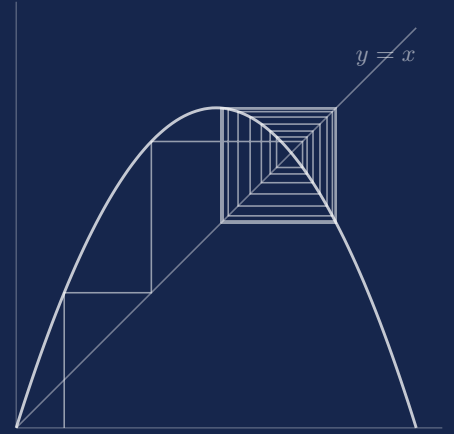


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

COLLECTION D'EXERCICES • NIVEAU BAC



Pour bien se préparer
à l'examen national

للتّضير الجيد للاستحان الوطني

Polycopié II • Analyse II

المطبوع الثاني • التحليل الثاني

Logarithme · Exponentielle · Suites
Sommes · Intégrales · Primitives

30 exercices de préparation

تلا نون تمرينا للتّضير للاستحان الوطني

Sélection d'exercices et de problèmes issus des devoirs surveillés,
devoirs libres et sujets d'examens blancs.

Niveau 2^{ème} année Baccalauréat – Sciences Mathématiques (السنة الثانية بكالوريا -- علوم رياضية)

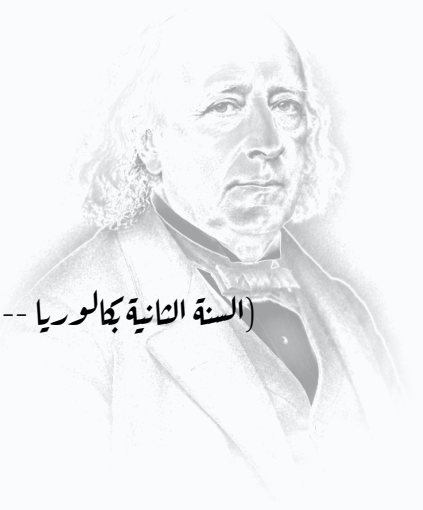
Discipline Mathématiques – Analyse

Volume II – Recueil d'exercices

AUTEUR

Prof. Saad Choukri سعد شكري

© 2026 Prof. Saad Choukri — Tous droits réservés



Avant-propos

Ce polycopié rassemble **trente exercices et problèmes** d'analyse, sélectionnés dans une base de sujets de devoirs et d'examens blancs. Les énoncés couvrent l'intégralité du programme d'*Analyse II* : fonction logarithme népérien, fonction exponentielle, suites définies par une équation, suites récurrentes, sommes et produits, calcul intégral et fonctions définies par une intégrale.

Les exercices sont regroupés en **sept parties thématiques**, de difficulté croissante à l'intérieur de chaque partie. Les trois dernières parties proposent des problèmes longs, de structure identique à celle des épreuves de l'examen national.

La plus grande partie des exercices de ce polycopié a été extraite des anciens devoirs surveillés du professeur **Abdellah Belkhatir** الأستاذ عبد الله بالخير , que nous remercions vivement.

Table des matières **الفهرس**

I	Fonction logarithme : études de fonctions Exercices 1 à 4	الدالة اللوغاريتمية: دراسة الدوال
II	Fonction exponentielle : études de fonctions Exercices 5 à 8	الدالة الأسية: دراسة الدوال
III	Suites définies par une équation Exercices 9 à 14	المتاليات المعرفة بمعادلة
IV	Suites récurrentes et convergence Exercices 15 à 18	المتاليات التراجعية والتقارب
V	Sommes, produits et séries Exercices 19 à 23	المجاميع والجداءات والمتسلسلات
VI	Calcul intégral et fonctions définies par une intégrale Exercices 24 à 28	حساب التكامل
VII	Problèmes de synthèse Exercices 29 et 30	مسائل تركيبية

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تقديم المطبوع

يضمّ هذا المطبوع ثلاثين تمريناً ومسألة في التحليل، انتُخبت من مجموعة من الفروض المحروسة والفروض المنثلية والامتحانات التجريبية، وهي موجهة لتلاميذ السنة الثانية من سلك البكالوريا، شعبة العلوم الرياضية.

تغطّي هذه التمارين مقرّر التحليل الثاني كاملاً: الدالة اللوغاريتمية النيبيرية، الدالة الأسية، المتاليات المعرفة بمعادلة، المتاليات التراجعية، المجاميع والجداءات، ثم حساب التكامل والدوال المعرفة بتكامل.

رُتبت التمارين في سبعة محاور، مع تدرّج في الصعوبة داخل كلّ محور. أمّا المحاور الثلاثة الأخيرة فتضمّن مسائل مركّبة تشبه في بنيتها مسائل الامتحان الوطني.

استُخرج الجزء الأكبر من تمارين هذا المطبوع من الفروض المحروسة السابقة للأستاذ عبد الله بالخير، فله مآ جزيل الشكر والتقدير.

إرشادات للاستعمال

حاول حلّ كلّ تمرين دون النظر إلى الإرشادات لمئة عشرين دقيقة على الأقلّ. احرص على تحرير الحلّ كاملاً، فنقطة الامتحان تقيس الدقّة والصرامة كما تقيس النتيجة. لا ترجع إلى الإرشادات الملونة إلّا عند الضرورة القصوى.

شكر وتقدير

يتقدم مُعدّ هذا الطبوع بأصدق عبارات الشكر والتقدير إلى الأستاذ الفاضل عبد الله بلخثير، الذي استخرج الجزء الأكبر من تمارين هذا العمل من فروض المحروسة السابقة، فجزاه الله خيراً على جهده في خدمة الرياضيات وتلاميذها.

Remerciements

L'auteur adresse ses plus sincères remerciements au professeur **Abdellah Belkhatir**, dont les anciens devoirs surveillés ont fourni la plus grande partie des exercices réunis ici, et le remercie chaleureusement pour son dévouement constant au service de l'enseignement des mathématiques.

إعداد الأستاذ سعد شكري
وفقكم الله

FONCTION LOGARITHME : ÉTUDES DE FONCTIONS

RAPPEL DE COURS

La fonction $\ln$ est la primitive sur $\mathbb{R}^{*+}$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. Elle est strictement croissante, réalise une bijection de $\mathbb{R}^{*+}$ vers $\mathbb{R}$, et vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ainsi que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$.

EXERCICE 1

Étude complète • Asymptote horizontale • Réciproque

Soit f la fonction définie par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2 \ln x}} \quad \text{si } x \neq 0.$$

- (1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); 1 + x^2 \ln x > 0$, puis en déduire D_f .
- (2) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale que l'on déterminera.
- (3) Étudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.
- (4) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f'(x) = \frac{2-x^2}{2(1+x^2 \ln x)^{\frac{3}{2}}}$, puis dresser le tableau de variations de f .
- (5) Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $f(x) = x$, puis dresser un tableau donnant le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}^+$.
- (6) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- (7) Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [0; \sqrt{2}]$.
 - (a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
 - (b) Construire la courbe $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 2

Étude sur $]1; +\infty[$ • Fonction définie par une primitive

Partie I

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{\ln x}}$.

- (1) (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat.
- (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement les résultats.

- (2) (a) Montrer que f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et que : $(\forall x \in]1; +\infty[); f'(x) = \frac{2 \ln x - 1}{2(\sqrt{\ln x})^3}$.
- (b) Dresser le tableau de variations de f en justifiant la réponse.
- (3) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- (4) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$.
- (a) Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet exactement deux solutions u_n et v_n telles que : $1 < u_n < \sqrt{e} < v_n$.
- (b) Montrer que : $(\forall n \geq 3); v_n > n$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
- (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est convergente.
- (d) Montrer que : $(\forall n \geq 3); \frac{1}{n^2} < \ln(u_n) < \frac{e}{n^2}$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Partie II

Soit F une primitive de f sur $]1; +\infty[$, et G la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $G(x) = F(x^2) - F(x)$, avec $G(1) = 0$.

- (1) (a) Montrer que : $(\forall x \in]1; +\infty[); G(x) > 0$.
- (b) Montrer que G est dérivable sur $]1; +\infty[$ et que : $(\forall x \in]1; +\infty[); G'(x) = (\sqrt{2}x - 1)f(x)$.
- (c) En déduire le sens de variation de G sur $]1; +\infty[$.
- (2) (a) Montrer que : $(\forall x \in]1; \sqrt[4]{e}]); \frac{x^3(x-1)}{\sqrt{2 \ln x}} < G(x) < \frac{x^2(x-1)}{\sqrt{\ln x}}$.
- (b) Montrer que G est continue à droite en $x_0 = 1$.
- (c) Étudier la dérivabilité de G à droite en $x_0 = 1$ et interpréter le résultat obtenu.
- (3) (a) Montrer que : $(\forall x \in]\sqrt[4]{e}; +\infty[); G(x) > \frac{x^2(x-1)}{\sqrt{\ln x}}$.
- (b) Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement les résultats.

EXERCICE 3

La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ • Produit • Suites implicites

Partie I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par : $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

- (1) (a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
- (b) Interpréter graphiquement chacune des limites précédentes.
- (2) (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$.
- (b) Dresser le tableau de variations complet de f en justifiant la réponse.

(c) Écrire l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $x_0 = 1$.

(3) (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f''(x) = \frac{2 \ln(x) - 3}{x^3}$.

(b) Étudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ et déterminer son point d'inflexion.

(4) Construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(5) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose : $F_n = \frac{n}{\sqrt{n!}} \prod_{k=2}^n \ln(k)$.

- Montrer que la suite $(F_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante. Puis en déduire que : $(\forall n \geq 2); \prod_{k=2}^n \ln(k) < \frac{\sqrt{n!}}{n}$.

Partie II

On considère dans $\mathbb{R}^{*+}$ l'équation $(E_n) : f(x) = \frac{1}{n}$, où $n \geq 3$ est un entier naturel fixé.

(1) Montrer que l'équation (E_n) admet exactement deux solutions a_n et b_n telles que : $1 < a_n < e < b_n$.

(2) (a) Étudier la monotonie de $(a_n)_{n \geq 3}$, puis en déduire qu'elle est convergente.

(b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^n = e$.

(c) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(a_n - 1) = 1$.

(3) (a) Montrer que $(b_n)_{n \geq 3}$ est strictement croissante et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$.

(b) Montrer que : $(\forall n \geq 3); n \ln(n) \leq b_n \leq n \ln(2n \ln(n))$. Puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{n \ln(n)}$.

EXERCICE 4

Fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ • Suite récurrente

Partie I

Soit f la fonction définie par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \quad \text{si } x \neq 0.$$

(1) Montrer que $D_f = \mathbb{R}$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f en 0.

(3) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]0; +\infty[$ et $] - \infty; 0[$, et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*); \quad f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x(e^x - 1)}, \quad \text{où } \varphi(x) = xe^x - e^x + 1.$$

(4) Étudier les variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$ et en déduire son signe sur $\mathbb{R}^*$, puis dresser le tableau de variations de f .

- (5) Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_f)$, puis construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- (6) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*); f(x) - x = f(-x)$, puis en déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Partie II

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}^{*+} \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n).$$

- (1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$.
- (2) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis en déduire qu'elle est convergente.
- (3) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Indication. Pour la question I.2), on admettra l'encadrement : $(\forall x \in \mathbb{R}^*); \frac{1}{2}e^{\frac{x-|x|}{2}} \leq \frac{e^x - (x+1)}{x^2} \leq \frac{1}{2}e^{\frac{x+|x|}{2}}$.

FONCTION EXPONENTIELLE : ÉTUDES DE FONCTIONS



EXERCICE 5

Fonction paire • T.A.F. • Suite implicite

Partie I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{2x e^x}{e^{2x} - 1} \quad \text{si } x \neq 0.$$

- (1) Justifier que f est paire.
- (2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- (3) Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, puis interpréter graphiquement ce résultat.
- (4) (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f'(x) = \frac{2e^x g(x)}{(e^{2x} - 1)^2}, \quad \text{où } g(x) = (1-x)e^{2x} - (1+x).$$

- (b) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); g(x) < 0$, et en déduire la monotonie de f sur $\mathbb{R}^+$.
- (5) (a) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{u(x)}{x(e^x - e^{-x})}$, où $u(x) = 2x - e^x + e^{-x}$.
- (b) Justifier que la fonction u' est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

(c) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); \quad \frac{u'(x)}{e^x - e^{-x}} \leq \frac{f(x) - 1}{x}.$$

(d) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

(6) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation $(E) : f(x) = nx^2$, où $x \in \mathbb{R}^+$.

(1) Montrer que (E) admet une unique solution u_n dans $\mathbb{R}^+$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(2) Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

(3) (a) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} u_n = 1$.

(b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(u_n)^2 - 1}{u_n}$.

EXERCICE 6

Théorème de Rolle • Fonction $x \mapsto \frac{xe^x}{e^x - 1}$

Partie I

Soit $h \in \mathbb{R}^{*+}$ et soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \left(\frac{e^h - (h+1)}{h^2} \right) x^2 - (e^x - (x+1)).$$

(1) En utilisant le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $c \in]0; h[$ tel que :

$$\frac{e^h - (h+1)}{h^2} = \frac{e^c - 1}{2c}.$$

(2) En déduire la limite $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^h - (h+1)}{h^2}$, puis calculer par la même méthode $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^h - (h+1)}{h^2}$.

(3) En étudiant les variations de la fonction $\phi : x \mapsto e^x - (x+1)$ sur $\mathbb{R}$, montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*); e^x > x+1$.

Partie II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} \quad \text{si } x \neq 0.$$

(1) Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

(2) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

(3) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*); f'(x) = \frac{e^x \phi(x)}{(e^x - 1)^2}.$$

- (4) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
 (5) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie III

Soit F la fonction définie par : $F(0) = 0$ et $F(x) = \ln(f(x))$ si $x \neq 0$.

- (1) Vérifier que F est définie sur $\mathbb{R}$.
 (2) Étudier la continuité et la dérivabilité de F en 0.
 (3) Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_F)$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
 (4) Dresser le tableau de variations de F , puis construire $(\mathcal{C}_F)$ dans un repère orthonormé.
 (5) Étudier le signe de $F(x) - x$ sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

Partie IV

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}^{*+}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = F(u_n)$.

- (1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$.
 (2) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis en déduire qu'elle est convergente.
 (3) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 (4) On suppose désormais que $u_0 \in \mathbb{R}^{*-}$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 7

Fonction $x \mapsto \frac{1}{1-xe^{-x}}$ • Primitive et encadrement

Partie I

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{1-xe^{-x}}$.

- (1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 1 - xe^{-x} > 0$, puis en déduire D_f .
 (2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis donner une interprétation géométrique des résultats.
 (3) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{(1-x)e^{-x}}{(1-xe^{-x})^2}$, puis dresser le tableau de variations de f .
 (4) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 (5) Montrer que : $(\forall x \in [0; +\infty[) ; 1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}$.
 (6) Vérifier que la fonction $g : t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ admet sur $\mathbb{R}^{*+}$ une unique primitive G vérifiant $G(0) = 0$.

Partie II

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$(\forall x \in]0; 1]) ; F(x) = G(-\ln x) \quad \text{et} \quad (\forall x \in [1; +\infty[) ; F(x) = G(\ln x).$$

- (1) Montrer que : $(\forall x \in]0; 1]) ; F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$.

- (2) Déterminer le sens de variation de F sur $[1; +\infty[$, puis en déduire ses variations sur $]0; 1]$.
- (3) (a) Montrer que : $(\forall x \in [1; +\infty[); \frac{1}{2} (\ln x)^2 \leq F(x) \leq \frac{e}{2(e-1)} (\ln x)^2$.
- (b) Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x)$, puis donner une interprétation géométrique.
- (c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$. Que peut-on en déduire ?
- (4) Étudier la dérivabilité de F en $x_0 = 1$, puis interpréter le résultat obtenu.
- (5) Construire la courbe $(\mathcal{C}_F)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 8

Famille de courbes • Réciproque • Fonction intégrale

Partie I

Soit $m \in \mathbb{R}^{*+}$ et f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = e^{2x} - 2me^x$. On note (C_m) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) Étudier les branches infinies de la courbe (C_m) au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
- (2) (a) Montrer que la fonction f_m admet un minimum atteint en un unique point I_m dont on déterminera les coordonnées.
- (b) Montrer que lorsque le paramètre réel m varie dans $\mathbb{R}^{*+}$, le point I_m décrit la courbe (Γ) d'équation $y = -e^{2x}$.
- (3) (a) Construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes (Γ) , (C_1) et (C_2) .
- (b) Calculer l'aire de la portion du plan délimitée par (C_1) , (C_2) , (Γ) , l'axe (Ox) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \ln 4$.

Partie II

Soit f la restriction de la fonction f_1 à l'intervalle $I = [0; +\infty[$.

- (1) Montrer que f est une bijection de I vers un intervalle J que l'on déterminera, et que : $(\forall x \in J); f^{-1}(x) = \ln(1 + \sqrt{1+x})$.
- (2) Montrer que l'équation $(E) : f^{-1}(x) = x$ admet une unique solution α telle que $\alpha \in]0; 1[$.
- (3) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$.
- (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in \mathbb{R}^+$.
- (b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); 0 \leq (f^{-1})'(x) \leq \frac{1}{2}$.
- (c) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.
- (d) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie III

(1) Soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$. En utilisant le théorème des accroissements finis, établir que :

$$0 < \frac{f(x) + 1}{x} < f'(x).$$

(2) En déduire que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$.

(3) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$F(0) = -\ln 2 \quad \text{et} \quad F(x) = \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt \quad \text{si } x > 0.$$

(a) Établir que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); 0 \leq F(x) + \ln 2 \leq f(2x) - f(x)$.

(b) En déduire que F est continue et dérivable à droite en 0.

(c) Établir que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); F(x) \geq f(x) \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$, puis étudier la branche infinie de $(\mathcal{C}_F)$ au voisinage de $+\infty$.

(d) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); F'(x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$.

(e) Dresser le tableau de variations de la fonction F .

SUITES DÉFINIES PAR UNE ÉQUATION



MÉTHODE

Pour une suite (α_n) définie par $f_n(\alpha_n) = 0$: on établit d'abord l'existence et l'unicité par stricte monotonie et le théorème des valeurs intermédiaires, puis on obtient la monotonie de la suite en comparant $f_{n+1}(\alpha_n)$ à $f_n(\alpha_n) = 0$, et enfin la limite par encadrement.

EXERCICE 9

Bijection • Encadrement • Vitesse de convergence

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par :

$$f_n(x) = x + n(1 + \ln(x)).$$

(1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

(2) Montrer que f_n est une bijection de $\mathbb{R}^{*+}$ vers $\mathbb{R}$.

(3) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans $\mathbb{R}^{*+}$.

(4) (a) Justifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{e^2} < \alpha_n < \frac{1}{e}$.

(b) Montrer que : $\left(\forall x \in \left]0; \frac{1}{e}\right[; f_{n+1}(x) < f_n(x)\right]$. Puis en déduire la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

(5) (a) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

(b) Prouver que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1}{e} - \alpha_n \right) = \frac{1}{e^2}$.

EXERCICE 10

Deux suites implicites • Racine n -ième

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); \quad f_n(x) = -nx + \ln(x).$$

(1) (a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

(b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f'_n(x) = \frac{-nx + 1}{x}$. Puis dresser le tableau de variations de f_n .

(2) (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); \ln(x) < 2x - 1$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = -2n$ admet exactement deux solutions a_n et b_n dans $\mathbb{R}^{*+}$ telles que : $0 < a_n < \frac{1}{n}$ et $b_n > 2$.

(3) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ et montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{e^2}$.

(4) (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); f_{n+1}(b_n) < -2(n+1)$. Puis en déduire la monotonie de la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

(b) Justifier que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 2$.

(c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(b_n - 2)$.

EXERCICE 11

Somme partielle • T.A.F. • Équivalent

Soit f_n la fonction définie sur $I =]1; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln(x-1) + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}, \quad \text{où } n \geq 2 \text{ est un entier naturel.}$$

(1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

(2) (a) Justifier que f_n est dérivable sur I et que : $(\forall x \in I); f'_n(x) = \frac{x^n}{x-1}$.

(b) En déduire que f_n réalise une bijection de I vers $\mathbb{R}$.

(3) (a) Justifier que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans I que l'on notera α_n .

(b) Montrer que : $(\forall n \geq 2); f_n(\alpha_{n+1}) = \frac{-(\alpha_{n+1})^{n+1}}{n+1}$, puis en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante.

(4) (a) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*); \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$. Puis en déduire que : $(\forall n \geq 2); \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

(b) Montrer que : $(\forall n \geq 2); \alpha_n \leq 1 + \frac{1}{n+1}$. Puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.

(5) (a) Déterminer le sens de variation de f'_{n+1} sur l'intervalle $\left]1; 1 + \frac{1}{n+1}\right]$.

(b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f_{n+1} sur l'intervalle $[\alpha_{n+1}; \alpha_n]$, montrer que :

$$\alpha_{n+1} - 1 \leq (n+1)(\alpha_n - \alpha_{n+1}) \leq \alpha_n - 1.$$

(c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\alpha_n - \alpha_{n+1})$.

EXERCICE 12

Fonction $x \mapsto \ln(1+nx)$ • Encadrement logarithmique

Soit f_n la fonction définie par : $f_n(x) = \ln(1+nx)$, où $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

(1) Déterminer D_{f_n} , puis calculer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition.

(2) Montrer que : $(\forall x \in]1; +\infty[); 1 - \frac{1}{x} < \ln x < \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x}\right)$.

(3) Montrer que f_n est une bijection de D_{f_n} vers $\mathbb{R}$, puis calculer $f_n^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(4) Montrer que l'équation $f_n(x) = x$ admet exactement deux solutions 0 et α_n telles que : $1 - \frac{1}{n} < \alpha_n < n - \frac{1}{n}$.

(5) Montrer que : $\ln n < \alpha_n < 2 \ln n$, puis en déduire que : $\ln n < \alpha_n < \ln(1+2n \ln n)$.

(6) Calculer, en justifiant chaque réponse, les deux limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{\ln n}$.

EXERCICE 13

Bijection • Suite implicite décroissante

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f_n(x) = \ln(x) - e^{-nx}.$$

(1) Montrer que f_n est une bijection de $\mathbb{R}^{*+}$ vers $\mathbb{R}$.

(2) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans $\mathbb{R}^{*+}$, et que $\alpha_n > 1$.

- (3) Étudier la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, puis en déduire qu'elle est convergente.
 (4) Calculer la limite de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en justifiant la réponse.

EXERCICE 14

Inégalités logarithmiques • Suite implicite • Limite de $(u_n)^n$

- (1) (a) Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R}^{*+}) ; \ln t \leq t - 1$.
 (b) En déduire que : $(\forall x \in [1; +\infty[) ; x \ln x \geq x - 1$.
 (2) Montrer que : $(\forall x \in [1; +\infty[) ; x \ln x \leq \frac{1}{2}(x^2 - 1)$.
 (3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $(E_n) : x \ln x = \frac{1}{n}$ admet une solution unique u_n dans $\mathbb{R}^{*+}$.
 (4) Vérifier que : $1 < u_n < e$, puis établir que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \sqrt{1 + \frac{2}{n}} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n}$.
 (5) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente en précisant sa limite, puis établir que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)^n = e$.

Indication. Pour la question 2), on utilisera le résultat de la question 1)b).

SUITES RÉCURRENTES ET CONVERGENCE

IV

EXERCICE 15

Fonction $x \mapsto 1 - e^{-x}$ • Trois suites • T.A.F.

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = 1 - e^{-x}$.

- (1) (a) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
 (b) Étudier le signe de la différence $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.
 (2) Montrer que l'équation $(E) : f(x) = 1 - x$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$, et que : $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.
 (3) (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) (\exists c \in]0; x[) ; \frac{x - f(x)}{x^2} = \frac{1 - e^{-c}}{2c}$.
 (b) En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - f(x)}{x^2}$.

Partie II

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n)$.

- (1) (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 0$.
 (b) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.
 (c) Calculer la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \frac{u_n - u_{n+1}}{(u_n)^2}$.
- (2) Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 \in \left] \frac{1}{e}; 1 \right[\\ (\forall n \in \mathbb{N}); w_{n+1} = 1 - f(w_n) \end{cases}$$

- (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{1}{e} < w_n < 1$.
 (b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); |w_{n+1} - \alpha| \leq e^{-\frac{1}{e}} \times |w_n - \alpha|$, puis en déduire que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente en précisant sa limite.

Partie III

- (1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = 1 - x^n$ admet une solution unique α_n dans $]0; 1]$.
- (2) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.
- (3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{-1}{n} < \ln(\alpha_n) < 0$, puis en déduire la limite de $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- (4) Calculer chacune des limites suivantes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - \alpha_n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n$.

EXERCICE 16

Étude d'une primitive • Asymptote oblique • Suite contractante

Partie I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \frac{1-t}{2} e^{\frac{t}{2}}$.

- (1) Montrer que la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
- (2) En déduire que l'équation $f(t) = 0$ admet une solution unique α telle que $-1 < \alpha < 0$.
- (3) Déterminer le signe de $f(t)$ suivant les valeurs de t dans $\mathbb{R}$.
- (4) Pour tout t de $\mathbb{R}$, on pose : $\varphi(t) = f(t) + \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}}$.
 (a) Déterminer le sens de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$.
 (b) Calculer $\varphi(0)$, puis en déduire que : $(\forall t \in]-\infty; 0]); f(t)e^{-\frac{t}{2}} \geq -\frac{1}{2}$.

Partie II

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (x+1)e^{\frac{x}{2}} - x - 1$. On note $(\mathcal{C}_F)$ sa courbe

représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 3 cm).

- (1) Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
- (2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); F'(x) = f(x)e^{\frac{x}{2}}$, puis dresser le tableau de variations de F .
- (3) Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_F)$ avec l'axe des abscisses.
- (4) Montrer que $(\mathcal{C}_F)$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.
- (5) Montrer que $(\mathcal{C}_F)$ admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique (Δ) que l'on déterminera.
- (6) Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_F)$ et de son asymptote (Δ) .
- (7) Construire la courbe $(\mathcal{C}_F)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne $\alpha \approx -\frac{1}{2}$ et $F(\alpha) = \frac{1}{6}$.

Partie III

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \frac{1}{4}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = F(-u_n)$.

- (1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in]0; 1[$.
- (2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.
- (3) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente en précisant sa limite.

Indication. Pour la question III.2), on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis.

EXERCICE 17

Fonction $\ln$ composée • Suite contractante • Moyenne de Césàro

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \ln \left(\frac{x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x}}{2} \right).$$

- (1) (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}}$.
 (b) Justifier que : $(\forall x \in [1; +\infty[); 0 < f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$.
- (2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln(x+2)$.
- (3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$.
 (a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.
 (b) Montrer que g est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$. Puis en déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[1; +\infty[$ et que : $1 < \alpha < 4$.
- (4) On considère la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$V_0 = 1 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}); V_{n+1} = f(2V_n).$$

(a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq V_n \leq 2$.

(b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); \left| V_{n+1} - \frac{1}{2}\alpha \right| \leq \frac{2}{\sqrt{5}} \left| V_n - \frac{1}{2}\alpha \right|$. Puis justifier que la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente en précisant sa limite.

(5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n V_k$.

• Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); |S_n - \alpha| \leq \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} \times \frac{1}{n+1}$. Puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

EXERCICE 18

Étude d'une gaussienne • Deux suites implicites

Partie I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = 1 - x^2 e^{1-x^2}$.

(1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

(2) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie II

Soit n un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$. On considère dans $\mathbb{R}^+$ l'équation : $(E_n) : f(x) = \frac{1}{n}$.

(1) Montrer que l'équation (E_n) admet exactement deux solutions distinctes α_n et β_n telles que : $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.

(2) Représenter dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les trois premiers termes de chacune des suites $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ et $(\beta_n)_{n \geq 2}$.

(3) Étudier la monotonie de chacune des suites $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ et $(\beta_n)_{n \geq 2}$, puis en déduire qu'elles sont convergentes.

(4) Calculer la limite de chacune des suites $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ et $(\beta_n)_{n \geq 2}$. Que peut-on en déduire ?

SOMMES, PRODUITS ET SÉRIES



EXERCICE 19

Suites adjacentes • Série alternée harmonique

Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = S_{2n}$ et $b_n = S_{2n+1}$.

- (1) (a) Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
 (b) Quelle conclusion peut-on en déduire ?
- (2) (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} x^{k-1} \leq \frac{1}{1+x} \leq \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} x^{k-1}$.
 (b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \leq \ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.
- (3) (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); a_n \leq \ln(2) \leq b_n$. Puis en déduire la valeur de la limite commune de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 (b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); |S_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{n}$. Puis en déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente en précisant sa limite.

EXERCICE 20

Suites adjacentes • Développement de e^{-1}

Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.

- (1) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
- (2) Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
- $$f_n(x) = e^{-x} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} x^k, \quad \text{où } n \in \mathbb{N}.$$
- (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); f_{2n}(x) \leq 0 \leq f_{2n+1}(x)$.
 (b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n \leq \frac{1}{e} \leq u_n$, puis calculer la limite de chacune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); \left| S_n - \frac{1}{e} \right| \leq \frac{1}{n}$, puis en déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente en précisant sa limite.

EXERCICE 21

Encadrement de $\ln(1+x)$ • Produit • Suite $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

- (1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.
- (2) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e^n < \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$.

(3) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{e} \times \frac{n+1}{n} < u_n < \frac{1}{e} \times \frac{n+1}{n} \sqrt[n]{n+1}$. Puis en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente en précisant sa limite.

EXERCICE 22

Primitive de Arctan • Somme de Riemann • T.A.F.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x \operatorname{Arctan}(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1).$$

- (1) Montrer que la fonction f est paire.
- (2) Montrer que f est une primitive de la fonction Arctan sur $\mathbb{R}$.
- (3) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction une droite (Δ) que l'on déterminera.
- (4) Dresser le tableau de variations de f , puis construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- (5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \operatorname{Arctan}\left(\frac{k}{n}\right)$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}); f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{k}{n}\right) \leq f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right).$$

(b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); f(1) - f(0) \leq S_n \leq f\left(1 + \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)$, puis montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente en déterminant sa limite.

EXERCICE 23

Cosinus hyperbolique • Sommes de Riemann • Encadrements

Partie I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

- (1) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- (2) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); (f(x))^2 - (f'(x))^2 = 1$.
- (3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}$, où M_k est le point de $(\mathcal{C}_f)$ de coordonnées

$\left(\frac{k}{n}; f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$, avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

(a) Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, il existe $c_k \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$ tel que :

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} f'(c_k).$$

(b) Justifier que : $(\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}); M_k M_{k+1} = \frac{1}{n} f(c_k)$.

(4) (a) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq S_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

(b) Justifier que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie II

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $T_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right) - n$.

(1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.

(2) (a) Montrer que : $(\forall x \in [0; 1]); f(x) \leq 1 + x^2$.

(b) En déduire que : $(\forall x \in [0; 1]); f(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12}$.

(3) (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq T_n \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} + \frac{1}{12} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2}$.

(b) En déduire que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente en précisant la valeur de sa limite.

CALCUL INTÉGRAL ET FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE INTÉGRALE

VI

RAPPEL DE COURS

Si f est continue sur un intervalle I et si u, v sont dérivables à valeurs dans I , alors $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ est dérivable et sa dérivée vaut $v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

EXERCICE 24

Intégration par parties • Sommes de Riemann

(1) Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_0^1 \ln^2(1+t) dt$.

(2) Montrer que : $(\forall (x, y) \in [0; 1]^2) ; |\ln^2(1+x) - \ln^2(1+y)| \leq 2|x-y|$.

(3) Soit $a \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln^2\left(1 + \frac{k+a}{n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln^2\left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; |v_n| \leq \frac{2}{n}$, puis calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

EXERCICE 25

Argument sinus hyperbolique • Aire et volume de révolution

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

- (1) Vérifier que $D_f = \mathbb{R}$, puis montrer que la fonction f est impaire.
- (2) Étudier la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
- (3) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
- (4) Dresser le tableau de variations de f , puis étudier la concavité de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
- (5) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, puis construire les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- (6) Calculer l'aire de la portion du plan délimitée par les deux courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ sur l'intervalle $[0; 1]$.
- (7) Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ autour de l'axe (Ox) d'un tour complet sur l'intervalle $[0; 1]$.

EXERCICE 26

Fonction $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2} dt$ • Parité • Encadrements

Partie I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par : $f(t) = \ln(1+t)$.

Partie II

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{n+k}\right), \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

- (1) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et que sa limite vaut $\ln(2)$.
- (2) Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R}^{*+}) ; 1 - \frac{1}{2}t^2 \leq f'(t) \leq 1$, puis en déduire que : $(\forall t \in \mathbb{R}^{*+}) ; t - \frac{1}{6}t^3 \leq f(t) \leq t$.

- (3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n \left(1 - \frac{1}{6n^2}\right) \leq v_n \leq u_n$, puis en déduire la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Partie III

Soit F la fonction définie par :

$$F(0) = \ln(2) \quad \text{et} \quad F(x) = \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2} dt \quad \text{si } x \neq 0.$$

- (1) Vérifier que $D_F = \mathbb{R}$, puis montrer que la fonction F est paire.
- (2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); -\frac{1}{4}x^2 + \ln 2 \leq F(x) \leq \ln 2$.
- (3) Étudier la continuité et la dérivabilité de F en 0.
- (4) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); \frac{f(x)}{2x} \leq F(x) \leq \frac{f(2x)}{2x}$.
- (5) En déduire la nature de la branche infinie de $(\mathcal{C}_F)$ au voisinage de $+\infty$.
- (6) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); F'(x) = \frac{f(2x) - 2f(x)}{2x^2}$.
- (7) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f(2x) - 2f(x) < 0$.
- (8) Construire la courbe $(\mathcal{C}_F)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Indication. Pour la question III.7), on pourra utiliser la monotonie de la fonction dérivée f' .

EXERCICE 27

Fonction $x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{e^{\sqrt{x}} + 1}$ • Fonction définie par une primitive

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+); f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{e^{\sqrt{x}} + 1}.$$

- (1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (2) (a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.
(b) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- (3) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- (4) Vérifier que f admet une primitive F sur $\mathbb{R}^+$.

Partie II

Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$G(0) = 0 \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{F(4x^2) - F(x^2)}{x} \quad \text{si } x > 0.$$

- (1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); 3xf(x^2) \leq G(x) \leq 3xf(4x^2)$.
- (2) Étudier la continuité et la dérivabilité de G à droite en 0.
- (3) Calculer chacune des limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (G(x) - 3x)$.
- (4) (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); G'(x) = 8f(4x^2) - 2f(x^2) - \frac{G(x)}{x}$.
(b) En déduire que G est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- (5) (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) (\exists c \in]x; 2x[); G(x) = 2cf(c^2)$.
(b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x} = \frac{3}{2}$.

EXERCICE 28

Réciproque • Aire • Suite d'intégrales $\int_0^x [\varphi(t)]^n dt$

Partie I

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = -\ln(1 + \sin x)$.

- (1) (a) Dresser le tableau de variations de f .
(b) Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
(c) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J , puis calculer $(f^{-1})'(x)$ pour tout $x \in J$.
- (2) Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $] -\ln 2; +\infty[$ par : $\varphi(x) = \frac{-1}{\sqrt{2e^x - 1}}$.
(a) Dresser le tableau de variations de φ , puis construire la courbe $(\mathcal{C}_\varphi)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
(b) Calculer l'aire de la portion du plan délimitée par $(\mathcal{C}_\varphi)$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$.

Partie II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0; +\infty[$, on pose : $G_n(x) = \int_0^x [\varphi(t)]^n dt$.

- (1) (a) Calculer $G_1(x)$ en fonction de $f^{-1}(x)$, puis en déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} G_1(x) = -\frac{\pi}{2}$.
(b) Pour tout $t \in] -\ln 2; +\infty[$, on pose : $h(t) = \ln(2 - e^{-t})$. Montrer que $h'(t) = [\varphi(t)]^2$, puis calculer $G_2(x)$ pour tout $x \in [0; +\infty[$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} G_2(x)$.
- (2) (a) Établir que : $(\forall t \in [0; +\infty[); -e^{-\frac{t}{2}} \leq \varphi(t) \leq 0$.
(b) Soit $x \in [0; +\infty[$. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); |G_n(x)| \leq \frac{2}{n}$.

(c) En déduire, pour tout $x \in [0; +\infty[$, la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x)$.

(3) (a) Montrer que : $(\forall t \in [0; +\infty[); \varphi(t) + [\varphi(t)]^3 = -2\varphi'(t)$.

(b) En déduire que pour tout $x \in [0; +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$G_n(x) + G_{n+2}(x) = \frac{-2}{n} ([\varphi(x)]^n - (-1)^n).$$

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

VII

EXERCICE 29

Problème complet • Étude, suite récurrente, primitive, produit

Partie I

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = -1 - x + x \ln(x)$.

(1) Dresser le tableau de variations de g (le calcul des limites n'est pas demandé).

(2) En déduire que : $(\forall x \in]0; +\infty[); 1 + x \ln(x) \geq x$.

Partie II

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1}{1 + x \ln(x)} \quad \text{si } x > 0.$$

(1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat.

(2) Montrer que f est continue à droite en 0.

(3) (a) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat obtenu géométriquement.

(b) Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = \frac{-(1 + \ln(x))}{(1 + x \ln(x))^2}.$$

(c) Dresser le tableau de variations de f en justifiant la réponse.

(4) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie III

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = u_n \cdot f(u_n).$$

(1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < 1$.

(2) (a) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis en déduire qu'elle est convergente.

(b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ en justifiant soigneusement la réponse.

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $V_n = \prod_{k=0}^{n-1} u_k$.

• Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \ln(V_n) = -2 + \frac{1}{u_n}$. Puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

Partie IV

Soit F la primitive de f sur $[0; +\infty[$ qui vérifie $F(1) = 0$.

(1) (a) Vérifier que : $(\forall x \geq 1); \frac{1}{x(1 + \ln(x))} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$.

(b) En déduire que : $(\forall x \geq 1); \ln(1 + \ln(x)) \leq F(x) \leq \ln(x)$.

(c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

(2) Pour tout $x \in [1; +\infty[$, on pose : $G(x) = x - F(x)$.

(a) Montrer que G est une bijection de l'intervalle $[1; +\infty[$ vers lui-même.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $G(x) = n$ admet une unique solution α_n dans $[1; +\infty[$.

(c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \alpha_n \geq n$. Puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$.

EXERCICE 30

Problème complet • $\frac{\ln(1+x)}{x}$, primitive, suites et moyennes

Partie I

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = x - (1+x) \ln(1+x)$.

(1) Montrer que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

(2) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); g(x) < 0$.

Partie II

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{si } x > 0.$$

(1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat.

(3) (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+x)}$.

(b) Dresser le tableau de variations de f en justifiant la réponse.

- (4) (a) Justifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); 1 - x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2$.
- (b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
- (c) Montrer que f est dérivable à droite en 0 et préciser $f'_d(0)$.
- (5) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie III

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $F(x) = G(2x) - G(x)$, où G est une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$.

- (1) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que :

$$F'_d(0) = 1 \quad \text{et} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); F'(x) = \frac{\ln(1+2x) - \ln(1+x)}{x}.$$

- (2) (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); x f(2x) \leq F(x) \leq x f(x)$.
- (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$, puis en déduire que $(\mathcal{C}_F)$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on déterminera la direction.
- (3) Dresser le tableau de variations de F en justifiant la réponse.
- (4) Construire la courbe $(\mathcal{C}_F)$ dans un repère orthonormé.

Partie IV

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

- (1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n \leq 1$.
- (2) Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, puis qu'elle est convergente.
- (3) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- (4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

(a) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \leq S_n$ et $S_{2n} \leq \frac{u_n + S_n}{2}$.

(c) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$.

- (5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $V_n = n u_n$. On admet que :

$$(\forall x \in]0; 1]); \quad \frac{1}{2} - \frac{3}{16}x \leq \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}.$$

(a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 2(1 - u_n) \leq V_n \leq \frac{16(1 - u_n)}{8 - 3S_n}$.

(b) En déduire que la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente en précisant sa limite.

- (6) (a) Soit $x \in]0; 1]$. Montrer qu'il existe $c \in]0; x[$ telle que :

$$\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{c}{2c - g(c)}.$$

(b) En déduire que : $(\forall x \in]0; 1]) ; \frac{1}{2} - \frac{3}{16}x \leq \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$.

FIN DU POLYCOPIÉ II

Prof. Saad Choukri

© 2026 — Tous droits réservés