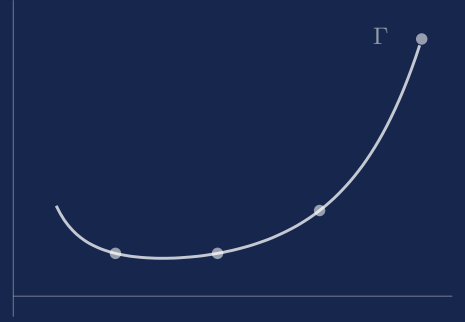


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



COLLECTION D'EXERCICES • NIVEAU BAC

Pour bien se préparer
à l'examen national

للتّضير الجيد للاستحان الوطني

Polycopié I • Analyse I

المطبوع الأول • التحليل الأول

Limites · Continuité · Dérivabilité
Fonctions réciproques · Suites · Primitives

30 exercices de préparation

تلا نون تمرينا للتّضير للاستحان الوطني

Sélection d'exercices et de problèmes issus des devoirs surveillés,
devoirs libres et sujets d'examens blancs.

Niveau 2^{ème} année Baccalauréat – Sciences Mathématiques (السنة الثانية بكالوريا -- علوم رياضية)

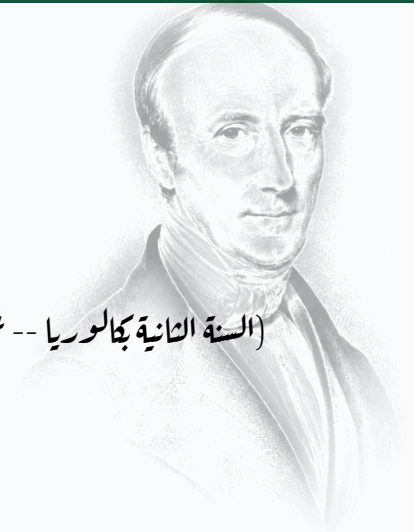
Discipline Mathématiques – Analyse

Volume I – Recueil d'exercices

AUTEUR

Prof. Saad Choukri سعد شكري

© 2026 Prof. Saad Choukri — Tous droits réservés



Avant-propos

Ce polycopié rassemble **trente exercices et problèmes** d'analyse, sélectionnés dans une base de sujets de devoirs et d'examens blancs. Les énoncés couvrent l'intégralité du programme d'*Analyse I* : limites et continuité, dérivabilité et théorème des accroissements finis, fonctions réciproques, fonction Arctan, suites numériques et primitives.

Les exercices sont regroupés en **sept parties thématiques**, de difficulté croissante à l'intérieur de chaque partie. Les trois dernières parties proposent des problèmes longs, de structure identique à celle des épreuves de l'examen national.

La plus grande partie des exercices de ce polycopié a été extraite des anciens devoirs surveillés du professeur **Abdellah Belkhatir** الأستاذ عبد الله بالخير , que nous remercions vivement.

Table des matières **الفهرس**

I	Limites, continuité et étude de fonctions Exercices 1 à 6	النهايات والاتصال ودراسة الدوال
II	Théorème des accroissements finis et théorème de Rolle Exercices 7 à 10	مبرهنة التزايدات المنتهية ومبرهنة رول
III	Fonctions réciproques Exercices 11 à 15	الدوال العكسية
IV	La fonction Arctangente Exercices 16 à 19	دالة القوس ظل
V	Suites numériques Exercices 20 à 25	التاليات العددية
VI	Primitives et fonctions définies par une primitive Exercices 26 à 28	الدوال الأصلية
VII	Problèmes de synthèse Exercices 29 et 30	مسائل تركيبية

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تقديم المطبوع

يضمّ هذا المطبوع ثلاثين تمريناً ومسألة في التحليل، انتُخبت من مجموعة من الفروض المحروسة والفروض المنثلية والامتحانات التجريبية، وهي موجهة لتلاميذ السنة الثانية من سلك البكالوريا، شعبة العلوم الرياضية.

تغطّي هذه التمارين مقرّر التحليل الأول كاملاً: النهايات والاتصال، الاشتقاق ومبرهنة التزايد المتتمة، الدوال العكسية، دالة القوس ظل، المتتاليات العددية، ثم الدوال الأصلية.

رُتبت التمارين في سبعة محاور، مع تدرّج في الصعوبة داخل كلّ محور. أمّا المحاور الثلاثة الأخيرة فتضمّن مسائل مركّبة تشبه في بنيتها مسائل الامتحان الوطني.

استُخرج الجزء الأكبر من تمارين هذا المطبوع من الفروض المحروسة السابقة للأستاذ عبد الله باخثير، فله مآ جزيل الشكر والتقدير.

إرشادات للاستعمال

حاول حلّ كلّ تمرين دون النظر إلى الإرشادات لمئة عشرين دقيقة على الأقلّ. احرص على تحرير الحلّ كاملاً، فنقطة الامتحان تقيس الدقّة والصرامة كما تقيس النتيجة. لا ترجع إلى الإرشادات الملونة إلّا عند الضرورة القصوى.

شكر وتقدير

يتقدم مُعدّ هذا الطبوع بأصدق عبارات الشكر والتقدير إلى الأستاذ الفاضل عبد الله بلخاتير، الذي استخرج الجزء الأكبر من تمارين هذا العمل من فروض المحروسة السابقة، فجزاه الله خيراً على جهده في خدمة الرياضيات وتلاميذها.

Remerciements

L'auteur adresse ses plus sincères remerciements au professeur **Abdellah Belkhatir**, dont les anciens devoirs surveillés ont fourni la plus grande partie des exercices réunis ici, et le remercie chaleureusement pour son dévouement constant au service de l'enseignement des mathématiques.

إعداد الأستاذ سعد شكري
وفقكم الله

LIMITES, CONTINUITÉ ET ÉTUDE DE FONCTIONS

EXERCICE 1

Encadrement • Dérivabilité en un point

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \quad \text{si } x \neq 0.$$

(1) (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); \cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

(b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}); \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

(2) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

(3) Soit F une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$F(0) = 0 \quad \text{et} \quad (\forall x \in \mathbb{R}); F'(x) = f(x).$$

Montrer que F est impaire.

EXERCICE 2

Racines • Fonction réciproque

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$.

(1) (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(2) (a) f est-elle dérivable à droite en 0 ? Interpréter géométriquement le résultat.

(b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f'(x) = \frac{3\sqrt[3]{x} - 2}{6\sqrt[6]{x^4}}$.

(c) Dresser le tableau de variations complet de f .

(3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = \left[\frac{64}{729}; +\infty\right[$.

(a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J = \left[\frac{-4}{27}; +\infty\right[$.

(b) Montrer que : $(\forall x \in J); g^{-1}(x) > x^2$. Puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{x}$.

EXERCICE 3

Asymptote oblique • Symétrie • Discussion graphique

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{1 - \frac{2}{x}} & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

- (1) (a) Déterminer D_f .
 (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (2) (a) Montrer que f est continue à gauche en $x_0 = 0$.
 (b) Étudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 0$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
 (c) Étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 2$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- (3) (a) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $] -\infty; 0[$ et $]2; +\infty[$ et que :

$$(\forall x \in] -\infty; 0[\cup]2; +\infty[); \quad f'(x) = \frac{x-1}{x\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}.$$

- (b) Dresser le tableau de variations de f en justifiant la réponse.
- (4) (a) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$ une asymptote oblique (Δ) d'équation $y = x - 1$.
 (b) Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ) .
- (5) (a) Construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 (b) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ est symétrique par rapport au point $\Omega(1; 0)$.
 (c) Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $(E) : f(x) = mx - 1$.
- (6) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [2; +\infty[$.
 (a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J = [0; +\infty[$.
 (b) Construire la courbe $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 4

Branche parabolique • Racine cubique

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x}$.

- (1) (a) Déterminer D_f puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 (b) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y = x$.
- (2) (a) Étudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 1$ puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

(b) Montrer que f est dérivable sur $] - \infty; 1[$ et que :

$$(\forall x \in] - \infty; 1[); \quad f'(x) = \frac{1 + \sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} \cdot (\sqrt[3]{1-x} - 1).$$

(c) Dresser le tableau de variations complet de f en justifiant la réponse.

(3) (a) Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe (Ox) .

(b) Construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =] - \infty; 0]$.

(a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J =] - \infty; 2]$.

(b) Construire la courbe $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(c) Montrer que g^{-1} est dérivable en $x_0 = 0$ et préciser $(g^{-1})'(0)$.

EXERCICE 5

Étude complète • Suite récurrente • Somme télescopique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 3 - \sqrt{x^2 + 5}$.

(1) Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, puis interpréter géométriquement ce résultat.

(2) (a) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

(b) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique (Δ) d'équation $y = 2x + 3$.

(3) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe (Ox) en un seul point que l'on déterminera.

(4) (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5} - x}{\sqrt{x^2 + 5}}$.

(b) En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations complet.

(c) Écrire l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $x_0 = \frac{-2}{3}$.

(5) (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) - x = \frac{4 - x^2}{3 + \sqrt{x^2 + 5}}$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$, puis étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite $(D) : y = x$.

(6) Construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(7) (a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

(b) Montrer que f^{-1} est dérivable en $x_0 = 0$ et préciser $(f^{-1})'(0)$.

(c) Construire $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(8) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n < 2$.

(b) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis en déduire qu'elle est convergente.

(c) Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en justifiant soigneusement la réponse.

(9) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = 3n - \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{u_k^2 + 5}$.

- Exprimer S_n en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

EXERCICE 6

Théorème des valeurs intermédiaires • Équations paramétrées

(1) On considère l'équation $(F_1) : x^3 - 3\lambda^2 x + 2 = 0$, où $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$.

- Discuter, suivant les valeurs de λ , le nombre de solutions de l'équation (F_1) dans l'intervalle $]0; 2\lambda[$.

(2) On considère l'équation $(F_2) : x^3 - 3\lambda x^2 - 3x + \lambda = 0$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel λ , le nombre de solutions de l'équation (F_2) dans l'intervalle $]0; 1[$.

Indication. Étudier dans chaque cas les variations du polynôme sur l'intervalle considéré, puis appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à chaque intervalle de monotonie.

THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS ET THÉORÈME DE ROLLE



EXERCICE 7

Vrai ou faux • Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction dérivable et strictement croissante sur $[-1; 2]$ vérifiant :

$$(\forall x \in]-1; 2[); \quad f'(x) \leq \frac{1}{2}.$$

- Répondre par **vrai** ou **faux** en justifiant :

(i) $(\exists \alpha \in]-1; 2[); 3f'(\alpha) - f(2) + f(1) = 0$.

(ii) f^{-1} est dérivable en $\beta = f(\alpha)$ et $(f^{-1})'(\beta) = \frac{3}{f(2) - f(-1)}$.

(iii) $(\forall x \in [-1; 2]); |f(x) - f(0)| \leq \frac{1}{2}|x|$.

(iv) On suppose de plus que $f(-1) = 0$ et $f(2) = 1$; alors l'équation $(E) : f(x) = x$ admet une solution unique $\lambda \in]-1; 2[$.

EXERCICE 8

Suites adjacentes • T.A.F. appliqué à Arctan

On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$a_n = \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k^2} \right) - \arctan(n+1) \quad \text{et} \quad b_n = \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k^2} \right) - \arctan(n).$$

(1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\arctan(k+1) - \arctan(k) < \frac{1}{1+k^2} < \arctan(k) - \arctan(k-1).$$

(2) Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

EXERCICE 9

T.A.F. • Asymptote oblique • Primitive

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si } x \neq 0.$$

(1) (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(b) Justifier que f est impaire.

(2) f est-elle dérivable en 0 ? Interpréter graphiquement le résultat.

(3) (a) Soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction g définie par $g(t) = \arctan(\sqrt{t}) - \sqrt{t}$, montrer que :

$$\left(\exists c \in \left] 0; \frac{1}{x^2} \right[\right); \quad f(x) - x = \frac{-\sqrt{c}}{2(1+c)}.$$

(b) En déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique (Δ) d'équation $y = x$.

(c) Justifier que $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de (Δ) sur $]0; +\infty[$.

(4) (a) Montrer que : $(\forall t \in]0; +\infty[); \arctan(t) - \frac{t}{1+t^2} > 0$.

(b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$, puis en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

(5) Construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(6) (a) Justifier que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Construire le graphe $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(7) Soit F une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $F(0) = 0$ et $(\forall x \in \mathbb{R}); F'(x) = f(x)$.

(a) Montrer que F est paire.

(b) Prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

(c) Dresser le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}$ en justifiant la réponse.

Indication. Pour la question 7)b), on pourra utiliser le résultat suivant : si une fonction V est croissante et majorée sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = L$, où $L \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 10

Théorème de Rolle · Encadrement de Arctan

Partie I

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x) = (\arctan(x))^2 - \frac{x^2}{1+x^2}.$$

(1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); g'(x) = \frac{2}{1+x^2} \times \left(\arctan(x) - \frac{x}{1+x^2} \right)$.

(2) (a) Soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$. En appliquant le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $c \in]0; x[$ telle que :

$$\frac{x - \arctan(x)}{x^2 \arctan(x)} = \frac{c}{c + 2(1+c^2) \arctan(c)}.$$

(b) En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \arctan(x)}{x^2 \arctan(x)} = \frac{1}{3}$.

(3) (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); \frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x$.

(b) En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); g(x) > 0$. Puis calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \arctan(x)}{x \arctan(x)}$.

Partie II

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1}{\arctan(x)} - \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0.$$

(1) (a) Justifier que f est impaire.

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Puis interpréter graphiquement le résultat.

(2) f est-elle dérivable en 0 ? Interpréter le résultat graphiquement.

(3) (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f'(x) = \frac{g(x)}{(x \arctan(x))^2}$.

(b) Dresser le tableau de variations complet de f en justifiant la réponse.

(4) Construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en précisant la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.

(5) (a) Justifier que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

(b) Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et préciser $(f^{-1})'(0)$.

FONCTIONS RÉCIPROQUES



RAPPEL DE COURS

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f réalise une bijection de I vers $J = f(I)$. De plus, si f est dérivable en $x_0 \in I$ et $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

EXERCICE 11

Réciproque d'une fonction trigonométrique • Encadrement

Soit f la fonction définie sur $I = \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ par : $f(x) = 1 + 3 \cos^2(x)$.

- (1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
- (2) (a) Justifier que f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]1; 4[$ et que :

$$(\forall x \in]1; 4[); \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x^2 + 5x - 4}}.$$

(b) Montrer que : $\left(\forall x \in \left]\frac{7}{4}; \frac{13}{4}\right[\right); \quad \frac{1}{3} < (f^{-1})'(x) < \frac{2}{3}$.

- (3) (a) Calculer $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

(b) Montrer que l'équation $f^{-1}(x) = x$ admet une seule solution α dans $\left]\frac{7}{4}; \frac{13}{4}\right[$.

- (4) Montrer que : $\left(\forall x \in \left]\alpha; \frac{13}{4}\right[\right); \quad \frac{1}{3}(x + 2\alpha) < f^{-1}(x) < \frac{2}{3}(2x + \alpha)$.

EXERCICE 12

Réciproque de $x \mapsto 1/\cos x$

Soit f la fonction définie sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

- (1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
- (2) Justifier que pour tout $x \in J$, on a :

$$\cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

- (3) Montrer que f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]1; +\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]1; +\infty[); \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

EXERCICE 13

Fonction arccos • Formule de triplcation

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; \pi]$ par : $f(x) = \cos x$.

- (1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} et déterminer $D_{f^{-1}}$.
- (2) On considère la fonction φ définie par : $\varphi(x) = f^{-1}(4x^3 - 3x)$.
 - (a) Déterminer D_φ (l'ensemble de définition de φ).
 - (b) Montrer que : $\left(\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\right); \varphi(x) = 2\pi - 3f^{-1}(x)$.
 - (c) Exprimer $\varphi(x)$ en fonction de $f^{-1}(x)$ sur chacun des intervalles $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Indication. On pourra utiliser la formule trigonométrique : $\cos(3\alpha) = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$.

EXERCICE 14

Prolongement par continuité • Réciproque explicite

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{x}-1}\right)$.

- (1) (a) Déterminer D_f , puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 (b) Montrer que f est continue sur chaque intervalle inclus dans D_f .
 (c) La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en $x_0 = 1$? Justifier la réponse.
- (2) Pour tout x de D_f , on pose : $u(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$.
 - Étudier les variations de la fonction u sur D_f , puis en déduire les variations de f sur D_f .
- (3) Soit φ la restriction de la fonction f à l'intervalle $I = [0; 1[$.
 - (a) Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
 - (b) Calculer $\varphi^{-1}(x)$ pour tout x de J .

EXERCICE 15

Réciproque • T.A.F. • Moyenne de Cesàro

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

- (1) (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}$.
 (b) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]0; +\infty[$.
- (2) Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on pose : $g(x) = x \cdot f^{-1}(x)$.
 - (a) Montrer que g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que : $(\forall x \in]0; +\infty[); g'(x) = x$.

(b) Déterminer $g(x)$ en fonction de x pour tout $x \in]0; +\infty[$.

(c) En déduire que : $(\forall x \in]0; +\infty[); f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right)$.

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f'(k)$.

(a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) \leq f(x+1) - f(x) \leq f'(x+1)$.

(b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{f(n)}{n+1} \leq S_n \leq \frac{f(n+1) - 1}{n+1}$.

(c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ en justifiant la réponse.

LA FONCTION ARCTANGENTE

IV

EXERCICE 16

Bijection • Formule de $\tan(3\alpha)$

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = \left] -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3} \right[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x}{3x^2 - 1}.$$

(1) Montrer que f est une bijection de l'intervalle I vers un intervalle J que l'on déterminera.

(2) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

Indication. On pourra utiliser la formule trigonométrique : $\tan(3\alpha) = \frac{\tan^3 \alpha - 3 \tan \alpha}{3 \tan^2 \alpha - 1}$.

EXERCICE 17

Changement de variable $t = \text{Arctan } x$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(\sqrt{1+x^2} + x \right) \text{Arctan} \left(\sqrt{1+x^2} - x \right).$$

(1) Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(3) On pose $t = \text{Arctan}(x)$. Montrer que :

$$f(x) = \frac{\pi - 2t}{4 \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)}.$$

Indication. On pourra écrire f sous la forme d'une composée de deux fonctions continues, puis vérifier que $\sqrt{1+x^2} - x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)$.

EXERCICE 18

Équation faisant intervenir Arctan

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(G) : \quad \text{Arctan}(x-1) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{19}{8}\right).$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \text{Arctan}(x-1) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

- (1) Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (2) La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 0 ? Justifier la réponse.
- (3) Déterminer $f(]0; +\infty[)$ et $f(]-\infty; 0])$.
- (4) (a) Montrer que l'équation (G) admet une solution unique appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$.
(b) Déterminer la solution de l'équation (G).

EXERCICE 19

Famille de fonctions • Bijections • Suite implicite

On considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = 2 \text{Arctan}\left(\frac{x^n}{1 + \sqrt{1 + x^{2n}}}\right).$$

Partie I

- (1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); \exists! \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[; \tan \alpha = x^n$.
- (2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); f_n(x) = \text{Arctan}(x^n)$.
- (3) Montrer que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- (4) On pose $g_n(x) = f_n(x) + x - 1$.
(a) Montrer que g_n est une bijection de $]0; 1[$ vers un intervalle à déterminer.
(b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 1 - x$ admet une unique solution a_n dans $]0; 1[$.

(c) Montrer que $(\forall x \in]0; 1[); g_{n+1}(x) < g_n(x)$, puis comparer a_{n+1} et a_n .

Partie II

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + f_1(x)$.

- (1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
- (2) Montrer que f^{-1} est impaire et que $f(a_1) = 1$.
- (3) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); \exists ! u_x \in \mathbb{R} ; u_x + \text{Arctan}(u_x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
- (4) On considère la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = u_x$.
 - (a) Montrer que g est impaire et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = a_1$.
 - (b) Étudier la monotonie et la continuité de g sur $\mathbb{R}$, et en déduire que g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à déterminer.

SUITES NUMÉRIQUES



EXERCICE 20

Suites adjacentes • Série alternée de Leibniz

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

On désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$.

- (1) (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
 (b) Que peut-on conclure sur $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- (2) (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); f'_n(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{x^2+1}$.
 (b) En déduire que : $(\forall x \in [0; +\infty[); f_{2n+1}(x) \leq \text{Arctan}(x) \leq f_{2n}(x)$.
- (3) Déterminer, en justifiant la réponse, la limite commune de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

EXERCICE 21

Suite implicite définie par une équation polynomiale

Soit $n \geq 3$ un entier naturel. On désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = x^n + x^2 + 2x - 1.$$

- (1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution strictement positive que l'on notera a_n .
- (2) (a) Montrer que : $(\forall n \geq 3); 0 < a_n < \frac{1}{2}$.
 (b) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est croissante, puis en déduire qu'elle converge vers un réel L dont on donnera un encadrement.
- (3) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^n = 0$. Puis déterminer la valeur de L .

EXERCICE 22

Suite contractante • Moyenne arithmétique

Partie I

Soit f la fonction définie sur $I = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ par : $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

- (1) Montrer que : $f(I) \subset I$.
- (2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans I que l'on déterminera.
- (3) Montrer que : $(\forall x \in I); |f(x) - \alpha| \leq \frac{4}{9} |x - \alpha|$.

Partie II

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n).$$

- (1) Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas monotone.
- (2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in I$.
- (3) (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9} |u_n - \alpha|$.
 (b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$. Puis justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente en précisant sa limite.
- (4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.
 • Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); |S_n - \alpha| \leq \frac{9}{5n}$. Puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

EXERCICE 23**Deux suites implicites • Inégalité de Bernoulli**

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = x^n - nx + 1, \quad \text{où } n \geq 3 \text{ est un entier naturel.}$$

- (1) (a) Dresser le tableau de variations de f_n sur $\mathbb{R}^+$.
 (b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède exactement deux solutions a_n et b_n telles que : $0 < a_n < 1 < b_n$.
- (2) (a) Montrer que : $(\forall x \in]0; 1[); f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
 (b) Justifier que la suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est strictement décroissante. Puis en déduire qu'elle est convergente.
 (c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^n = 0$. Puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n$.
- (3) (a) Montrer que : $(\forall n \geq 3); f_n\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) > 0$.
 (b) En déduire que la suite $(b_n)_{n \geq 3}$ est convergente en précisant sa limite.
 (c) Calculer, en justifiant la réponse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n} \cdot (b_n - 1)$.

Indication. Pour la question 3a), on pourra utiliser l'inégalité de Bernoulli : si $a \in \mathbb{R}^{*+}$, alors $(\forall n \geq 3); (1 + a)^n > 1 + na$.

EXERCICE 24**Symétrie centrale • Points fixes • Suite récurrente****Partie I**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}.$$

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 4 cm).

- (1) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ est symétrique par rapport au point $\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
 (2) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
 (3) Montrer que f est strictement croissante sur $[0; 1]$, puis dresser son tableau de variations.
 (4) Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[0; 1]$, puis construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Partie II

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [0; 1] \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- (1) Vérifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
- (2) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante si et seulement si $u_0 \in \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$.
- (3) On suppose que $u_0 \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis en déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.
- (4) On suppose que $u_0 \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 25

Étude complète • Suite contractante • Somme de Cesàro

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = 2 \arctan(\sqrt{x}) - x.$$

- (1) (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
(b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- (2) (a) Étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
(b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); \quad f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)\sqrt{x}}, \quad \text{où } g(x) = 1 - \sqrt{x} - x\sqrt{x}.$$
- (c) Dresser le tableau de variations de f en justifiant la réponse.
- (3) (a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + \pi$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
(b) Déterminer la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D) .
- (4) Construire $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne $\alpha \approx 0,45$ et $f(\alpha) \approx 0,73$, où α désigne la solution de $g(x) = 0$.
- (5) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution β dans $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$.

Partie II

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n).$$

- (1) Montrer que : $\left(\forall x \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[\right); |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
- (2) (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$.
- (b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{2} |u_n - \beta|$. Puis en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente en précisant sa limite.
- (3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$.
- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); |S_n - \beta| \leq \frac{2}{n+1} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)$. Puis en déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente en précisant sa limite.

PRIMITIVES ET FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE PRIMITIVE

VI

EXERCICE 26

Primitive • Équation fonctionnelle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par : $f(x) = \frac{x-1}{x}$. On désigne par F la primitive de f sur $\mathbb{R}^{*+}$ qui vérifie : $F(1) = 1$.

- (1) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(\sqrt{x+1}) - F(\sqrt{x})] = 0$.
- (2) Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par : $G(x) = x - F(x)$.
- (a) Montrer que : $(\forall x \in [1; +\infty[); 0 \leq G(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x} - 1$.
- (b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); G(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} G(x)$. Puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x}$.

EXERCICE 27

Primitive d'une fonction sans expression explicite • T.A.F.

Partie I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}.$$

- (1) Dresser le tableau de variations complet de f .
- (2) Justifier que f admet sur $\mathbb{R}$ une primitive unique F vérifiant : $F(0) = 0$.

- (3) Montrer que F est impaire.

Partie II

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = F(2x) - F(x)$.

- (1) Étudier la parité de G .
- (2) (a) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $G'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- (b) En déduire la monotonie de G sur chacun des intervalles $\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right]$.
- (3) (a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{++}); \quad \frac{x}{\sqrt{16x^4 + 4x^2 + 1}} < G(x) < \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$$

- (b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$. Puis interpréter géométriquement le résultat.

- (4) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{++}); G(x) < x$ et $G\left(\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right) \subset \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.
- (5) Construire $(\mathcal{C}_G)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (en précisant la tangente (T) au point d'abscisse $\frac{\sqrt{2}}{2}$). On donne $G\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 0,4$.

Partie III

Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$V_0 \in \left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}); V_{n+1} = G(V_n).$$

- (1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < V_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- (2) Étudier la monotonie de $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis en déduire qu'elle est convergente.
- (3) Déterminer, en justifiant la réponse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

EXERCICE 28

Détermination d'une primitive par changement de variable

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x+1}.$$

- (1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- (2) (a) f est-elle dérivable à droite en 0 ? Interpréter le résultat graphiquement.
 (b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x}(x+1)^2}$. Puis dresser le tableau de variations complet de f .
- (3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [1; +\infty[$.
 (a) Montrer que g est une bijection de I vers un intervalle J qu'on déterminera.
 (b) Exprimer $g^{-1}(x)$ en fonction de x , pour tout $x \in J$.

Partie II

Soit F une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$F(0) = 0 \quad \text{et} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^+); F'(x) = f(x).$$

On considère la fonction G définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par : $G(x) = F(\tan^2(x))$.

- (1) (a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et que : $(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]); G'(x) = 4 \tan^2(x)$.
 (b) En déduire que : $(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]); G(x) = 4 \tan(x) - 4x$.
 (c) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); F(x) = 4\sqrt{x} - 4 \arctan(\sqrt{x})$.
- (2) (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$.
 (b) En déduire la nature de la branche infinie de $(\mathcal{C}_F)$ au voisinage de $+\infty$.
- (3) Dresser le tableau de variations complet de F en justifiant la réponse.
- (4) Étudier la concavité de $(\mathcal{C}_F)$ et préciser les coordonnées de son point d'inflexion.
- (5) Construire soigneusement $(\mathcal{C}_F)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

VII

EXERCICE 29

Problème complet • Étude, T.A.F., suites implicites

Partie I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}.$$

- (1) (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
 (b) Quelle est la nature de la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$?

- (2) (a) f est-elle dérivable à droite en 0 ? Interpréter le résultat géométriquement.
 (b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); f'(x) = \frac{1 - 2\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}$.
 (c) Dresser le tableau de variations complet de f en justifiant la réponse.
- (3) Étudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ en précisant son point d'inflexion.
- (4) Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $f(x) = x$, puis étudier le signe de $f(x) - x$.
- (5) On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $I = \left[\frac{1}{8}; +\infty\right[$.
 (a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
 (b) Montrer que g^{-1} est dérivable en 0 et calculer $(g^{-1})'(0)$.
 (c) Déterminer $g^{-1}(x)$ en fonction de x , pour tout $x \in J$.
 (d) Construire $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie II

On considère la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad V_n = \sum_{k=1}^n f'(k).$$

- (1) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*); f'(k) < f(k+1) - f(k) < f'(k+1)$.
- (2) En déduire que : $(\forall n \geq 2); f(n) - \frac{1}{3} < V_n < f(n+1)$.
- (3) Déterminer, en justifiant la réponse, les deux limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_n}{n}$.

Partie III

Soit $n \geq 5$ un entier naturel. On considère dans $\mathbb{R}^+$ l'équation suivante : $(E_n) : f(x) = \frac{1}{n}$.

- (1) Montrer que (E_n) admet exactement deux solutions a_n et b_n telles que :

$$0 < a_n < \frac{1}{8} < b_n < 1.$$

- (2) (a) Étudier la monotonie de $(a_n)_{n \geq 5}$, puis en déduire qu'elle est convergente.
 (b) Déterminer, en justifiant la réponse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 a_n$.
- (3) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - b_n) = 3$.

EXERCICE 30

Problème complet • Méthode de Newton

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{2x}{x + \operatorname{Arctan}(x)} \quad \text{si } x > 0.$$

- (1) (a) Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
 (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat.
- (2) (a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $x - \frac{1}{3}x^3 \leq \operatorname{Arctan}(x) \leq x$.
 (b) En déduire que f est dérivable à droite en 0, et préciser $f'_d(0)$.
- (3) (a) Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = \frac{2 \left(\operatorname{Arctan}(x) - \frac{x}{x^2 + 1} \right)}{(x + \operatorname{Arctan}(x))^2}$.
 (b) En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[); \operatorname{Arctan}(x) - \frac{x}{x^2 + 1} > 0$. Puis en déduire que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
- (4) (a) Soit $x > 0$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à $g(x) = 0$, où g est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = x - 2 + \operatorname{Arctan}(x)$.
 (b) Montrer que g est une bijection de $[0; +\infty[$ vers $[-2; +\infty[$, puis en déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$ telle que $1 < \alpha < 2$.
 (c) Montrer que g' est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
 (d) Soit $x \in [1; \alpha[$. Montrer que : $x - \frac{g(x)}{g'(x)} < \alpha$.
- (5) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)}.$$

- (a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n < \alpha$.
 (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.
 (c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ en justifiant la réponse.

Indication. Pour la question 4)d), on appliquera le théorème des accroissements finis à g sur l'intervalle $[x; \alpha]$, puis on utilisera la décroissance de g' .

FIN DU POLYCOPIÉ I

Prof. Saad Choukri

© 2026 — Tous droits réservés