<br>Problèmes 11 à 15                            | <b>مجاميع ريمان</b>                     |
| <b>IV</b>  | Fonctions définies par une intégrale<br>Problèmes 16 à 22         | <b>الدوال المعرفة بكمامل</b>            |
| <b>V</b>   | Encadrements et théorèmes de la moyenne<br>Problèmes 23 à 26      | <b>التأطيرات ومبرهعات المتوسط</b>       |
| <b>VI</b>  | Équations différentielles<br>Problèmes 27 et 28                   | <b>المعادلات التفاضلية</b>              |
| <b>VII</b> | Problèmes de synthèse<br>Problèmes 29 et 30                       | <b>مسائل تركيبية</b>                    |

# بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## تقديم المطبوع

يضم هذا المطبوع ثلاثين مسألة في حساب الكمال، انتقيت من الفروض المحروسة والامتحانات التجريبية، وهي موجهة لتلاميذ السنة الثانية من سلك البكالوريا، شعبة العلوم الرياضية. تغطي هذه المسائل مقرر حساب الكمال كاملاً: حساب الكمالات والكمالة بالأجزاء، متاليات الكمالات، مجاميع ريمان، الدوال المعرفة بكمال، التأثيرات، ثم المعادلات التفاضلية. رُتبت التمارين في سبعة محاور، مع تدرج في الصعوبة داخل كل محور. أما المحاور الثلاثة الأخيرة فتضمن مسائل مركبة تشبه في بنيتها مسائل الامتحان الوطني. استخرج الجزء الأكبر من تمارين هذا المطبوع من الفروض المحروسة السابقة للأستاذ عبد الله باخثير، فله منا جزيل الشكر والتقدير.

## إرشادات للاستعمال

حاول حل كل تمرين دون النظر إلى الإرشادات لمدة عشرين دقيقة على الأقل. احرص على تحرير الحل كاملاً، فنقطة الامتحان تقيس الدقة والصرامة كما تقيس النتيجة. لا ترجع إلى الإرشادات الملونة إلا عند الضرورة القصوى.

## شكر وتقدير

يتقدم مُعدّ هذا الطبوع بأصدق عبارات الشكر والتقدير إلى الأستاذ الفاضل عبد الله بلخاتير، الذي استخرج الجزء الأكبر من تمارين هذا العمل من فروض المحروسة السابقة، فجزاه الله خيراً على جهده في خدمة الرياضيات وتلاميذها.

## Remerciements

L'auteur adresse ses plus sincères remerciements au professeur **Abdellah Belkhatir**, dont les anciens devoirs surveillés ont fourni la plus grande partie des exercices réunis ici, et le remercie chaleureusement pour son dévouement constant au service de l'enseignement des mathématiques.

إعداد الأستاذ سعد شكري  
وفقكم الله



## CALCUL D'INTÉGRALES ET INTÉGRATION PAR PARTIES

## RAPPEL DE COURS

**Intégration par parties** : si  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $[a; b]$ ,  $\int_a^b u'(t)v(t) dt = \left[ u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$ .

**Changement de variable** : si  $\varphi$  est de classe  $C^1$ ,  $\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$ .

## EXERCICE 1

Changement de variable • Encadrement de  $\ln$  • Produit

(1) Montrer que :  $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \frac{\pi}{8}$ . Poser :  $x = \cos^2 \theta$ , où  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

(2) (a) Vérifier que :  $(\forall t \in \mathbb{R}^+); 1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$ .

(b) En déduire que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^+); x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$ .

(3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $T_n = \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \right)$ .

(a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n} \left( 1 - \frac{k}{n} \right)} - \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \left( 1 - \frac{k}{n} \right) \leq \ln(T_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n} \left( 1 - \frac{k}{n} \right)}.$$

(b) Justifier que la suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente et déterminer sa limite.

## EXERCICE 2

Deux intégrales • Racines  $n$ -ièmes • Cosinus hyperbolique

(1) Calculer les deux intégrales :  $J = \int_0^\pi \frac{1}{3 + \sin^2 x} dx$  et  $I = \int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx$ .

(2) Calculer la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad u_n = \frac{1}{n} \left( \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{2^2} + \dots + \sqrt[n]{2^n} \right).$$

(3) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

- Calculer la limite de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :  $v_n = \left( \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right) \right) - n$ .

### EXERCICE 3

#### Intégration par parties itérée • Développement de $e^a$

Soit  $a \in \mathbb{R}^{*+}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}.$$

- (1) En utilisant une intégration par parties, montrer que :  $e^a = 1 + a + \int_0^a (a-t)e^t dt$ .
- (2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $K_n = \frac{1}{n!} \int_0^a (a-t)^n e^t dt$ .
  - Montrer que :  $K_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + K_{n+1}$ .
- (3) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + K_n$ .
- (4) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 \leq K_n \leq \frac{a^n}{n!} (e^a - 1)$ .
- (5) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $v_n = \frac{a^n}{n!}$ .
  - (a) Montrer qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :  $(\forall n \in \mathbb{N}); n \geq n_0 \Rightarrow v_{n+1} \leq \frac{1}{2} v_n$ .
  - (b) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}); n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} v_{n_0}$ .
  - (c) En déduire la limite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}\right)$ .

### EXERCICE 4

#### Deux intégrations par parties • Somme de Riemann • Encadrement

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(t) = \ln^2(1+t)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln^2\left(1 + \frac{k+a}{n}\right) \quad \text{et} \quad V_n = u_n - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln^2\left(1 + \frac{k}{n}\right), \quad \text{où } a \in ]0; 1[.$$

- (1) Montrer que :  $(\forall t \in [0; 1]); 0 \leq f'(t) \leq 2$ .
- (2) (a) En utilisant deux intégrations par parties, montrer que :  $\int_0^1 f(t) dt = 2(\ln(2) - 1)^2$ .

(b) En déduire la limite suivante :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln^2 \left( 1 + \frac{k}{n} \right).$

(3) (a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); |V_n| \leq \frac{2}{n}.$

(b) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente en précisant sa limite.

## SUITES D'INTÉGRALES



### EXERCICE 5

Relation de récurrence • Encadrement • Limite de  $nI_n$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $I_n = \int_1^e x (\ln x)^n dx.$

(1) Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .

(2) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}); 2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2.$

(3) (a) Montrer que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

(b) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2},$  puis en déduire les deux limites suivantes :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n.$

### EXERCICE 6

Changement de variable • Encadrement • Limite de  $nI_n$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $I_n = \int_1^e (1 - \ln t)^{n+1} t^2 dt.$

(1) Calculer  $I_0$ .

(2) Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante ; en déduire qu'elle est convergente.

(3) (a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^{3t} dt.$

(b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n+2} \leq I_n \leq \frac{e^3}{n+2};$  puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n.$

(c) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3I_n = (n+1)I_{n-1} - 1.$  En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_1^e (1 - \ln t)^n t^2 dt = 1.$

EXERCICE 7

Suite d'intégrales alternée • Somme partielle

Partie I

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $V_n = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} dx$ .

- (1) Calculer  $V_0$ .
- (2) Montrer que la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone, puis en déduire qu'elle est convergente.
- (3) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}); V_n + V_{n+1} = f(n)$ , où  $f(n) = \int_0^1 e^{-nx} dx$ . Puis en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ .

Partie II

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ , on pose :  $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k f(k)$ .

- (1) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k e^{-kx} = \frac{(-1)^{n-1} e^x}{e^{nx}(1+e^x)} - \frac{1}{1+e^x}.$$

- (2) En déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}); S_n = (-1)^{n-1} V_n + \ln\left(\frac{1+e}{2e}\right)$ .
- (3) Justifier que la suite  $(S_n)_{n \geq 2}$  est convergente en précisant sa limite.

EXERCICE 8

Suite implicite • Intégration par parties • Vitesse de convergence

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+); f_n(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+e^{-nt}} dt.$$

- (1) Justifier que :  $(\forall t \in \mathbb{R}^+); \frac{e^t}{1+e^{-nt}} \geq \frac{1}{2}e^t$ . Puis en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ .
- (2) (a) Montrer que  $f_n$  est une bijection de  $\mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}^+$ .  
 (b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'équation  $f_n(x) = 1$  admet une unique solution  $u_n$  dans  $\mathbb{R}^+$ .  
 (c) Calculer le premier terme  $u_0$  de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- (3) (a) Montrer que si  $n \in \mathbb{N}$ , alors :  $(\forall x \in \mathbb{R}^+); f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ .  
 (b) En déduire la monotonie de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , puis justifier qu'elle est convergente.
- (4) (a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}); e^{u_n} - 2 = \int_0^{u_n} \frac{e^{(1-n)t}}{1+e^{-nt}} dt$ .  
 (b) En déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 \leq e^{u_n} - 2 \leq \frac{1}{n}e^{u_n}$ . Puis déterminer la limite de la suite

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

(5) (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$n(e^{u_n} - 2) = \ln 2 - e^{u_n} \ln(1 + e^{-u_n}) + \int_0^{u_n} e^t \ln(1 + e^{-t}) dt.$$

(b) Justifier que :  $(\forall u \in [0; +\infty[); \ln(1+u) \leq u$ . Puis en déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(e^{u_n} - 2) = \ln 2$ .

(6) Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(u_n - \ln 2) = \frac{\ln 2}{2}$ .

### EXERCICE 9

Suite implicite • Deux suites liées • Somme alternée

#### Partie I

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^{*+}$  par :  $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f_n(x) = (x-1)^n \ln x$ .

(1) (a) Montrer que l'équation (E) :  $f_n(\alpha_n) = 1$  admet une unique solution  $\alpha_n$  dans  $[1; +\infty[$ , et que  $e < \alpha_n < 2$ .

(b) Montrer que la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

(2) Soit  $L$  la limite de la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

(a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); f_n(L) \leq 1$ .

(b) Prouver par l'absurde que :  $L = 2$ .

#### Partie II

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les deux suites définies par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \int_1^2 f_n(x) dx \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

(1) (a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); (n+1)u_n = \ln 2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x} dx$ .

(b) En déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{2(n+2)} \leq \ln 2 - (n+1)u_n \leq \frac{1}{n+2}$ , puis calculer la limite de la suite  $((n+1)u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

(2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in \mathbb{R}^{*+}$ , on pose :  $S_n(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - \dots + (-1)^n (x-1)^n$ .

(a) Montrer que :  $S_n(x) = \frac{1 - (-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{x}$ .

(b) En déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \ln 2 - v_n = (-1)^{n+1} [\ln 2 - (n+1)u_n]$ , puis calculer la limite de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

EXERCICE 10

Intégration par parties • Série alternée • Limite de  $(n+1)u_n$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

- (1) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$ , puis en déduire la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
- (2) Calculer l'intégrale  $u_1 = \int_0^1 x \ln(1+x) dx$ , puis en déduire la valeur de l'intégrale  $I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$ .
- (3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in [0; 1]$ , on pose :  $S_n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n$ .
  - Montrer que :  $S_n = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$  et  $v_n = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$ .
  - En déduire que :  $|v_n - \ln 2| \leq \frac{1}{n+2}$ , puis calculer la limite de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
- (4) En utilisant une intégration par parties, montrer que :  $u_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1} (\ln 2 - v_n)$ .
  - En déduire que la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $w_n = (n+1)u_n$  est convergente vers un réel que l'on déterminera.

SOMMES DE RIEMANN



RAPPEL DE COURS

Si  $f$  est continue sur  $[a; b]$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$ . Lorsque  $f$  est monotone sur  $[a; b]$ , l'encadrement de chaque intégrale  $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f$  par les valeurs aux bornes fournit un encadrement de la somme, technique employée dans la plupart des problèmes de cette partie.

EXERCICE 11

Fonction  $x \mapsto x \operatorname{Arctan} x$  • Encadrement • Limite

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = x \operatorname{Arctan}(x)$ . Pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , on pose :  $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$ .

- (1) En utilisant une intégration par parties, montrer que :  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi - 2}{4}$ .
- (2) (a) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) ; F'(x) = -f(x)$ .  
 (b) En déduire que  $F$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ .  
 (c) Déterminer le signe de  $F$  sur chacun des intervalles  $]0; 1[$  et  $]1; +\infty[$ .
- (3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left( F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \right)$ .
- (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , on a :
- $$\frac{-1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{-1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$
- (b) En déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{-1}{2n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq V_n \leq \frac{-1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ .
- (c) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$  en justifiant la réponse.

## EXERCICE 12

Fonction  $t \mapsto t - 1 - \ln t$  • Somme de Riemann • Limite de  $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

### Partie I

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(t) = t - 1 - \ln(t)$ .

- (1) Déterminer :  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ .
- (2) Dresser le tableau de variations de  $f$  en justifiant la réponse.
- (3) Montrer que  $(\mathcal{C}_f)$  admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique dont on déterminera la direction.
- (4) Étudier la concavité de  $(\mathcal{C}_f)$  sur  $]0; +\infty[$ .
- (5) Construire  $(\mathcal{C}_f)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

### Partie II

Soit  $F$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :

- (1) (a) Soit  $x > 0$ . En utilisant une intégration par parties, montrer que :  $F(x) = \frac{1-x^2}{2} + x \ln(x)$ .  
 (b) En déduire que  $F$  est continue à droite en 0.
- (2) (a) Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$  et tout  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , on a :  

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$
 Puis en déduire que :  $F\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq$

$$F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right).$$

(b) Déterminer alors la valeur de la limite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ .

(3) (a) Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on a :  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{n+1}{2n} - 1 - \ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)$ .

(b) Déterminer, en justifiant la réponse :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ .

(4) Soit  $\varphi$  une fonction continue sur le segment  $[0; 1]$  telle que :  $(\forall (x, y) \in [0; 1]^2) ; \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2} \leq \varphi(\sqrt{xy})$ .

• Prouver que :  $\int_0^1 \varphi(x) dx \leq \varphi\left(\frac{1}{e}\right)$ .

### EXERCICE 13

Fonction  $\frac{e^x - 1}{x}$  • Fonction intégrale • Somme double

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \quad \text{si } x \neq 0.$$

(1) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

(2) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose :  $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$ .

(a) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et calculer  $F'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

(b) Déterminer le signe de  $F$  sur chacun des intervalles  $] -\infty; 1[$  et  $]1; +\infty[$ .

(3) Calculer la valeur de l'intégrale :  $\int_0^1 F(x) dx$ .

(4) On considère la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( (n-k) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \right).$$

(a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); V_n = \frac{-1}{n} \sum_{k=1}^n F\left(\frac{k}{n}\right)$ .

(b) En déduire que la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente en précisant sa limite.

### EXERCICE 14

Fonction décroissante • Encadrement de Riemann • Intégrale de  $|\sin nx|$

### Partie I

Soit  $f$  une fonction définie, continue et décroissante sur l'intervalle  $]0; 1]$ . On considère la fonction  $F$  définie sur  $]0; 1]$  par :  $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$ , et soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ .

- (1) (a) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^* - \{1\}$  et tout  $k$  de  $\{1, \dots, n-1\}$ , on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

- (b) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) ; F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f(1) \leq v_n \leq F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$ .

- (2) On suppose que :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \ell$  ( $\ell \in \mathbb{R}$ ) et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = 0$ .

- Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente en précisant sa limite.

- (3) On suppose dans cette question que :  $(\forall x \in ]0; 1]) ; f(x) = \frac{x^2 - 1}{4} - \frac{1}{2} \ln x$ . On rappelle que  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

- (a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n = \frac{(n+1)(2n+1) - 6n^2}{24n^2} - \frac{1}{2n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ .

- (b) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{3}$ , puis en déduire que la suite  $\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente en précisant sa limite.

### Partie II

Dans cette partie, on suppose que  $f$  est une fonction définie, continue et croissante sur l'intervalle  $[0; \pi]$ .

- (1) (a) Montrer que :  $\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(nx)| dx = (-1)^k \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} \sin(nx) dx = \frac{2}{n}$ .

- (b) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  et tout  $k$  de  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ , on a :

$$\frac{2}{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x) |\sin(nx)| dx \leq \frac{2}{n} f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right).$$

- (2) (a) En déduire un encadrement de  $\int_0^\pi f(x) |\sin(nx)| dx$ .

- (b) En déduire que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(x) |\sin(nx)| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx$ .

EXERCICE 15

Série  $\sum \frac{\sin(k\theta)}{k}$  • Partie imaginaire • Majoration

Soit  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\theta)}{k}, \quad \text{où } \theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[.$$

- (1) Montrer que :  $\int_0^1 \frac{1}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} dx = \frac{\pi - \theta}{2 \sin \theta}$ .
- (2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que :  $(\forall x \in [0; 1]); \quad \frac{1}{1 - xe^{i\theta}} = \frac{x^n e^{in\theta}}{1 - xe^{i\theta}} + \sum_{k=0}^{n-1} x^k e^{ik\theta}$ .
- (3) Montrer que :  $(\forall x \in [0; 1]); \quad \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}}\right) = \frac{\sin \theta}{x^2 - 2x \cos \theta + 1}$ .
- (4) En déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad S_n = \frac{\pi - \theta}{2} - \int_0^1 \frac{x^n [\sin((n+1)\theta) - x \sin(n\theta)]}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} dx$ .
- (5) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad \left| \int_0^1 \frac{x^n [\sin((n+1)\theta) - x \sin(n\theta)]}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} dx \right| \leq \frac{2}{(n+1) \sin^2 \theta}$ .
- (6) En déduire que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente en déterminant sa limite.

FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE INTÉGRALE

IV

RAPPEL DE COURS

Si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  et si  $u, v$  sont dérivables sur  $J$  à valeurs dans  $I$ , alors  $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$  est dérivable sur  $J$  et sa dérivée vaut  $v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$ .

EXERCICE 16

Fonction  $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt$  • Continuité et dérivabilité en 0

Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$F(0) = \ln 2 \quad \text{et} \quad F(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad \text{si } x > 0.$$

- (1) (a) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); \quad e^{-2x} \ln 2 \leq F(x) \leq e^{-x} \ln 2$ .  
 (b) En déduire la limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ , puis donner une interprétation géométrique du résultat.
- (2) (a) Montrer que :  $(\forall t \geq 0); \quad e^{-t}(1+t) \leq 1$ .

- (b) En déduire la monotonie de la fonction  $u : t \mapsto \frac{e^{-t} - 1}{t}$  sur  $\mathbb{R}^{*+}$ .
- (3) (a) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); F(x) = \ln 2 + \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$ .
- (b) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); e^{-x} - 1 \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt \leq \frac{e^{-2x} - 1}{2}$ .
- (c) En déduire que  $F$  est continue et dérivable à droite en 0, et déterminer  $F'_d(0)$ .
- (4) (a) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{*+}$  et que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); F'(x) = \frac{e^{-x}(e^{-x} - 1)}{x}$ .
- (b) Dresser le tableau de variations de  $F$ , puis construire la courbe  $(\mathcal{C}_F)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

### EXERCICE 17

Fonction  $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^t}{t^2} dt$  • Branche infinie • Dérivabilité en 0

Soit  $F$  la fonction définie par :

$$F(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad F(x) = x \int_x^{2x} \frac{e^t}{t^2} dt \quad \text{si } x \neq 0.$$

- (1) Justifier soigneusement que  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .
- (2) (a) Montrer que :  $(\forall x > 0); \frac{1}{2}e^x \leq F(x) \leq \frac{1}{2}e^{2x}$  et  $(\forall x < 0); \frac{1}{2}e^{2x} \leq F(x) \leq \frac{1}{2}e^x$ .
- (b) En déduire que  $F$  est continue en  $x_0 = 0$ .
- (3) (a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ , puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- (b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$ , puis en déduire la nature de la branche infinie de la courbe  $(\mathcal{C}_F)$  au voisinage de  $+\infty$ .
- (4) (a) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^*); F(x) = e^x - \frac{1}{2}e^{2x} + x \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ .
- (b) Montrer que  $F$  est dérivable sur chacun des intervalles  $]0; +\infty[$  et  $] -\infty; 0[$ , et que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^*); F'(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ .
- (5) (a) Montrer que :  $(\forall x > 0); e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2$  et  $(\forall x < 0); e^{2x} \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^x \ln 2$ .
- (b) En déduire la limite suivante :  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ .
- (c) Vérifier que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^*); F(x) - F(0) = \frac{-1}{2}(e^x - 1)^2 + x \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ , puis en déduire que  $F$  est dérivable en 0 en précisant  $F'(0)$ .
- (6) (a) Dresser le tableau de variations complet de  $F$ .
- (b) Construire la courbe  $(\mathcal{C}_F)$  (et la tangente  $(T)$  au point d'abscisse 0) dans un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

**EXERCICE 18**

Fonction  $x \mapsto \int_x^{2x} \ln(1 + e^{-2t}) dt$  • Suite d'intégrales

On considère la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; F(x) = \int_x^{2x} \ln(1 + e^{-2t}) dt$ .

- (1) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; F(-x) = -3x^2 - F(x)$ .
- (2) (a) Montrer que :  $(\forall x > 0) ; x \ln(1 + e^{-4x}) \leq F(x) \leq x \ln(1 + e^{-2x})$ .  
 (b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ , puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.  
 (c) En déduire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ , puis préciser la nature de la branche infinie de  $(\mathcal{C}_F)$  au voisinage de  $-\infty$ .
- (3) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose :  $\varphi(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t}) dt$ .  
 (a) Vérifier que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$ .  
 (b) En déduire que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $F'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  
 (c) Montrer que l'équation  $x^3 + 2x - 1 = 0$  admet une solution unique  $x_0$  dans  $\mathbb{R}$  et que  $\frac{1}{4} < x_0 < \frac{1}{2}$ .  
 (d) Étudier les variations de  $F$ , puis dresser son tableau de variations en justifiant soigneusement la réponse.
- (4) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $u_n = \int_0^1 \ln(1 + e^{-2nt}) dt$ .  
 (a) Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  
 (b) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall \alpha \in ]0; 1]) ; 0 \leq \int_\alpha^1 \ln(1 + e^{-2nt}) dt \leq \ln(1 + e^{-2n\alpha})$ .  
 (c) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\alpha^1 \ln(1 + e^{-2nt}) dt$  où  $\alpha \in ]0; 1]$ .  
 (d) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall \alpha \in ]0; 1]) ; 0 \leq u_n \leq \alpha + \ln(1 + e^{-2n\alpha})$ .  
 (e) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  en justifiant la réponse.

**EXERCICE 19**

Fonction  $x \mapsto \int_x^{2x+1} \frac{e^t}{2t+1} dt$  • Dérivabilité à droite en  $-1$

Soit  $F$  la fonction définie sur  $[-1; +\infty[$  par :

$$F(-1) = \frac{1}{e} \quad \text{et} \quad (\forall x \in ]-1; +\infty[) ; F(x) = \int_x^{2x+1} \frac{e^t}{2t+1} dt.$$

- (1) Montrer que :  $(\forall x \in ]-1; +\infty[) ; \int_x^{2x+1} \frac{1}{t+1} dt = \ln 2$ .
- (2) (a) Montrer que :  $(\forall x \in ]-1; +\infty[) ; e^x \ln 2 \leq F(x) \leq e^{2x+1} \ln 2$ .  
 (b) En déduire que  $F$  est continue à droite en  $x_0 = -1$ .

- (3) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$ , puis en déduire la nature de la branche infinie de la courbe  $(\mathcal{C}_F)$  au voisinage de  $+\infty$ .
- (4) (a) Justifier soigneusement que  $F$  est dérivable sur  $] -1; +\infty[$  et que :  
 $(\forall x \in ] -1; +\infty[); F'(x) = \frac{e^x (e^{x+1} - 1)}{x + 1}$ .
- (b) Dresser le tableau de variations de  $F$  en justifiant votre réponse.
- (5) (a) Montrer que :  $(\forall x \in ] -1; +\infty[); \frac{1}{e} \leq \frac{F(x) - F(-1)}{x + 1} \leq e^{2x+1}$ . (On pourra utiliser deux fois le théorème des accroissements finis.)
- (b) En déduire que  $F$  est dérivable à droite en  $x_0 = -1$ , puis interpréter le résultat obtenu géométriquement.
- (c) Tracer la courbe  $(\mathcal{C}_F)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

### EXERCICE 20

Fonction  $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\ln t}{2t-1} dt$  • T.A.F. • Limite en  $\frac{1}{2}$

Soit  $F$  la fonction définie sur  $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$  par :

$$\left( \forall x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[ \right); F(x) = \int_x^{2x} \frac{\ln t}{2t-1} dt.$$

- (1) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$  et que :
- $$\left( \forall x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[ \right); F'(x) = \frac{(4x-2) \ln 2 - \ln x}{(2x-1)(4x-1)}.$$
- (2) (a) Montrer que :  $\left( \forall x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[ \right); (4x-2) \ln 2 - \ln x > 0$ .
- (b) En déduire la monotonie de  $F$  sur  $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ .
- (3) (a) Soit  $x \in ]1; +\infty[$ . Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis, que :  
 $(\exists c \in ]x; 2x[); F(x) = \frac{x \ln c}{2c-1}$ .
- (b) En déduire que :  $(\forall x \in ]1; +\infty[); \frac{x \ln x}{4x-1} < F(x) < \frac{x \ln(2x)}{2x-1}$ .
- (c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$ , puis interpréter géométriquement ces deux résultats.
- (4) (a) Montrer que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[); \ln x \leq x - 1$ .
- (b) Montrer que :  $\left( \forall x \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[ \right); \int_1^x \frac{\ln t}{2t-1} dt \geq \int_1^x \frac{t-1}{2t-1} dt$ , puis en déduire la limite suivante :  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \int_1^x \frac{\ln t}{2t-1} dt$ .
- (c) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} F(x) = -\infty$ .

**EXERCICE 21**

**Fonction**  $x \mapsto \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$  • **Relation**  $F(x) = F(1/x)$

On considère la fonction  $F$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ .

- (1) Étudier les variations de la fonction  $F$  et déterminer son signe.
- (2) Montrer que :  $(\forall x \in ]1; +\infty[); \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) \leq F(x) \leq 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$ .
- (3) On suppose dans ce qui suit que  $F$  admet une limite finie en  $+\infty$  que l'on note  $\ell$ . Donner un encadrement de  $\ell$ .
- (4) (a) Soit  $G$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $G(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ . Montrer que  $G$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et déterminer  $G'$ .  
(b) En déduire que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[); F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$ .  
(c) Montrer que  $F$  admet une limite finie à droite en 0 à déterminer.
- (5) Soit  $H$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} H(x) = F(x) & \text{si } x > 0 \\ H(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) \end{cases}$$

- (a) Montrer que :  $(\forall x \in ]0; 1]); H(x) - H(0) \leq \frac{1}{2} (x \ln x - x)$ .
- (b) La fonction  $H$  est-elle dérivable à droite en 0 ?

**EXERCICE 22**

**Fonction**  $x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x \arctan(e^{-t}) dt$  • **Rolle** • **Dérivabilité en 0**

Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$F(0) = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \arctan(e^{-t}) dt \quad \text{si } x \neq 0.$$

- (1) (a) Montrer que :  $(\forall u \geq 0); 0 \leq \arctan(u) \leq u$ .  
(b) Montrer que :  $(\forall x > 0); 0 \leq F(x) \leq \frac{1 - e^{-x}}{x}$ . Puis en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .
- (2) (a) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^*); F(-x) = \frac{\pi}{2} - F(x)$ .  
(b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$  en justifiant la réponse.
- (3) (a) En appliquant convenablement le théorème des accroissements finis, montrer que :  $(\forall x > 0); \arctan(e^{-x}) < F(x) < \frac{\pi}{4}$ .  
(b) En déduire que  $F$  est continue en 0.
- (4) (a) Vérifier que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^*); \frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{1}{x^2} \int_0^x g(t) dt$ , où  $g$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$

par  $g(t) = \arctan(e^{-t}) - \frac{\pi}{4}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose :  $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ .

(b) Soit  $x > 0$  et  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(t) = G(t) - \frac{G(x)}{x^2} t^2$ . En appliquant le théorème de Rolle, montrer qu'il existe  $c \in ]0; x[$  tel que :  $\frac{G(x)}{x^2} = \frac{g(c)}{2c}$ .

(c) En déduire que  $F$  est dérivable en 0 et que  $F'(0) = \frac{-1}{4}$ .

(5) (a) Montrer que  $F$  est dérivable sur chacun des intervalles  $] - \infty; 0[$  et  $]0; +\infty[$ , et que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^*); F'(x) = \frac{\arctan(e^{-x}) - F(x)}{x}$ .

(b) Justifier que  $F$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

(6) Construire la courbe de  $F$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

**Indication.** Pour la question 2)a), utiliser une intégration par changement de variable en posant  $u = -t$ , ainsi que le résultat :  $(\forall u \in \mathbb{R}^{*+}); \arctan\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(u)$ .

## ENCADREMENTS ET THÉORÈMES DE LA MOYENNE



### EXERCICE 23

Fonction  $\frac{x-1}{\ln x}$  • Relation fonctionnelle • Encadrement

#### Partie I

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; 1]$  par :

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{x-1}{\ln x} \quad \text{si } 0 < x < 1.$$

(1) Justifier que  $f$  est continue sur  $]0; 1]$ .

(2) Montrer que :  $(\forall t \in ]0; 1]); t f(t) = 2f(t^2) - f(t)$ .

(3) Montrer que :  $\left(\forall t \in \left]0; \frac{1}{e}\right]\right); 0 \leq \frac{-1}{\ln t} - f(t) \leq t$ .

#### Partie II

Soient  $F$  et  $G$  les fonctions définies sur  $[0; +\infty[$  par :

$$F(x) = \int_{e^{-x}}^1 f(t) dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_{e^{-x}}^1 \frac{f(t)}{t} dt.$$

(1) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et que :  $(\forall x \in [0; +\infty[); F'(x) = e^{-x} f(e^{-x})$ .

(2) Montrer que pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , on a :  $F(x) = G(2x) - G(x)$  et  $F(x) = \int_{e^{-2x}}^{e^{-x}} \frac{f(t)}{t} dt$ .

- (3) Montrer que :  $(\forall x \geq 1); 0 \leq \ln 2 - F(x) \leq e^{-x}$ . Puis en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .
- (4) Dresser le tableau de variations de  $F$  en justifiant la réponse.
- (5) Construire la courbe de  $F$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

#### EXERCICE 24

Fonction  $x \mapsto -x + \ln\left(\int_x^{x+1} \frac{e^t}{t} dt\right)$  • T.A.F.

Soit  $F$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$(\forall x \in ]0; +\infty[); \quad F(x) = -x + \ln\left(\int_x^{x+1} \frac{e^t}{t} dt\right).$$

- (1) (a) Montrer que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[); F(x) \geq -x + \ln\left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)$ .
- (b) En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ , puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- (2) (a) Montrer que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) (\exists c \in ]x; x+1[); F(x) = -x + c - \ln(c)$ .
- (b) En déduire que :  $(\forall x \in [1; +\infty[); -\ln(x) \leq F(x) \leq 1 - \ln(x+1)$ .
- (c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$ , puis en déduire la nature de la branche infinie de  $(\mathcal{C}_F)$  au voisinage de  $+\infty$ .
- (3) Montrer que  $F$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ .
- (4) Montrer que la courbe  $(\mathcal{C}_F)$  coupe l'axe  $(Ox)$  en un seul point d'abscisse  $\alpha$  et que  $1 \leq \alpha \leq e-1$ .
- (5) Donner l'allure de la courbe  $(\mathcal{C}_F)$  dans un repère orthonormé.

#### EXERCICE 25

Fonction  $f_n(x) = e^{-nx} \operatorname{Arctan}(e^x)$  • T.A.F. • Aire

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $(\forall x \in \mathbb{R}); f_n(x) = e^{-nx} \operatorname{Arctan}(e^x)$ .

##### Partie I

Dans cette partie, on prend  $n = 1$ .

- (1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x)$ , puis interpréter ces deux résultats.
- (2) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}); f_1'(x) = e^{-x} \left( \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \operatorname{Arctan}(e^x) \right)$ .
- (3) (a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :  $(\forall u > 0); \frac{u}{1+u^2} < \operatorname{Arctan}(u) < u$ .
- (b) En déduire la monotonie de  $f_1$ , puis dresser son tableau de variations.
- (4) Construire la courbe  $(\mathcal{C}_{f_1})$  dans un repère orthonormé.

(5) On pose :  $S(\lambda) = \int_0^\lambda f_1(x) dx$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$ .

- Exprimer  $S(\lambda)$  en fonction de  $\lambda$ , puis déduire  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S(\lambda)$  et donner une interprétation géométrique de cette limite.

### EXERCICE 26

Intégrale  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 x}{n^2}} dx$  • Encadrement fin

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 x}{n^2}} dx$ .

- Calculer l'intégrale  $u_1$ .
- Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement croissante et majorée. Qu'en déduit-on ?
- Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \leq u_n \leq \frac{\pi}{2}$ , puis en déduire la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
- Montrer que :  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \frac{3\pi}{16}$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $v_n = n^2 \times \left( \frac{\pi}{2} - u_n \right)$ .
  - Montrer que pour tout  $x \in [0; 1]$ , on a :  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}} \leq \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$ .
  - En déduire que pour tout  $x \in [0; 1]$ , on a :  $1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \leq \sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2}$ .
  - Prouver que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \left| v_n - \frac{\pi}{8} \right| \leq \frac{3\pi}{32n^2}$ , puis en déduire la limite de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

## ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

VI

### RAPPEL DE COURS

Les solutions de  $y' = ay + b$  ( $a \neq 0$ ) sont  $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . Les solutions de  $y'' + py' + qy = 0$  s'obtiennent à partir des racines de l'équation caractéristique  $r^2 + pr + q = 0$ .

### EXERCICE 27

Équation intégrale • Équation différentielle du premier ordre

### Partie I

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  telle que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); \quad f(x) = -x + 2 + \int_0^{3x} f\left(\frac{1}{3}t\right) dt.$$

- (1) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et qu'elle est solution de l'équation différentielle  $(E) : y' = 3y - 1$ .
- (2) Résoudre l'équation  $(E)$ , puis en déduire l'expression explicite de  $f$ .

### Partie II

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}^{*+}$  telle que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); \quad x^2 f''(x) - 3x f'(x) + 4f(x) = 0.$$

- (1) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on pose :  $g(t) = f(e^t)$ .
  - Montrer que  $g$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et qu'elle est solution de l'équation différentielle  $(E) : y'' - 4y' + 4y = 0$ .
- (2) Résoudre l'équation  $(E)$ , puis en déduire qu'il existe  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$  tel que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f(x) = a x^2 + b x \ln(x)$ .

### EXERCICE 28

#### Ensemble de solutions • Wronskien • Structure de l'ensemble

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions  $f$  deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); \quad f''(x) = (1 + x^2) f(x).$$

- (1) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose :  $g(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$  et  $h(x) = g(x) \int_0^x \frac{1}{(g(t))^2} dt$ .
  - Montrer que  $g$  et  $h$  sont des éléments de l'ensemble  $E$ .
- (2) Soit  $f \in E$ . Montrer que la fonction  $\varphi = f'g - fg'$  est constante sur  $\mathbb{R}$ , puis en déduire qu'il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que :  $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = g(x) + k h(x)$ .

## PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

## VII

### EXERCICE 29

Problème complet •  $g(t) = \ln(1 + \sqrt{t}) - \sqrt{t}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ , suite implicite

### Partie I

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :  $g(t) = \ln(1 + \sqrt{t}) - \sqrt{t}$ .

- (1) (a) Montrer que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .  
 (b) Montrer que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{*+}$  et que :  $g'(t) = \frac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$ .
- (2) (a) Montrer que :  $(\forall t \in \mathbb{R}^{*+}) (\exists c \in ]0; t^2[) ; \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = \frac{-1}{2(1+\sqrt{c})}$ .  
 (b) En déduire que :  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = \frac{-1}{2}$ .

### Partie II

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^{*+}$  par :

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad (\forall x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[) ; f(x) = \frac{\ln x}{x-1}.$$

- (1) (a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , puis interpréter géométriquement le résultat.  
 (b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , puis interpréter géométriquement le résultat.
- (2) (a) Montrer que  $f$  est continue en  $x_0 = 1$ .  
 (b) Montrer que  $f$  est dérivable en  $x_0 = 1$ . (On pourra utiliser I.2)b.)
- (3) (a) Montrer que :  $(\forall x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[) ; f'(x) = \frac{(x-1) - x \ln x}{x(x-1)^2}$ .  
 (b) Montrer que :  $(\forall x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[) ; (x-1) - x \ln x < 0$ . Puis dresser le tableau de variations complet de  $f$ .
- (4) Construire la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .
- (5) (a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists! a_n \in \mathbb{R}^{*+}) ; f(a_n) = 1 + \frac{1}{n}$ .  
 (b) Vérifier que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < a_n < 1$ .  
 (c) Justifier que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.  
 (d) Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - a_n) = 2$ , puis en déduire que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^n = \frac{1}{e^2}$ .

### EXERCICE 30

Problème complet • Fonction  $\frac{x-1}{\ln x}$  et suite d'intégrales

### Partie I

Soit  $x \in ]-1; 0[ \cup ]0; +\infty[$ .

- (1) (a) Montrer que :  $\frac{x}{3(x+1)} \leq \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt \leq \frac{x}{3}$ .  
 (b) Montrer que :  $\frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} + \frac{1}{2}$ .

- (2) En déduire la valeur de la limite suivante :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ .

### Partie II

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad (\forall x \in ]-1; 0[ \cup ]0; +\infty[); f(x) = \frac{\ln x}{x-1}.$$

- (1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , puis donner leurs interprétations.
- (2) (a) Montrer que  $f$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .  
 (b) Étudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 1$ . (Utiliser I.2).)
- (3) (a) Montrer que  $f$  est dérivable sur chacun des intervalles  $]0; 1[$  et  $]1; +\infty[$  et que :  $f'(x) = \frac{(x-1) - x \ln x}{x(x-1)^2}$ .  
 (b) Montrer que :  $(\forall x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[); (x-1) - x \ln x < 0$ , puis dresser le tableau de variations complet de  $f$ .
- (4) Tracer la tangente au point  $A(1; f(1))$  et la courbe  $(C_f)$  dans un repère orthonormé.

### Partie III

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $I_n = \int_1^2 \frac{(x-1)^n}{x} dx$ .

- (1) Calculer  $I_1$ , puis montrer que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante.
- (2) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ , puis en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$ .
- (3) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ , puis en déduire la limite de la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $J_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ .

## FIN DU POLYCOPIÉ IV

Prof. Saad Choukri

© 2026 — Tous droits réservés