$$\exp(x) \simeq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Premiers pas vers les mathématiques supérieures

Mathématiques pour les excellents de la classe terminale

$$aTb = a * \epsilon * b$$

+222 Exercices recouvrant le programme de la terminale

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$x^2y'' + xy' + y = 0$$

$$\frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\sin\widehat{C}} = \frac{\|\overrightarrow{BC}\|}{\sin\widehat{A}} = \frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\sin\widehat{B}}$$

Saad CHOUKRI

PREMIERS PAS VERS LES MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

Exercices recouvrant tout le programme marocain de la terminale sciences mathématiques

SAAD CHOUKRI

Envoyez vos remarques, corrections et propositions d'améliorations, etc à l'adresse saadchoukri00@gmail.com

Introduction

Ce livre est le fruit d'années de travail sérieux, il vient dans le contexte d'aider les excellents élèves de la terminale à découvrir des exercices loin de ce qui est habitué. En effet, le contenu de ce livre mets en place des exercices classiques, parfois originaux tout en respectant le programme marocain de la classe terminale sciences mathématiques.

Cet ouvrage est également un cadeau pour tous les élèves et les enseignants du lycée qui sont curieux, il est destiné principalement aux élèves souhaitant poursuivre un programme post-bac à densité mathématique (les classes de mathématiques supérieures et la branche mathématique de l'université).

Avant de commencer le travail sur les exercices d'un chapitre de ce livre, il est strictement conseillé d'avoir maîtrisé le cours correspondant. En effet, la majorité des exercices donnés ne constituent pas des exercices de compréhension ou d'assimilation, ils demandent plutôt un effort et une recherche non évidente.

Je tiens à remercier tous les gens qui m'ont aidé à accomplir ce travail, Younes Chbihi pour la création de la couverture du livre ainsi que la mise en page actuelle du contenu, Zakaria Jammaa pour la reclecture de certains chapitres, Issam El Kadiri à qui je dois un exercice de sa création et une élégante solution, ainsi que mes amis dans l'association Math&Maroc, Saad Ait Khouya, Mamoun Benchekroun, Youssef Kaichouh, Ilias Ftouhi, Mouad Moutaoukil, Omar El Housni, Amine Bennouna, Omar El Hadri, Mohamed El Alami et Amine Natik.

Finalement, je serais reconnaissant à ceux de mes lecteurs qui me feront parvenir leurs remarques, propositions d'améliorations et corrections, etc. Contactez moi à l'adresse suivante `saadchoukri00@gmail.com`

Saad Choukri

Table des matières

1 LIMITES ET CONTINUITÉ 5

2 LIMITE D'UNE SUITE 15

3 FONCTIONS USUELLES ET DÉRIVATION 31

4 NOMBRES COMPLEXES 41

5 LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES 54

6 DÉRIVABILITÉ, THÉOREME DE ROLLE ET ACCROISSEMENTS FINIS 58

7 LOI DE COMPOSITION INTERNE 63

8 STRUCTURE DE GROUPE 69

9 STRUCTURE D'ANNEAU, CORPS 75

10 CALCUL INTÉGRAL DES FONCTIONS CONTINUES 77

11 MATRICES 84

12 GÉNÉRALITÉS SUR LES ESPACES VECTORIELS 88

13 GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES 93

14 ARITHMÉTIQUE DES ENTIERS 96

15 PROBABILITÉS DISCRÉTES 101

16 EXERCICES DE THÈMES VARIÉS 104

CHAPITRE 1

LIMITES ET CONTINUITÉ

Exercice 1. Soient f et g deux fonctions continues numériques sur un segment $[a, b]$ où a et b deux nombres réels avec $a < b$. Supposons que $f > g > 0$, montrer qu'il existe une constante $\lambda > 1$ telle que $f \geq \lambda g$.

Solution.

Les fonctions f et g étant continues. La fonction h définie sur le segment $[a, b]$ par $h(x) = f(x)/g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ est continue ; de plus cette fonction est à valeurs > 1. La fonction h admet donc un minimum λ sur le segment $[a, b]$, et ce minimum est atteint pour un certain $c \in [a, b]$ par la fonction h. Donc $\lambda = h(c) > 1$ et de plus $h(x) \geq \lambda$ pour tout réel $x \in [a, b]$. Donc $f(x) \geq \lambda g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ où λ est une constante > 1.

Exercice 2 (limites et périodicité).
1/ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
2/ On considère une fonction continue périodique admettant une limite en $+\infty$. Que peut-on dire de cette fonction ?
3/ Montrer que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.
4/ Justifier pourquoi la fonction cosinus n'est pas une fonction polynômiale.

Solution.

1/ Soit $T > 0$ une période de la fonction f. Puisque la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est en particulier continue sur $[0, T]$, donc l'image du segment $[0, T]$ par la fonction f est un segment $[m, M]$. On va montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \in [m, M]$. En effet il suffit de remarquer que

$$f(\mathbb{R}) = f\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [nT, (n+1)T]\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f([nT, (n+1)T]) = [m, M]$$

Puisque $f([nT, (n+1)T] = f([0, T])$ pour tout entier n (car la fonction f est T-périodique). Donc pour tout réel x, on a $m \leq f(x) \leq M$. Autrement dit, la fonction f est bornée.
2/ Soit T une période de f. La fonction f étant continue et périodique, d'après la question précédente, elle est bornée. Par conséquent, si f admet une limite en $+\infty$, alors celle-ci est finie. Appelons cette limite l. Fixons x un réel et soit $\epsilon > 0$, on a l'existence de $A > 0$ telle que pour tout $x \geq A$ on a $|f(x) - l| < \epsilon$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$x + n_0T \geq A$ et puisque $f(x) = f(x + n_0T)$, alors pour tout $\epsilon > 0$ on a $|f(x) - l| < \epsilon$ et en faisant tendre ϵ vers 0^+ on obtient $f(x) = l$ et ceci pour tout réel x. Finalement, la fonction f est constante.
3/ La fonction sinus étant non constante, continue, périodique et non bornée, alors d'après la de la question précédente la fonction sinus ne peut pas admettre une limite en $+\infty$.
4/ La fonction cosinus n'admet pas de limite en $+\infty$ pour les mêmes raisons évoquées dans la question précédente. Pourtant toute fonction polynomiale admet une limite en $+\infty$, donc la fonction cosinus n'est pas une fonction polynômiale.

Exercice 3 (Une caractérisation de l'injectivité d'une fonction continue).
Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs réels continue. Montrer que si f est injective, alors f est strictement monotone.

Solution.

Par absurde, on suppose que la fonction f n'est pas strictement monotone, l'injectivité de f implique qu'il existe des réels a, b et c tels que $a < b < c$ et les deux réels $f(c) - f(b)$ et $f(b) - f(a)$ ont des signes différents, autrement dit $(f(c) - f(b))(f(b) - f(a)) < 0$. On considère la fonction h définie sur $[0, 1]$ par

$$h(t) = (f(c) - f(b))[f((1 - t)b + tc) - f((1 - t)a + tb)]$$

La fonction h est continue sur $[0, 1]$ (par opérations), et de plus $h(0) \times h(1) < 0$ et alors par le théorème des valeurs intermédiaires, h s'annule et par conséquent il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que

$$f(\underbrace{(1 - \alpha)b + \alpha c}_{\alpha_0}) = f(\underbrace{(1 - \alpha)a + \alpha b}_{\beta_0})$$

Mais on a $\alpha_0 \neq \beta_0$ (facile à vérifier). Ceci contredit l'injectivité de la fonction f. En conclusion, toute fonction continue sur un intervalle et injective est strictement monotone.

➽ Ce résultat est d'une importance capitale, en effet il permet de caractériser l'injectivité d'une fonction continue sur un intervalle.

Exercice 4. Soit f une fonction à valeurs réelle continue sur le segment $[a, b]$ et soient $x_1, x_2, ..., x_n \in [a, b]$ et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \geq 0$ tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n)$$

Solution.

On propose deux méthodes pour résoudre cet exercice.
Première méthode. La fonction f étant continue sur le segment $[a, b]$, l'image de celui ci par f est également un segment $[m, M]$. On sait que pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$ on a $m \leq f(x_i) \leq M$, les α_i étant tous positifs, alors $\alpha_i m \leq \alpha_i f(x_i) \leq \alpha_i M$ pour tout i, et en sommant sur les $i \in \{1, 2, ..., n\}$ on obtient

$$m \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n) \leq M$$

puisque la somme des α_i vaut 1. Finalement, on a prouvé que $\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n) \in f([a, b])$. Autrement dit, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n)$$

Seconde méthode. On considère la fonction h définie sur $[a,b]$ par

$$h(x)=f(x)-\alpha_1 f(x_1)-\alpha_2 f(x_2)-\ldots-\alpha_n f(x_n)$$

Il s'agit de prouver que la fonction h s'annule. Notons p l'indice $\in\{1,2,\ldots,n\}$ tel que $f(x_p)=\min\limits_{1\le i\le n} f(x_i)$ et q l'indice $\in\{1,2,\ldots,n\}$ tel que $f(x_q)=\max\limits_{1\le i\le n} f(x_i)$. Il est facile de vérifier que $h(x_p)\le 0\le h(x_q)$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel c compris entre x_p et x_q tel que la fonction h s'annule en c, et le résultat découle d'une manière immédiate.

➽ Le théorème utilisé dans la première méthode est un théorème très puissant, il permet de résoudre plusieurs situations compliquées.
➽ En posant pour tout i, $\alpha_i=1/n$ on retrouve un résultat intéressant ; la moyenne arithmétique des $f(x_i)$ admet un antécédent par la fonction f.

Exercice 5. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(\sin x)}{x^n}=0$$

Solution.

Il suffit de remarquer que $f\circ\sin$ est bornée sur $\mathbb{R}$ comme composée d'une fonction continue et d'une fonction bornée, donc il existe une constante $K>0$ telle que pour tout $x>0$,

$$\left|\frac{f(\sin x)}{x^n}\right|\le\frac{K}{x^n}$$

Le terme de droite tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et le résultat découle immédiatement.

Exercice 6. Soit f une fonction numérique vérifiant pour tous réels x,y la propriété

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

On suppose que la fonction f est continue à gauche en zéro. Prouver que f est continue partout sur $\mathbb{R}$.

Solution.

Pour $x=y=0$, on obtient $f(0)=0$. En substituant y par $-x$ et en gardant x libre, on trouve $0=f(0)=f(x)+f(-x)$, par conséquent $f(-x)=-f(x)$ pour tout réel x. Commençons par montrer que la fonction f est continue en 0. Il suffit de montrer que f est continue à droite en 0. On a

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{t\to 0^-}f(-t)=\lim_{t\to 0^-}-f(t)=-\lim_{t\to 0^-}f(t)=-f(0)=0=f(0)$$

Donc f est continue à droite en zéro. Par conséquent, f est continue en zéro. Fixons maintenant $x_0\in\mathbb{R}$, il s'agit de montrer que f est continue en x_0, c'est à dire $\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)$ et ceci est immédiat, puisque pour tout h réel, on a $f(x_0+h)=f(x_0)+f(h)$ et la continuité de f en 0 fournit $\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)$. En conclusion, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique vérifiant $g \circ g = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Montrer que la fonction g ne peut pas être continue sur $\mathbb{R}$.

Solution.

Par l'absurde, supposons que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$. On remarque que la fonction g est injective. En effet, soient x et y deux nombres réels tels que $g(x) = g(y)$, ceci donne $g \circ g(x) = g \circ g(y)$ et alors $-x = -y$ et donc $x = y$. Finalement, la fonction g est injective. Puisque la fonction g est supposée continue alors d'après le résultat de l'exercice 3, la fonction g est strictement monotone, et alors la fonction $g \circ g$ est strictement croissante comme composée de deux fonctions strictement monotones de même monotonie, mais $g \circ g = -\mathrm{id}$ est strictement décroissante. Finalement, la fonction g ne peut pas être continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Soient $a_1, ..., a_n$ des nombres réels de l'intervalle $[0, 1]$. Montrer que l'équation

$$(E) : \qquad \frac{|x - a_1| + |x - a_2| + ... + |x - a_n|}{n} = \frac{1}{2}$$

admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, 1]$.

Solution.

On considère la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 2\sum_{k=0}^{n} |x - a_k| - n$$

Il est clair que la fonction f est continue sur $[0, 1]$. De plus remarquons que

$$f(0) + f(1) = 2\sum_{k=0}^{n} a_k - n + 2n - 2\sum_{k=0}^{n} a_k - n = 0$$

Donc $f(0)f(1) = -f(1)^2 \leq 0$ et alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = 0$. Autrement dit, l'équation (E) admet une solution dans l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 8. Soit f une fonction numérique définie d'un segment $[a, b]$ vers $[a, b]$ tel que pour tous $x, y \in [a, b]$ tels que $x \neq y$, on a

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

Montrer que la fonction f admet un unique point fixe.

Solution.

Montrons d'abord que la fonction f est continue sur $[a, b]$. On se fixe $x_0 \in [a, b]$. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}, x \neq x_0$ on a

$$|f(x) - f(x_0)| < |x - x_0|$$

En faisant tendre x vers x_0, on obtient $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, donc f est continue en x_0, et ceci pour tout $x_0 \in [a, b]$. Donc f est continue sur $[a, b]$. De plus $h(a) \times h(b) \leq 0$ où h la fonction continue définie par $h = f - \mathrm{Id}$ sur $[a, b]$.

Donc f admet un point fixe u. Supposons que f admet un autre point fixe v différent de u, d'après l'inégalité de base on obtient

$$|u-v| = |f(u) - f(v)| < |u-v|$$

Ce qui constitue une absurdité. Résumons, la fonction f admet un point fixe u et celui ci est unique.

Exercice 9. Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I tel que

$$|f| = |g| > 0$$

Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Solution.

Procédons par absurde. On considère la fonction h définie par $h = f/g$. Cette fonction est continue sur I. On sait que $|h(x)| = 1$ pour tout réel $x \in I$. Il s'agit de montrer que que $h \equiv 1$ ou $h \equiv -1$, supposons par l'absurde qu'il existe a et b deux réels $\in I$ tels que $h(a) = 1$ et $h(b) = -1$, donc $h(b) < 0 < h(a)$ et alors h s'annule sur I d'après le théorème des valeurs intermédiaires, c'est à dire f s'annule sur I, et ceci contredit les hypothèses. Finalement, on a prouvé que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 10. Soit f une fonction une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) \neq x$$

Montrer que l'équation $f \circ f(x) = x$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Solution.

Les hypothèses de l'exercice permettent de dire que $f(x) > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ou $f(x) < x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet s'il existe a et b de $\mathbb{R}$ tels que $f(a) - a \leq 0$ et $f(b) - b \geq 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$ et ceci contredit le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) \neq x$. Supposons par exemple que $f(x) > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, en particulier, on a $f(f(x)) > f(x) > x$, donc l'équation $f \circ f(x) = x$ n'admet pas de solution dans ce cas. Le cas $f(x) < x$ pour tout réel x se traite de manière similaire.

➽ Si on dispose de deux fonctions f et g continues sur un intervalle I telles que pour tout $x \in I$, on a $f(x) \neq g(x)$, alors $f > g$ ou $f < g$.

Exercice 11.
1/ Soit $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ ouvert. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, montrer qu'elle est continue. La réciproque est elle toujours vraie ?
2/ Donner un exemple d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ non dérivable en une infinité de points.

Solution.

1/ Soit $x_0 \in I$, puisque f est dérivable en x_0, alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

En posant $\epsilon(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$, on obtient pour tout réel x,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + (x - x_0)\epsilon(x), \qquad (*)$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$. En faisant tendre x vers x_0 dans $(*)$, on obtient $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ et ceci pour tout $x_0 \in I$, f est alors continue sur I.
La réciproque n'est pas toujours vraie, la fonction $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais elle est non dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas dérivable en 0 (puisque $f'_d(0) \neq f'_g(0)$).

➽ L'expression $(*)$ est appelé le développement limité d'ordre 1 de f en x_0.

2/ Définissons la fonction V sur $\mathbb{R}$ par qu'elle soit périodique de période 1, et que pour tout $x \in [0, 1[$, on a $V(x) = |x|$. La fonction V, n'est pas dérivable en $x_0 = 0$, et puisque V est périodique de période 1, alors V n'est pas dérivable en tout $n \in \mathbb{Z}$. L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ étant infini, la fonction V est non dérivable en une infinité de points.

➽ Il existe des fonctions continues nulle part dérivables. La preuve de ce résultat dépasse largement le niveau de la terminale.

Exercice 12.
1/ Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$.
2/ Montrer qu'il existe une bijection continue entre $\mathbb{R}$ et $]-1, 1[$.
3/ Montrer qu'il existe une bijection continue entre $\left] -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right[$ et $]-1, 1[$.

Solution.

1/ Supposons qu'une telle fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ existe. Puisque f est surjective, on a alors $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$, donc la fonction f ne s'annule pas. D'autre part $-1, 1 \in \mathbb{R}^*$ admettent des antécédents a et b différents respectivement. Mais on a $f(a) \times f(b) = -1 < 0$, et puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur le segment d'extrémités a et b, d'après le théorème des valeurs intermédiaires la fonction f s'annule et ceci n'est pas possible en vertu de ce qui précède. On conclut qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^*$.
2/ Définissons la fonction φ sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

La fonction φ est continue par opérations. De plus elle est strictement croissante. En effet, elle est d'abord impaire et de plus pour tous $x \neq y$ de $[0, +\infty[$, on a

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y} = \frac{\dfrac{x}{1+|x|} - \dfrac{y}{1+|y|}}{x - y} = \frac{x - y + x|y| - y|x|}{(x-y)(1+|x|)(1+|y|)} = \frac{1}{(1+x)(1+y)} > 0$$

Par conséquent, φ est strictement croissante, en particulier elle est injective, donc φ est une bijection puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}$. Et d'après le théorème de l'image d'un intervalle par une fonction continue, on obtient

$$\varphi(\mathbb{R}) = \varphi(]-\infty, +\infty[=] \lim_{x \to -\infty} \varphi(x), \lim_{x \to +\infty} \varphi(x)[=] - 1, 1[$$

En conclusion, la fonction φ est une solution du problème.
3/ D'après la question précédente, il existe une fonction φ continue et bijective entre $\mathbb{R}$ et $]-1,1[$. Pour répondre à la question, il suffit de trouver une fonction ψ continue et bijective de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$. Or la fonction ψ restriction de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ convient. La fonction $\varphi\circ\psi : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to]-1,1[$ bien définie est une solution puisqu'elle est bijective continue comme composée de deux fonctions bijectives et continues.

Exercice 13. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Montrer que la fonction f s'annule sur $\mathbb{R}$.

Solution.

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$, alors

$$(\forall\epsilon>0)(\exists A>0)(\forall x\in\mathbb{R}),\quad x\leq -A \Longrightarrow |f(x)+3|<\epsilon$$

En particulier pour $\epsilon=2$, on a $f(-A)+3<2$, donc $f(-A)\leq 0$.
D'autre part puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, alors

$$(\forall B>0)(\exists C>0)(\forall x\in\mathbb{R}),\quad x\geq C \Longrightarrow f(x)\geq B$$

Pour $B=1$, on a $f(C)\geq 1\geq 0$.
Finalement, la fonction f est continue sur $[-A,C]$ et vérifie $f(-A)\times f(C)\leq 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f s'annule sur $[-A,C]$, en particulier la fonction f s'annule sur $\mathbb{R}$.

➽ D'une manière similaire, on montre que si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et sa limite en $+\infty$ vaut $+\infty$ et sa limite en $-\infty$ vaut $-\infty$, alors f s'annule. En particulier, toute fonction polynômiale de degré impair admet une racine dans $\mathbb{R}$.

Exercice 14 (Isométries de $\mathbb{R}$).
Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant pour tous réels x et y,

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|$$

Solution.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, fixons $x_0\in\mathbb{R}$, on sait que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|$. En faisant tendre x vers x_0, on trouve $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)|=0$ et alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ et ceci pour tout réel x_0. La fonction f est alors continue sur $\mathbb{R}$. En substituant y par 0 dans la relation fonctionnelles de base on trouve pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|f(x)-f(0)|=|x|$. Les deux fonction $x\mapsto f(x)-f(0)$ et l'identité étant continues sur $\mathbb{R}$. Elles sont continues sur $]0,+\infty[$ et de plus pour tout $x>0$, $|f(x)-f(0)|=|x|>0$ alors d'après le résultat de l'exercice 9, pour tout $x>0$ on a $f(x)-f(0)=x$ ou pour tout $x>0$ on a $f(x)-f(0)=-x$, c-à-d pour tout $f(x)=x+c$ pour tout $x>0$ ou $f(x)=-x+c$ pour tout $x>0$ où $c=f(0)$. On montre de même que pour tout $x<0$ on a $f(x)=x+c$ ou pour tout $x<0$ on a $f(x)=-x+c$. Puisque $f(0)=c$, alors quatre cas se présentent soit f est sur $\mathbb{R}$ est du type $x\mapsto x+c$ ou de type $x\mapsto -x+c$ ou $f(x)=x+c$ sur $[0,+\infty[$ et $f(x)=-x+c$ sur $]-\infty,0[$ ou $f(x)=-x+c$ sur $[0,+\infty[$ et $f(x)=x+c$ sur $]-\infty,0[$. Les fonctions des deux premières cas vérifient la relation fonctionnelle de base. En revanche, les deux autres cas ne sont pas possibles puisque f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ d'après le résultat de l'exercice 3 puisque f est continue est injective. Les solutions du problème sont donc les fonctions de type $x \mapsto x + c$ et les fonction du type $-x + c$ où c une constante réelle.

Exercice 14. Soit f une fonction décroissante sur $]0, +\infty[$, supposons que la fonction $x \mapsto xf(x)$ est croissante sur $]0, +\infty[$. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.

Solution.

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = xf(x)$. Pour montrer que la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$, il suffit de prouver que la fonction g est continue sur $]0, +\infty[$. Remarquons que pour tout $x_0 \in]0, +\infty$ et pour tout réel $x > 0$ différent de x_0, on a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{g(x)}{x} - \frac{g(x_0)}{x_0}}{x - x_0} = \frac{x_0 g(x) - x g(x_0)}{x x_0 (x - x_0)} = \frac{x_0 g(x) - x_0 g(x_0) + x_0 g(x_0) - x g(x_0)}{x x_0 (x - x_0)} = \frac{g(x) - g(x_0)}{x(x - x_0)} - \frac{g(x_0)}{x x_0}$$

Le côté de gauche étant négatif puisque la fonction f est décroissante, il en est de même pour le côté de droite, donc

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x(x - x_0)} \leq \frac{g(x_0)}{x x_0}$$

La fonction g étant croissante, on obtient

$$|g(x) - g(x_0)| \leq \frac{g(x_0)}{x_0} \times |x - x_0|$$

En faisant tendre x vers x_0, on obtient $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$, et ceci pour tout $x_0 \in]0, +\infty[$. La fonction g est continue sur $]0, +\infty[$ et alors il en est de même pour la fonction f.

Exercice 15. Soit f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$. Supposons de plus que

$$f \circ g = g \circ f$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f(\alpha) = g(\alpha)$.

Solution.

On considère la fonction h définie sur $[0, 1]$ par $h = f - g$. Il s'agit de montrer que la fonction h s'annule au moins une fois sur $[0, 1]$. La fonction h étant continue sur le segment $[0, 1]$ comme différence de deux fonctions continues sur $[0, 1]$, on peut poser $h([0, 1]) = [m, M]$. On sait que pour tout $x \in [0, 1]$ on a $m \leq f(x) - g(x) \leq M$, en particulier pour $f(x), g(x) \in [0, 1]$ on a $m \leq f(g(x)) - g(g(x)) \leq M$ et $m \leq f(f(x)) - g(f(x))$, alors $2m \leq f(f(x)) - g(g(x)) \leq 2M$ puisque $f(g(x)) = g(f(x))$. Une récurrence simple permet de montrer que pour tout entier naturel non nul n, $nm \leq f^{[n]}(x) - g^{[n]}(x) \leq nM$ où $f^{[n]}$ la composée n-ème de f. En particulier, pour $x = 1$, on obtient

$$m \leq \frac{f^{[n]}(1) - g^{[n]}(1)}{n} \leq M$$

mais on sait que

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{-g^{[n]}(1)}{n} \leq \frac{f^{[n]}(1) - g^{[n]}(1)}{n} \leq \frac{f^{[n]}(1)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Donc pour tout entier n, on a $m \leq 1/n$ et $M \geq -1/n$ et en faisant tendre $n \to \infty$, on obtient $m \leq 0$ et $M \geq 0$, c'est à dire $0 \in [m, M] = h([0,1])$ et ceci est équivalent à dire qu'il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $h(\alpha) = 0$, c'est à dire qu'il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) = g(\alpha)$.

Exercice 16. Soit $f :]0, +\infty[$ une fonction continue vérifiant pour tout $x > 0$,

$$f(x) \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Montrer que la fonction f est identiquement nulle.

Solution.

Soit $x \in]0, 2\pi[$ tel que $x \neq \dfrac{1}{k\pi}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. D'après les hypothèses, on sait que

$$f(x) \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Sachant que $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \neq 0$ (car $1/x \neq k\pi$), alors $f(x) = 0$. Donc on a montré que pour tout $x \neq \dfrac{1}{k\pi}$ où k un entier naturel non nul, on a $f(x) = 0$. Pour conclure à la nullité de la fonction f, il reste à montrer que f est nulle en tout $x = \dfrac{1}{k\pi}$ où k un entier naturel non nul. Par absurde supposons qu'il existe $x_0 = \dfrac{1}{k_0\pi}$ où k_0 un entier naturel non nul tel que $f(x_0) \neq 0$, supposons par exemple que $f(x_0) > 0$. Puisque f est continue sur $]0, +\infty[$ et en particulier en x_0, alors

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \eta > 0)(\forall x \in]0, +\infty[), \qquad |x - x_0| < \eta \Longrightarrow -f(x) + f(x_0) < \epsilon$$

En particulier pour $\epsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$, on a l'existence de $\eta_0 > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$ on a $-f(x) + f(x_0) < \dfrac{f(x_0)}{2}$, alors pour tout $x \in]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$, on a $f(x) > \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$. Finalement, on a montré qu'il existe un voisinage $]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$ de x_0 tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$, on a $f(x) > 0$, mais on peut choisir α dans l'intervalle $]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$ tel que α ne s'écrit pas sous la forme $\dfrac{1}{k\pi}$ où k un entier naturel non nul. En effet, supposons que tous les éléments de l'intervalle $]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$ s'écrivent sous la forme $\dfrac{1}{k\pi}$. L'application $\varphi : \mathbb{N}^* \to]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[, \quad k \mapsto \dfrac{1}{k\pi}$, est bien définie. De plus, elle est surjective d'après ce qui précède. Remarquons qu'elle est également injective. C'est donc une bijection. Soient $\alpha_1 = \varphi(1)$ et $\alpha_2 = \varphi(2)$, l'élément $\gamma = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ est encore un élément de l'intervalle $]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$, donc elle admet un antécédent $a \in \mathbb{N}^*$ par l'application φ. Autrement dit il existe $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi(a) = \gamma = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \dfrac{\varphi(1) + \varphi(2)}{2} = \dfrac{1 + 2}{2 \times 2\pi} = \dfrac{3}{4\pi}$, donc $a = \dfrac{4}{3}$, par injectivité de l'application φ et ceci n'est pas possible puisque $a \in \mathbb{N}^*$. On montre d'une manière similaire que $f(x_0)$ ne peut pas être strictement négative. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = 0$. Autrement dit f est identiquement nulle.

Exercice 17. Soit I un intervalle ouvert sur lequel une fonction f est continue. On suppose de plus que f admet un extremum local sur l'intervalle I. Montrer qu'il existe deux éléments a et b de I tel que $f(a) = f(b)$.

Solution.

Il s'agit de montrer que la fonction f n'est pas injective sur l'intervalle I. Par absurde, supposons qu'elle est injective, puisque f est continue sur l'intervalle I, elle est alors strictement monotone sur I d'après le résultat de l'exercice 3. Puisque f admet un extremum local $m = f(\alpha)$ qu'on va supposer un minimum local sur I, il existe un segment $[a, b] \subset I$ tel que $a < \alpha$ (puisque I est ouvert) et pour tout $x \in [a, b]$, on a $f(x) \geq m$, et puisque la restriction $f_{|[a,b]}$ de f à $[a, b]$ est strictement monotone, alors $m = f(a)$ et puisque $m = f(\alpha)$, alors par injectivité de f, on a $a = \alpha$ et ceci n'est pas possible puisque a est supposé strictement inférieur à α. Le cas où f admet un maximum local se traite avec une manière similaire.

Exercice 18. Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$ où a et b deux nombres réels avec $a < b$. On suppose que pour tout $x \in [a, b]$, il existe $y \in [a, b]$ tel que $f(x) = g(y)$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Solution.

On suppose que pour tout $x \in [a, b]$, on a $f(x) \neq g(x)$. On distingue deux cas $f > g$ ou $f < g$ puisque f et g sont continues sur le segment $[a, b]$. Plaçons nous dans le premier cas. La fonction g étant continue sur le segment $[a, b]$, elle admet un maximum global M sur $[a, b]$ et celui ci est atteint. Posons alors $M = g(\alpha)$, or on sait que $f(\alpha) > g(\alpha)$ mais d'après les hypothèses de l'exercice, il existe $\beta \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = g(\beta)$, donc il existe $\beta \in [a, b]$ tel que $g(\beta) > g(\alpha) = M$ et ceci n'est pas possible puisque M est le maximum de g sur le segment $[a, b]$. Le cas où $f < g$ se traite de manière similaire. Finalement, on a montré qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$ par absurde.

Exercice 19 (Continuité et point fixe).
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $a \leq b$ deux nombres réels. On suppose que $[a, b] \subset f([a, b])$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

Solution.

La fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, donc $f([a, b])$ est un segment qu'on notera $[m, M]$. Il existe $\alpha, \beta \in [a, b]$ tel que $m = f(\alpha)$ et $M = f(\beta)$. Mais $\alpha \in [a, b] \subset [m, M]$, alors $\alpha \geq m = f(\alpha)$, de même on obtient $\beta \leq f(\beta)$. Si on considère la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$, on obtient $g(\alpha) \leq 0 \leq g(\beta)$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un $c \in [\min(\alpha, \beta), \max(\alpha, \beta)]$ vérifiant $g(c) = 0$ (puisque g est continue sur $[a, b]$). Donc, il existe un élément $c \in [a, b]$ vérifiant $f(c) = c$.

CHAPITRE 2

LIMITE D'UNE SUITE

Exercice 1.
1/ Montrer que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.
2/ Soit (u_n) une suite numérique à valeurs réelles. Montrer que si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite $\big(|u_n)|\big)$ converge vers $|l|$.
3/ La suite de terme général $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{(-1)^n}{n}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est elle convergente ?
4/ Soit (u_n) une suite numérique à valeurs réelles tels que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même la même limite l. Montrer que la suite (u_n) est convergente et sa limite vaut l.

Solution.

1/ Soit (u_n) une suite convergente et (v_n) une suite divergente. Il s'agit de montrer que la suite de terme général $w_n = u_n + v_n$ diverge. Par absurde, en supposant que la suite (w_n) est convergente, on trouve que la suite de terme général $v_n = w_n - u_n$ converge (la différence de deux suites convergentes et aussi convergente) et ceci le fait que (v_n) diverge.
2/ Un argument immédiat est la continuité de la fonction $x \mapsto |x|$, proposons une autre méthode. Remarquons que pour tous x et x_0 de $\mathbb{R}$, on a

$$\big||x| - |x_0|\big| \leq |x - x_0|$$

Donc en particulier, pour tout entier naturel n, on a

$$\big||u_n| - |l|\big| \leq |u_n - l|$$

En faisant tendre n vers ∞, on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = |l|$, d'où le résultat.
3/ La suite de terme général a_n est convergente comme somme de deux suites convergentes car la suite de terme général $1/n^2$ converge ainsi que la suite de terme général $b_n = (-1)^n/n$ qui converge également vers 0, car $|b_n| \to 0$ quand $n \to \infty$.
4/ C'est facile, il suffit d'écrire la définition. Puisque les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel on a $|u_{2n} - l| < \epsilon$ et $|u_{2n+1} - l| < \epsilon$, Soit $n \geq N = 2n_0 + 1$, deux cas se présentent, le premier cas est n pair, par conséquent $n = 2k$, alors on a $k \geq n_0$ et alors d'après ce qui précède, on a $|u_n - l| = |u_{2k} - l| < \epsilon$ et le cas où n est impair se traite similairement. Finalement, on a montré que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel, on a $|u_n - l| < \epsilon$. C'est équivalent à dire que la suite (u_n) converge vers l.

➽ On peut montrer comme en dernière question, que si les suites extraites (u_{3n}), (u_{3n+1}) et (u_{3n+2}) d'une suite (u_n) convergent vers la même limite l, alors il en est de même pour la suite (u_n).

Exercice 2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général

$$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + ... + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$$

converge et déterminer sa limite.

Solution.

Remarquons que pour tout entier naturel $n \geq 1$ et pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, on a

$$\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$$

Donc

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}}}_{u_n} \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$$

Mais on sait que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^4++1}} = 1$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et sa limite vaut 1.

➽ En général, si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite monotone, alors $n\min(u_1, u_n) \leq u_1 + u_2 + \ldots + u_n \leq n\max(u_1, u_n)$.

Exercice 3. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n^2 + u_nv_n + v_n^2 \to 0$ quand $n \to \infty$. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent et déterminer leurs limites.

Solution.

On sait que

$$0 \leq (u_n+v_n)^2 = 2u_n^2 + 2u_nv_n + 2v_n^2 = 2(u_n^2 + u_nv_n + v_n^2)$$

Et d'après les hypothèses de terme de droite converge vers 0, donc il en est de même pour $(u_n+v_n)^2$, or on a

$$u_nv_n = (u_n+v_n)^2 - (u_n^2 + v_n^2 + u_nv_n) \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty$$

D'autre part, on a $u_n^2 + v_n^2 = (u_n+v_n)^2 - 2u_nv_n$ qui converge aussi vers 0. Donc, les deux suites (u_n) et (v_n) sont tous les deux convergentes et leur limite vaut 0.

Exercice 4 (Un cas particulier des séries de Riemann).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$
1/ En considérant les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de termes généraux $x_n = u_n - 2\sqrt{n}$ et $y_n = u_n - 2\sqrt{n+1}$, montrer que que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.
2/ Proposer une autre méthode pour montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente puis déterminer sa limite.

Solution.

2/ Les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. En effet, on a d'abord
$$x_n - y_n = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty$$
Et de plus pour tout entier naturel n, on a
$$x_{n+1} - x_n = u_{n+1} - u_n - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) \leq 0$$
Et
$$y_{n+1} - y_n = u_{n+1} - u_n - 2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\right) \geq 0$$
Résumons, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont une différence qui converge vers 0 et l'une croissante et l'autre décroissante. Elles sont donc adjacentes, et en particulier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. La suite de terme général $u_n = x_n - 2\sqrt{n}$ s'écrit comme somme de suite convergente et une suite divergente, elle alors divergente.
2/ Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On remarque que pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$,
$$\frac{1}{2\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$
Donc en sommant, on obtient
$$u_n \geq 2(\sqrt{n+1} - 1)$$
Le terme de droite tend vers $+\infty$ quand n tend vers ∞, donc en comparant on déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge et sa limite vaut $+\infty$.

Exercice 5 (La série harmonique).
Montrer que la suite de terme général
$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$
diverge et sa limite vaut $+\infty$.

Solution.

Commençons par remarquer que la suite de terme général H_n est croissante, pour montrer que $H_n \to +\infty$, il suffit de montrer que la suite de terme général H_n n'est pas majorée. Par absurde, si la suite de terme général H_n est majorée, elle est alors convergente puisqu'elle est croissante. Mais on a pour tout entier naturel n,
$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \quad (*)$$

Donc en notant $l = \lim_{n\to\infty} H_n$, un passage à la limite dans l'inégalité $(*)$ fournit $l - l = 0 \geq 1/2$ et ceci n'est pas possible. Donc la suite de terme général n'est pas majorée, et par conséquent elle diverge et sa limite vaut $+\infty$.

➽ D'autres preuves de ce résultat sont proposées dans les chapitres suivants.

Exercice 6 (Moyennes de Cesàro).
1/ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite numérique à valeurs réelles convergeant vers l. Appelons m_n la moyenne arithmétique des u_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, c'est à dire

$$m_n = \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n}$$

Montrer que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et sa limite vaut l.
2/ (Application) Soit (x_n) une suite numérique telle que $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} - x_n = l$. Montrer que la suite de terme général $\frac{x_n}{n}$ est convergente et que $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = l$.

Solution.

1/ La suite de terme général u_n étant convergente, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|u_n - l| < \epsilon/2$. Donc pour tout entier naturel $n \geq n_0$,

$$\left|\sum_{k=n_0}^{n}(u_k - l)\right| \leq \sum_{k=n_0}^{n}|u_k - l| \leq \frac{(n - n_0 + 1)\epsilon}{2}$$

De plus, en posant $A = \sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k - l)$, on obtient

$$|m_n - l| = \left|\frac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{n} - l\right| \leq \frac{A}{n} + \left|\frac{\sum_{k=n_0}^{n}(u_k - l)}{n}\right| \leq \frac{A}{n} + \frac{n - n_0 + 1}{2n}\epsilon \leq \frac{A}{n} + \frac{\epsilon}{2}$$

Puisque A/n tend vers 0, alors à partir d'une certain rang N, $A/n < \epsilon/2$. Finalement, on a montré que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N$ on a $|m_n - l| < \epsilon$ et ceci est équivaut à dire que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l.
2/ Il suffit de remarquer que

$$\frac{x_n - x_0}{n} = \frac{x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + ... + x_1 - x_0}{n}$$

Le terme de droite est la moyenne arithmétique des $y_i = x_i - x_{i-1}$ pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$, donc d'après la première question, on a

$$\frac{x_n}{n} = \frac{x_0}{n} + \frac{x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + ... + x_1 - x_0}{n} \to l$$

Donc la suite de terme général $\frac{x_n}{n}$ est convergente et sa limite vaut l.

➽ Le résultat de la question **1/** est d'une importance capitale ; il en existe de nombreuses généralisations de ce théorème.

Exercice 7. On définit la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par son terme général

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Solution.

On va montrer que les deux suites extraites $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Par conséquence, la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ va être convergente. On a $A_{2n+1} - A_{2n} = -1/(2n+1)$ converge vers 0. De plus, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$A_{2n+2} - A_{2n} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} = -\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \leq 0$$

Et

$$A_{2n+3} - A_{2n+1} = -\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \geq 0$$

Donc les deux suites $(A_{2n})_{2n}$ sont monotones de monotonies différentes, par conséquent elles sont adjacentes. D'où le résultat.

➽ On peut montrer que la limite de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vaut $\ln 2$.

Exercice 8. Étudier la convergence et déterminer la limite, lorsqu'elle existe, de la suite définie par son terme général

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$$

où a et b deux réels tels que $|a| \neq |b|$.

Solution.

On distingue deux cas, $|a| < |b|$ ou $|a| > |b|$. Le premier cas fournit $u_n = \dfrac{q^n - 1}{q^n + 1}$ où $q = a/b$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1. Le second cas se traite de manière similaire, et on trouve u_n converge vers 1 dans ce cas.

Exercice 9 (Un critère de D'alembert).
Soit (u_n) une suite numérique à valeurs strictement positives telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha$.

1/ Montrer que si $\alpha < 1$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.
2/ Montrer que si $\alpha > 1$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
3/ Que peut-on dire si $\alpha = 1$?
4/ (Application) Étudier la convergence des suites de termes généraux $u_n = n^k/x^n$ et $v_n = x^n/n!$ où k un entier naturel non nul et x un réel strictement positif.

Solution.

1/ Puisque $\lim_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n = \alpha < 1$, alors à partir d'un certain rang n_0, on aura $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{\alpha+1}{2}$ puisque $\alpha < \dfrac{\alpha+1}{2}$. Donc pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on a

$$\left|\frac{u_n}{u_{n_0}}\right| = \left|\prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \prod_{k=n_0}^{n-1} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \leq \prod_{k=n_0}^{n-1} \left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^{n-n_0}$$

Le terme de droite converge vers 0, il en est de même pour le terme de gauche, par conséquent $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, d'où le résultat.

➽ En général si (v_n) est une suite convergente de limite l, et $\alpha > l > \beta$, alors à partir d'un certain rang n_0, on a pour tout $n \geq n_0$, $\beta \leq u_n \leq \alpha$. On peut montrer facilement cette proposition en utilisant la définition de la limite d'une suite.

2/ Puisque $\lim_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n = \alpha > 1$, alors à partir d'un certain rang n_0, on aura $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq \dfrac{\alpha+1}{2}$ puisque $\alpha > \dfrac{\alpha+1}{2}$. Donc pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on a

$$\left|\frac{u_n}{u_{n_0}}\right| = \left|\prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \prod_{k=n_0}^{n-1} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \geq \prod_{k=n_0}^{n-1} \left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^{n-n_0}$$

Le terme de droite tend vers $+\infty$, il en est de même pour le terme de gauche, par conséquent $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$, d'où le résultat.

3/ Si $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$, on peut pas conclure à propos de la nature de la suite (u_n). Par exemple la suite de terme général n vérifie $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$ et la suite de terme général n diverge. Pourtant la suite de terme général $1/n$, vérifie $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1/n}{1/(n+1)} = 1$ mais la suite de terme général $1/n$ converge.

4/ On a pour tout entier naturel n,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{1}{x} \to \frac{1}{x}$$

Donc si $x > 1$, d'après la première question, la suite (u_n) converge vers 0. Si, $x < 1$, alors d'après la deuxième question, on a $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$. Si $x = 1$, on revient à l'expression de la suite (u_n), on a $u_n = n^k \to +\infty$.

Pour la suite (v_n), on a pour tout entier naturel n,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n}{n+1} x \to x$$

Donc si $x < 1$, alors d'après la première question $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$. Si $x > 1$, alors d'après la deuxième question on a $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$. Si $x = 1$, revenons à l'expression de la suite du terme général v_n. On a pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{1}{n!} \to 0$, donc la suite (v_n) est de limite nulle dans ce cas.

Exercice 10. Montrer que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

converge.

Solution.

Remarquons d'abord que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, pour montrer qu'elle converge, il suffit donc de montrer qu'elle est majorée. On va montrer par la suite que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 3. On a pour tout entier naturel n,

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Du fait que pour tout entier naturel k, on a $k! \geq 2^{k-1}$. Donc

$$e_n \leq 1 + \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} \leq 1 + 2 = 3$$

Et ceci achève la preuve.

➽ On peut montrer que la suite (e_n) converge vers la constante e (base du logarithme néperien) et que cette limite est un nombre irrationnel.

Exercice 11. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$N_n = \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + ... + \frac{1}{\binom{n}{n}}$$

où pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$, on a $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Solution.

On a pour tout $n \geq 4$,

$$N_n = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1} + \frac{1}{n} + 1$$

La suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1}$ est de limite nulle. En effet, on a

$$\sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1} \leq \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{2}^{-1} = \sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2(n-3)}{n(n-1)} \to 0$$

Puisque pour tout $k \in \{2, 3, ..., n-1\}$, on a $\binom{n}{2} \leq \binom{n}{k}$ (c'est facile à vérifier). En conclusion, la suite de terme général N_n est convergente et sa limite vaut 2.

Exercice 12. Soit a un réel > 0. Discuter suivant la valeur du paramètre m la nature de la suite P_n de terme général

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + a^{2^k}\right) = (1+a) \times (1+a^2) \times ... \times \left(1 + a^{2^n}\right)$$

Et déterminer sa limite lorsqu'elle existe.

Solution.

Supposons que $a \geq 1$, alors

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + a^{2^k}\right) \geq \prod_{k=1}^{n} (1 + a) = (1 + a)^n \to +\infty$$

Alors, par comparaison, on déduit que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge et sa limite vaut $+\infty$.
Supposons maintenant que $0 < a < 1$, alors remarquons que

$$(1 - a) \times P_n = (1 - a)(1 + a) \prod_{k=2}^{n} \left(1 + a^{2^k}\right) = (1 - a^2)(1 + a^2) \prod_{k=3}^{n} \left(1 + a^{2^k}\right) = (1 - a^4) \prod_{k=2}^{n} \left(1 + a^{2^k}\right)$$

Et de proche en proche, on obtient $(1 - a)P_n = 1 - a^{2^{n+1}}$, et par conséquent

$$P_n = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a} \to \frac{1}{1 - a}$$

Finalement, on déduit que si $a < 1$, alors la suite de terme général P_n converge et sa limite vaut $\dfrac{1}{1 - a}$.

Exercice 13. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par leurs termes initiaux $u_0 = a$ et $v_0 = b$ et les relations de récurrences $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ pour tout entier naturel n.
Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Solution.

On va montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, mais pas en utilisant le théorème de l'adjacence de deux suites. On procède en montrant d'abord par une récurrence que $u_n < v_n$ pour tout entier naturel n. Pour $n = 0$, on a bien évidemment $u_0 < v_0$, supposons que $u_n < v_n$ et montrons que $u_{n+1} < v_{n+1}$, on a

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} - \frac{u_n + v_n}{2} = -\frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} < 0$$

Donc, pour tout entier naturel n, on a $u_n < v_n$. Montrons maintenant que la suite (u_n) est croissante. On procède par récurrence, pour $n = 0$ on a bien évidemment $u_1 = \dfrac{u_0 + v_1}{2} = \dfrac{a + b}{2} \geq a = u_0$. Supposons que $u_n \geq u_{n-1}$ et montrons que $u_{n+1} \geq u_n$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \geq 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante. On montre de manière similaire que la suite (v_n) est décroissante. Mais remarquons que $a = u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0 = b$ pour tout entier naturel n. Donc la suite (u_n) est majorée et la suite (v_n) est minorée. Puisque la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante, alors les deux suites (u_n) et (v_n) convergent. Appelons u et v leurs limites respectives. Puisque u_{n+1} est la moyenne arithmétique de u_n et v_n pour tout entier naturel n, un passage à la limite fournit $u = \dfrac{u + v}{2}$ et par conséquent $u = v$. Résumons, on a montré que les deux suites (u_n) et (v_n) sont monotones de monotonie différentes et qu'elle converge vers la même limite, elles sont alors adjacentes.

➽ D'une manière similaire, on peut montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $0 < u_0 < v_0$ et par $u_{n+1} = \dfrac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ sont adjacentes.

Exercice 14. Soit $a > 1$ un nombre réel.
1/ Déterminer toutes les fonctions f continues en zéro vérifiant pour tout réel x, $f(ax) = f(x)$.
2/ Déterminer toutes les fonctions f dérivables en zéro vérifiant pour tout réel x, $f(ax) = af(x)$.

Solution.

1/ La relation $f(x) = f(ax)$ est vraie pour tout réel x. En remplaçant x par x/a, on obtient $f(x) = f\left(\frac{x}{a}\right)$ et ceci pour tout réel x. On montre facilement par récurrence que pour tout entier naturel, on a $f(x) = f\left(\frac{x}{a^n}\right)$et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient $f(x) = f(0)$ puisque la fonction f est continue en 0 par hypothèse. Réciproquement, les fonctions constantes vérifie la relation donnée. Finalement, les fonctions f vérifiant $f(x) = f(ax)$ pour tout réel x sont les fonctions constantes.
2/ D'abord en remplaçant x par 0, on obtient $f(0) = 0$. D'autre part, on sait que pour tout réel x, on a $f(x) = \frac{f(ax)}{a}$. Une récurrence simple permet de montrer que pour tout entier naturel n, on a $f(x) = \frac{f(a^n x)}{a^n}$. En particulier en remplaçant x par x/a^n on obtient $f\left(\frac{x}{a^n}\right) = \frac{f(x)}{a^n}$, donc pour tout réel $x \neq 0$, on a

$$f(x) = x \times \frac{f\left(\frac{x}{a^n}\right)}{\frac{x}{a^n}} = x \times \frac{f\left(\frac{x}{a^n}\right) - f(0)}{\frac{x}{a^n} - 0}$$

Puisque la fonction f est dérivable en 0, on obtient en faisant tendre $n \to \infty$, $f(x) = f'(0) \times x$. Cette égalité est bien évidemment vraie pour $x = 0$. Réciproquement, les fonctions $x \mapsto \lambda x$ où λ une constante réelle vérifient l'équation de base. Finalement, les fonctions vérifiant $f(ax) = af(x)$ pour tout réel x sont les fonctions linéaires.

➽ Remarquer que les résultats de l'exercice reste vrais si la constante a est supposé $0 \leq a < 1$.

Exercice 15 (Une suite récurrente).
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général u_n définie par $u_1 \geq 0$ et pour tout entier naturel non nul n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2}$$

est convergente et déterminer sa limite.

Solution.

Un calcul des premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ montre que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante. Montrons que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante. Commençons par montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a $u_n \geq \frac{1}{n^2 - n}$. Procédons par récurrence. Pour $n = 2$, on a $u_2 = u_1 + 1 \geq 1/2$. Supposons que $u_n \geq \frac{1}{n^2 - n}$ et montrons que

$$u_{n+1} \geq \frac{1}{(n+1)^2 - (n+1)} = \frac{1}{n^2 + n}$$

On a

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^2(n-1)} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^2(n-1)} + \frac{1}{n^2 + n} \geq \frac{1}{n^2 + n}$$

Donc, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a $u_n \geq \dfrac{1}{n^2 - n}$. La suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante. En effet, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2} - u_n = -u_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2} \leq -\frac{1}{n^2 - n} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2} = 0$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et puisqu'elle est à termes positifs, elle est alors convergente, et par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Appelons u sa limite, un passage à la limite dans la relation de récurrence montre que $u = 0$. En conclusion, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Exercice 16. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général

$$E_n = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor k^2\sqrt{k}\rfloor}{k^2\sqrt{k}}$$

est convergente. On désigne par $\lfloor x\rfloor$ la parie entière du réel x.

Solution.

On remarque que E_n est la moyenne arithmétique des $e_k = \dfrac{\lfloor k^2\sqrt{k}\rfloor}{k^2\sqrt{k}}$ pour $k \in \{1, 2, ..., n\}$, donc si la suite de terme général e_n converge, d'après le résultat de l'exercice 6, la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est également convergente et on a $\lim E_n = \lim e_n$. Montrons que la suite de terme général e_n est convergente. On sait que pour tout entier naturel n,

$$1 - \frac{1}{n^2\lfloor n\rfloor} < e_n \leq 1$$

Donc, en faisant tendre n vers ∞ et en comparant, on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = 1$. On en déduit que la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = 1$.

Exercice 17 (Couple de suites récurrentes).
Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles. On suppose que $x_0 < y_0$ et pour tout entier naturel n, on a $x_{n+1} = \dfrac{2x_n + y_n}{3}$ et $y_{n+1} = \dfrac{x_n + 2y_n}{3}$. Montrer que les deux suites (x_n) et (y_n) sont convergentes de même limite que l'on précisera.

Solution.

Première méthode. Montrons d'abord que pour tout entier naturel n, on a $x_n < y_n$. Procédons par récurrence, pour $n = 0$, rien à démontrer. Supposons que $x_n < y_n$, on a

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{2x_n + y_n - x_n - 2y_n}{3} = \frac{x_n - y_n}{3} < 0$$

Donc pour tout entier naturel n, on a $x_n < y_n$. Remarquons que la suite (x_n) est croissante, en effet on a pour tout entier naturel n, $x_{n+1} - x_n = \dfrac{2(y_n - x_n)}{2} \geq 0$. De même, on montre que la suite (y_n) est décroissante, mais on sait que pour tout entier naturel n, $x_0 \leq x_n \leq y_n \leq y_0$, donc la suite (x_n) est majorée et la suite (y_n) est minorée. Ces deux suites convergent alors. Appelons x et y leurs limites respectives. Un passage à la limite dans la relation de récurrence $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 2y_n}{3}$ fournit $x = y$. Donc les deux suites (x_n) et (y_n) sont convergentes de même limite. Mais on sait que pour tout entier naturel n,

$$x_{n+1} + y_{n+1} = \frac{2x_n + y_n}{3} + \frac{x_n + 2y_n}{3} = x_n + y_n$$

Donc la suite de terme général x_n+y_n est constante, par conséquent pour tout entier naturel n, on a $x_n+y_n = x_0+y_0$, un passage à la limite montre que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} = \frac{x_0+y_0}{2}$.
Seconde méthode. Comme dans la première solution, on remarque que la suite de terme général $X_n = x_n + y_n$ est constante. Donc, en particulier elle converge. Mais d'autre part, la suite de terme général $Y_n = x_n - y_n$ est convergente également, en effet elle est géométrique de raison $1/3 < 1$. Finalement les deux suites de terme généraux $x_n = \frac{X_n+Y_n}{2}$ et $y_n = \frac{X_n - Y_n}{2}$ sont convergentes, et de plus elles ont la même limite, puisque $x_n - y_n = Y_n \to 0$. Pour déterminer la limite commune des deux suites (x_n) et (y_n), on utilise le même argument de la première solution.

➽ Remarquer que la première solution proposée est similaire à celle utilisée dans la résolution de l'exercice 13.

Exercice 18. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite définie par $a_1 = 2$ et pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = a_n + \sqrt{1+\frac{a_n}{n}}$$

Montrer que la suite de terme général $\frac{a_n}{n}$ est convergente.

Solution.

On considère la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $b_n = a_n/n$. Il s'agit de montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On commence par montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $b_n \geq \phi$ où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On procède par récurrence, pour $n=1$, on a bien sur $b_1 = 2 \geq \phi$. Supposons que le résultat est vrai pour le rang n, on a

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{1+\frac{a_n}{n}}}{n+1} = \frac{nb_n + \sqrt{1+b_n}}{n+1} \geq \frac{n}{n+1}b_n + \frac{\sqrt{\phi+1}}{n+1} \geq \frac{n}{n+1}\phi + \frac{\phi}{n+1} = \phi$$

En remarquant que $1+\phi = \phi^2$, et la récurrence est établit. Finalement, on a pour tout n entier naturel non nul, $b_n \geq \phi$. Mais remarquons que pour tout réel $x \geq \phi$, on a $x^2 - x - 1 \geq 0$ (puisque $(x-\phi)(x-\phi') \geq 0$) où ϕ' est la seconde racine du trinôme $x^2 - x - 1$). Donc pour tout réel $x \geq \phi$, on a $x^2 \geq x+1$ et en particulier, pour tout entier naturel n non nul, on a $b_n^2 \geq b_n + 1$ et puisque la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs, on a pour tout entier naturel n, $b_n \geq \sqrt{1+b_n}$. D'autre part, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. En effet, on a pour tout entier naturel n non nul,

$$b_{n+1} = \frac{nb_n + \sqrt{1+b_n}}{n+1} \leq \frac{nb_n + b_n}{n+1} = b_n$$

Puisque la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 0, elle est alors convergente. Et ceci achève la preuve.

➽ La constante $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelée le nombre d'or. C'est la racine positive du trinôme $X^2 - X - 1$. Cette constante apparaît dans de nombreuses situations, voir notamment la suite de Fibonacci, dont quelques propriétés, algébriques, arithmétiques et combinatoires sont étudiées dans le problème $(*)$.

Exercice 19. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite arithmétique à termes positifs. Supposons que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 1$. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_{n+k}}$$

est convergente.

Solution.

Soit $a = a_1$ le premier terme de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique, alors on peut écrire pour tout entier naturel n non nul, $a_n = a + (n-1)r$ où r la raison de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Donc

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_{n+k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a + (n+k-1)r}$$

L'hypothèse $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ permet de déterminer r, en effet on a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)r + a}{n} = r$, donc $r = 1$. Revenons à la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a alors

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a + (n+k-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a+n+k}$$

Remarquons que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, pour montrer qu'elle est convergente, il suffit alors de montrer qu'elle est majorée. Mais remarquons que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a+n+k} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Donc, la suite de terme général S_n est majorée, puisqu'elle est croissante, elle est alors convergente.

Exercice 20. Montrer que toute suite convergente est bornée. La réciproque est elle vraie ?

Solution.

Soit (u_n) une suite convergente de limite l. Montrons que la suite (u_n) est bornée. On sait que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|u_n - l| < \epsilon$. Pour $\epsilon = 1 > 0$, il existe donc un rang n_0 à partir duquel pour tout $n \geq n_0$, on a $|u_n| - |l| < 1$. Donc pour tout $n \geq n_0$, on a $|u_n| \leq K$ où $K = 1 + |l|$. D'autre part, posons $M = \max\{|u_0|, |u_1|, ..., |u_{n_0-1}|, K\}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| \leq M$ et ceci est équivalent à dire que la suite (u_n) est bornée.
La réciproque est bien évidemment fausse, prendre par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ est bornée, pourtant elle est divergente.

➽ Ce résultat est très utile. En effet, il permet de faciliter plusieurs majorations.

Exercice 21. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$x_n = \frac{a + aa + aaa + ... + \underbrace{aa...a}_{n\,\text{chiffres}}}{10^n}$$

Solution.

On sait que pour tout entier naturel n, on a $\underbrace{aa...a}_{n\,\text{chiffres}} = a + 10a + ... + 10^{n-1}a = a \times \sum_{i=0}^{n-1} 10^i$, donc, on a

$$x_n = a \times \frac{\sum_{p=1}^{n} \underbrace{aa...a}_{p\,\text{chiffres}}}{10^n} = a \times \frac{\sum_{p=1}^{n}\sum_{i=0}^{p-1} 10^i}{10^n} = a \times \frac{\sum_{p=1}^{n}(10^p - 1)}{9 \times 10^n} = a \times \frac{10\sum_{p=0}^{n-1} 10^p - n}{9 \times 10^n} = \frac{a}{9} \times \frac{\frac{10^{n+1}-90}{9} - n}{10^n}$$

$$= \frac{a}{81} \times \frac{10^{n+1} - 90 - 9n}{10^n} \to \frac{10}{81} \times a$$

Donc la suite (x_n) est convergente et sa limite vaut $\frac{10}{81}a$.

Exercice 22. Soit a un nombre réel non nul. On définit la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son terme général

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \sin(2^k a)$$

1/ Montrer que pour tout réel x, on a $|\sin x \times \sin(2x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2/ En déduire le calcul de la limite de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution.

1/ Soit x un nombre réel, il s'agit de prouver que

$$|\sin x \times \sin(2x)| = \max(\sin x \times \sin 2x, -\sin x \times \sin(2x)) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (*)$$

Pour montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin x \times \sin(2x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, on va étudier la fonction f_1 définie pour pour tout réel x par

$$f_1(x) = \sin x \times \sin(2x)$$

Remarquons que la fonction f_1 est 2π-périodique. Il suffit donc de la étudier sur $[0, 2\pi[$. La fonction f_1 est dérivable sur $[0, 2\pi[$ et on a pour tout réel x,

$$f_1'(x) = \cos x \sin(2x) + 2\sin x \cos(2x) = 2\cos^2 x \sin x + 2\sin x \cos(2x) = 2\sin x(1 - \sin^2 x + 1 - 2\sin^2 x)$$

$$= 2\sin x(2 - 3\sin^2 x) = -4\sin x \times \left(\sin x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \times \left(\sin x + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Or il existe exactement deux réels $\alpha_1 < \alpha_2 \in [0, 2\pi[$ antécédents du réel $-\sqrt{\frac{2}{3}} \in [-1, 1]$, et il existe exactement deux réels $\beta_1 < \beta_2 \in [0, 2\pi[$ deux antécédents du réels $\sqrt{\frac{2}{3}} \in [-1, 1]$. Le tableau des variations de la fonction f est comme suit (car $\beta_1 < \beta_2 < \pi < \alpha_1 < \alpha_2$ -Tracer la courbe de la restriction de la fonction sinus à $[0, 2\pi[$ pour s'en convaincre-)

x	0		β_1		β_2		π		α_1		α_2		2π
$f_1'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$
f_1	.	$\nearrow$	$f(\beta_1)$	$\searrow$	.	$\nearrow$	$f(\pi)$	$\searrow$	.	$\nearrow$	$f(\alpha_2)$	$\searrow$	. $\Vert$

La valeur maximale de la fonction f_1 sur $[0, 2\pi[$ est donc $\max(f_1(\beta_1), f_1(\pi), f_1(\alpha_2))$, mais on a $f_1(\pi) = 0$ et

$$f_1(\beta_1) = \sin\beta_1 \times \sin(2\beta_1) = 2\sin^2\beta_1 \cos\beta_1 = 2\sin^2\beta_1\sqrt{1-\sin^2\beta_1} = 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

Et de même on trouve $f_1(\alpha_2) = \dfrac{4}{3\sqrt{3}}$. Donc le maximum de f_1 sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ est $\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$, puisque $\dfrac{4}{3\sqrt{3}} \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, alors pour tout $x \in [0, 2\pi[$ on a $f(x) \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Puisque la fonction f_1 est 2π-périodique, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_1(x) \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Soit f_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x) = -\sin x \sin(2x)$. Il s'agit de montrer que $f_2 \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On pourra étudier la fonction f_2 comme on a fait pour f_1, mais remarquons que pour tout réel x, on a $f_2(x) = f_1(\pi + x) \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, et l'inégalité $(*)$ découle.

2/ Montrons que $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$ Pour arriver à ceci, on va montrer par la suite que $\lim_{n\to\infty} P_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} P_{2n} = 0$. On a

$$|P_{2n+1}| = \left|\prod_{k=0}^{2n+1} \sin(2^k a)\right| = [\sin a \sin 2a] \times [\sin 4a \sin 8a] \times \ldots \times [\sin(2^{2n}a)\sin(2^{2n+1}a)] \leq \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \to 0$$

Car d'après la question précédente, on sait que pour tout entier naturel k, on a $|\sin 2^k x \times \sin(2^{k+1}x)| \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Et pour la suite $(P_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, remarquons que pour tout $n \geq 1$ entier naturel, on a

$$0 \leq |P_{2n}| \leq |P_{2n-1}| \to 0$$

Donc la suite de terme général P_{2n} converge vers 0 d'après le théorème des gendarmes. Résumons, on a montré que les deux suites extraites (P_{2n}) et (P_{2n+1}) convergent vers la même limite nulle. Donc la suite (P_n) converge, et on a $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$.

Exercice 23 (Suites entières).
1/ Soit (u_n) une suite à valeurs dans l'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$. Supposons que la suite (u_n) converge. Montrer qu'elle est stationnaire.
2/ La suite (u_n) est convergente. La suite $(\lfloor u_n \rfloor)$ est elle convergente ?

Solution.

1/ La suite (u_n) étant convergente, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|u_n - l| < \epsilon$. Pour $\epsilon = 1/4$, on a l'existence d'un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|u_n - l| < 1/4$, donc pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|u_n - u_{n_0}| \leq |u_n - l| + |u_{n_0} - l| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Puisque $u_n - u_{n_0} \in \mathbb{Z}$, alors $u_n - u_{n_0} = 0$ et par conséquent $u_n = u_{n_0}$ et ceci pour tout $n \geq n_0$. Donc la suite (u_n) est stationnaire.

2/ En général c'est pas vrai. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $(-1)^n/n$, est convergente mais les deux suites de terme général $\lfloor v_{2p} \rfloor$ et $\lfloor v_{2p+1} \rfloor$ sont convergentes de limites différentes et par conséquent, la suite $(\lfloor v_n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.

Exercice 24 (Suite définie comme étant la racine d'un polynôme).
Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère la fonction polynômiale définie par

$$P_n(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x - 1$$

1/ Démontrer que P_n possède une unique racine dans $\mathbb{R}^+$ qu'on notera α_n, puis montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
2/ Démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ converge vers $1/2$.

Solution.

1/ La fonction P_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a pour tout $x \in [0, +\infty[$, $P_n'(x) = nx^{n-1}.(n-1)x^{n-2} + ... + 1 > 0$. Donc la fonction P_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Puisque $P_n(0) \times P_(1) \leq 0$, et la fonction P_n est continue sur $[0, 1]$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction P_n admet une racine $\alpha_n \in [0, 1]$, et puisque la fonction P_n est injective sur $[0, +\infty[$ (car elle est strictement croissante), alors cette racine est unique dans $\mathbb{R}^+$. Montrons que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est convergente. On a

$$P_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^{n+1} + \underbrace{\alpha_n^n + ... + \alpha_n - 1}_{P_n(\alpha_n)} = \alpha_n^{n+1} \geq 0 = P_{n+1}(\alpha_{n+1})$$

Puisque, la fonction P_{n+1} est croissante sur $[0, +\infty[$ et $\alpha_n, \alpha_{n+1} \in [0, +\infty[$, alors $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$ et ceci pour tout entier naturel $n \geq 1$. La suite $(\alpha_n)_n$ est donc décroissante, et puisqu'elle est minorée (par 0), elle est alors convergente.
2/ On sait que

$$P_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + ... + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1 - 1/2^{n+1}}{1 - 1/2} - 2 = 2 - \frac{1}{2^n} - 2 = -\frac{1}{2^n} \leq 0$$

Donc, pour tout entier naturel n, on a $\alpha_n \geq 1$. Appelons α la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$. On sait que pour tout entier naturel n, on a $1/2 \leq \alpha_n \leq 1$, un passage à la limite fournit $1/2 \leq \alpha \leq 1$, mais on sait que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a $\alpha_n \leq \alpha_2 < 1$, puisque 1 n'est pas racine du polynôme $X^2 + X - 1$. Un passage à la limite donne $\alpha \leq \alpha_2 < 1$. Donc, on a arriver à montrer que $\alpha \in [1/2, 1[$. Considérons maintenant un $0 < \epsilon < 1/2$, on a

$$P_n\left(\epsilon + \frac{1}{2}\right) = \left(\epsilon + \frac{1}{2}\right)^n + ... + \left(\epsilon + \frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{\left(\epsilon + \frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\epsilon - 1/2} - 2 = \frac{\left(\epsilon + \frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2\epsilon}{\epsilon - 1/2} \to \frac{4\epsilon}{1 - 2\epsilon} > 0$$

Donc, pour n suffisamment grand, on a $P_n\left(\epsilon + \frac{1}{2}\right) > 0$, par croissance de la fonction n, on a à partir d'un certain rang n_0, $\alpha_n \leq \epsilon + \frac{1}{2}$. On a finalement montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang n_0, tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $0 \leq \alpha_n - 1/2 \leq \epsilon$, et ceci est équivalent à dire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ converge vers $1/2$.

Exercice 25 (Radicaux itérés).
Soit a un réel strictement positif. Étudier la nature de la suite suivante et donner sa limite éventuelle.

$$r_n = a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + ... + \sqrt{a}}}} \quad (a \text{ apparait } n \in \mathbb{N}^* \text{ fois dans l'expression})$$

Solution.

On peut définir la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ comme suit $r_1 = a$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $r_{n+1} = a + \sqrt{r_n}$. Il s'agit donc d'une suite de type $u_{n+1} = f(u_n)$. Définissons la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = a + \sqrt{x}$, on a bien évidemment $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$. Notons d'abord que pour tout entier $n \geq 1$, on a $r_n \geq a$. Cherchons les points fixes de la fonction f sur $[a, +\infty[$, on a

$$f(x) = x \iff a + \sqrt{x} = x \iff x = x^2 - 2ax + a^2 \iff x \in \left\{\frac{2a+1-\sqrt{4a+1}}{2}, \frac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2}\right\}$$

On vérifie facilement que

$$\frac{2a+1-\sqrt{4a+1}}{2} < a < \frac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2}$$

Donc l'unique point fixe de f sur $[a, +\infty[$ est $\alpha = \dfrac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2}$. On sait que $r_1 = a < \alpha$, alors la croissance stricte de f sur $[0, +\infty[$ permet de voir que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $r_n < \alpha$. De plus, la suite $(r_n)_{n\geq 1}$ est croissante, puisque pour tout $0 \leq x < \alpha$, on a $f(x) \geq x$ (facile à vérifier). Finalement, on a prouvé que la suite $(r_n)_{n\geq 1}$ est croissante, et puisqu'elle est majorée (par α), elle est alors convergente vers l'unique point fixe α de la fonction f (f est continue sur $[0, +\infty[$) sur $[a, +\infty[$.

Exercice 26. Soient n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = (x-n)^3 + (x-n+1)^3 + ... + x^3 - (x+1)^3 - (x+2)^3 - ... - (x+n)^3$$

Montrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique réel α_n tel que $f(\alpha_n) = 0$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$.

Solution.

La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est une fonction polynômiale) et on a pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
f_n'(x) &= 3(x-n)^2 + 3(x-n+1)^2 + ... + 3(x-1)^2 + 3x^2 - 3(x+1)^2 - 3(x+2)^2 - ... - 3(x+n)^2 \\
&= 3[(x-n)^2 - (x+n)^2] + 3[(x-n+1)^2 - (x+n-1)^2] + ... + [(x-1)^2 - (x+1)^2] + 3x^2 \\
&= 3[-4nx] + 3[-4(n-1)x] + ... + 3[-4x] + 3x^2 = 3x^2 - 12x \times [n + (n-1) + ... + 1] \\
&= 3x^2 - 6n(n+1)x = 3x[x - 2n(n+1)]
\end{aligned}$$

En notant $\gamma_n = 2n(n+1)$, le tableau des variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ est comme suit

x	$-\infty$		0		γ_n		$+\infty$
$f_n'(x)$	$\cdot$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\cdot$
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$f(0) < 0$	$\searrow$	$f(\gamma_n) < 0$	$\nearrow$	$+\infty$

Dans l'intervalle $]-\infty, \gamma_n]$, l'équation $f_n(x) = 0$ n'admet pas de solution puisque le maximum de $f_n < 0$ sur cet intervalle. Mais, on a $f_n([\gamma_n, +\infty[) = [f_n(\gamma_n), +\infty[$ et $0 \in [f_n(\gamma_n), +\infty[$ ($f_n(\gamma_n) < 0$ car $f_n(\gamma_n) < f_n(0) < 0$), donc 0 admet un antécédent α_n par la fonction f_n, puisque celle-ci est strictement croissante sur $[\gamma_n, +\infty[$, alors α_n est unique. Or on sait que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a α_n, puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2n(n+1) = +\infty$, alors par comparaison, on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$.

➽ Un point fixe α d'une fonction f est un réel vérifiant $f(\alpha) = \alpha$.

CHAPITRE 3

FONCTIONS USUELLES ET DÉRIVATION

Exercice 1. On considère la suite de fonctions $(f_n(x))_{n\geq 2}$ définie par

$$f_n(x) = \sqrt[2n]{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}$$

Déterminer suivant les valeurs de x la limite $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Solution.

Commençons par remarquer que pour tout réel x, on a $x + \pi/2 \in \mathbb{R}$ et

$$f_n\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sqrt[2n]{\cos^{2n}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + \sin^{2n}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \sqrt[2n]{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)} = f_n(x)$$

Donc, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est $\frac{\pi}{2}$−périodique. Par conséquent, il suffit de déterminer $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Si $x = 0$, alors pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a

$$f_n(x) = f_n(0) = \sqrt[2n]{\cos^{2n}(0) + \sin^{2n}(0)} = 1 \to 1$$

Sinon, supposons que $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on définit la suite de fonctions $(g_n(x))_{n\geq 2}$ par $g_n(x) = \cos^{2n}(x) + \sin^{2n}(x)$ pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, la suite $(g_n(x))_{n\geq 2}$ est décroissante. En effet, on a pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout entier $n \geq 3$,

$$g_n(x) = \cos^{2n}(x) + \sin^{2n}(x) \leq \cos^2 x \cos^{2(n-1)} x + \sin^2 x \sin^{2(n-1)} x \leq \cos^{2(n-1)} x + \sin^{2(n-1)} x = g_{n-1}(x)$$

Donc pour tout réel $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et tout entier naturel $n \geq 2$, on a

$$g_n(x) \leq g_2(x) = \cos^4(x) + \sin^4(x) = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\cos^2 x \sin^2 x = 1 - 2\cos^2 x \sin^2 x < 1$$

Comme pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour tout entier $n \geq 2$ on a $f_n(x) = \sqrt[2n]{g_n(x)}$, on déduit que pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$0 \leq f_n(x) \leq \sqrt[2n]{1 - 2\cos^2 x \sin^2 x} \qquad (*)$$

par croissance de la fonction $t \mapsto \sqrt[2n]{t}$ sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, le coté de droite de $(*)$ converge vers 0. Donc par le théorème des gendarmes, on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Résumons, pour tout x qui s'écrit sous la forme $k \times \dfrac{\pi}{2}$ où k un entier, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ et si $x \neq k \times \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors on a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Exercice 2. On pose $x = \arctan\sqrt{2}$. Montrer que $0 < \pi - 2x < \dfrac{\pi}{2}$ puis déduire que

$$\arctan 2\sqrt{2} + 2\arctan\sqrt{2} = \pi$$

Solution.

On sait que $x = \arctan\sqrt{2} < \pi/2$, donc $0 < \pi - 2x$. Pour la deuxième inégalité, on sait que $1 < \sqrt{2}$, donc par croissance stricte de la fonction arctan, on a $\pi/4 < \arctan\sqrt{2} = x$, et par conséquent $\pi - 2x < \pi/2$.
Il s'agit de prouver que $\pi - 2\arctan\sqrt{2} = \arctan 2\sqrt{2}$. Puisque $0 < \pi - 2\arctan\sqrt{2} < \dfrac{\pi}{2}$, alors

$$\pi - 2\arctan\sqrt{2} = \arctan 2\sqrt{2} \iff \tan(\pi - 2\arctan\sqrt{2}) = \tan(\arctan 2\sqrt{2}) \iff -\tan(2\arctan\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

Mais on sait que

$$\tan(2\arctan\sqrt{2}) = \tan(\arctan\sqrt{2} + \arctan\sqrt{2}) = \frac{\tan(\arctan\sqrt{2}) + \tan(\arctan\sqrt{2})}{1 - \tan^2\arctan\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{1-2} = -2\sqrt{2}$$

Par équivalences successives, on obtient le résultat.

➻ En général, si a et b deux réels vérifiant $ab \neq 1$, on peut écrire $\arctan a + \arctan b$ en fonction de $\arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)$. Voir l'exercice suivant.

Exercice 3 (Une formule sur arctan).
1/ Soit x un nombre réel, écrire $\cos(\arctan x)$ et $\sin(\arctan x)$ en fonction de x.
2/ Soient a et b deux nombres réels tels que $ab \neq 1$.
Donner une expression de $\arctan a + \arctan b$ en fonction de $\arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)$.

Solution.

1/ On sait que

$$\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Or, on sait que $\arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos(\arctan x) > 0$ et par conséquent,

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

D'autre part, on a

$$\sin(\arctan x) = \cos(\arctan x) \times \tan(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

2/ On sait que

$$\begin{aligned}\cos(\arctan a + \arctan b) &= \cos\arctan a \times \cos\arctan b - \sin\arctan a \times \sin\arctan b \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2} \times \sqrt{1+b^2}} + \frac{ab}{\sqrt{1+a^2} \times \sqrt{1+b^2}} \\ &= \frac{1-ab}{\sqrt{1+a^2} \times \sqrt{1+b^2}}\end{aligned}$$

Et cette quantité est différente de 0 (puisque $ab \neq 1$). Donc $\tan(\arctan a + \arctan b)$ existe dans $\mathbb{R}$. Or, on sait que

$$\tan(\arctan a + \arctan b) = \frac{\tan(\arctan a) + \tan(\arctan b)}{1 - \arctan a \times \arctan b} = \frac{a+b}{1-ab} \qquad (*)$$

On sait que $\arctan a + \arctan b \in \left]-\pi, \pi\right[$ puisque $\arctan a, \arctan b \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et de plus $\arctan a + \arctan b \neq -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ puisque $\cos(\arctan a + \arctan b) \neq 0$. Distinguons deux cas, $ab < 1$, dans ce cas on a $\cos(\arctan a + \arctan b) > 0$ et alors $\arctan a + \arctan b \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $(*)$ entraîne $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$. Supposons maintenant que $ab > 1$, donc $\cos(\arctan a + \arctan b) < 0$, et alors $\arctan a + \arctan b \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Si on suppose de plus que $a > 0$, alors $\arctan a + \arctan b \in \left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, et ceci implique que $-\pi + \arctan a + \arctan b \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Par conséquent, en utilisant $(*)$, on trouve $-\pi + \arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ et par conséquent $\arctan a + \arctan b = \pi + \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$. Si on suppose $a < 0$, en procédant comme dans le cas où $a > 0$, on trouve $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) - \pi$.

Exercice 4. Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2}$$

Solution.

Écrivons

$$\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2} = \underbrace{\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+x}}_{f_1(x)} + \underbrace{\sqrt[4]{x^4+x^2} - \sqrt[3]{x^3+x}}_{f_2(x)}$$

Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$. On a

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+x}\\
&= \sqrt[6]{(x^2+1)^3} - \sqrt[6]{(x^3+x)^2}\\
&= \frac{(x^2+1)^3-(x^3+x)^2}{\sqrt[6]{(x^2+1)^{15}} + \sqrt[6]{(x^2+1)^{12}}\sqrt[6]{(x^3+x)^2} + ... + \sqrt[6]{(x^3+x)^{10}}}\\
&= \frac{x^6+3x^4+9x^2+1-x^6-2x^4-x^2}{\sqrt[6]{(x^2+1)^{15}} + \sqrt[6]{(x^2+1)^{12}(x^3+x)^2} + ... + \sqrt[6]{(x^3+x)^{10}}}\\
&= \frac{x^4+8x^2}{\sqrt[6]{(x^2+1)^{15}} + \sqrt[6]{(x^2+1)^{12}(x^3+x)^2} + ... + \sqrt[6]{(x^3+x)^{10}}}
\end{aligned}$$

En observant que pour tout $i,j\in\{0,2,..,,5\}$ avec $i+j=5$, on a

$$\sqrt[6]{(x^2+1)^{3i}(x^3+x)^{2j}} = \sqrt[6]{x^{6i+6j}+P_{i,j}(x)} = \sqrt[6]{x^{30}+P_{i,j}(x)} = x^5\sqrt[6]{1+\frac{P_{i,j}(x)}{x^{30}}}$$

avec les $P_{i,j}$ sont des fonctions polynômiales de degrés <30. Par conséquent

$$f_1(x) = \frac{1+8/x^3}{x\left(\sqrt[6]{1+\frac{P_{5,0}(x)}{x^{30}}} + \sqrt[6]{1+\frac{P_{4,1}(x)}{x^{30}}} + ... + \sqrt[6]{1+\frac{P_{0,5}(x)}{x^{30}}}\right)}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=0$. On montrer de même que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)=0$. Et alors

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2} = 0$$

Exercice 5. Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(x+1)-\arctan(x)}{\sin\left(\frac{1}{x+1}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Solution.

On va utiliser le fait que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a $\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ et un un cas particulier du résultat de l'exercice 3. On a pour tous $a,b\geq 0$,

$$\arctan a - \arctan b = \arctan a + \arctan(-b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right) \qquad \text{(puisque } -ab\leq 0<1)$$

Écrivons pour tout $x>0$

$$\begin{aligned}
\frac{\arctan(x+1)-\arctan(x)}{\sin\left(\frac{1}{x+1}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right)} &= \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x+1}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right)}\\
&= \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x+1}\right)}
\end{aligned}$$

$$\frac{\arctan(x+1)-\arctan(x)}{\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)-\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{\arctan\left(\frac{1/x-1/(x+1)}{1+1/x(x+1)}\right)}{2\cos\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)\sin\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)}$$

$$= \frac{\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)}{2\cos\left(\frac{2x+1}{x(x+1)}\right)\sin\left(\frac{1}{x(x+1)}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\cos\left(\frac{2x+1}{x^2+x}\right)} \times \frac{x^2+x}{x^2+x+1} \times \frac{(x^2+x+1)\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)}{(x^2+x)\sin\left(\frac{1}{x^2+x}\right)}$$

Or avec un simple changement de variable, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+x+1)\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}(x^2+x)\sin\left(\frac{1}{x^2+x}\right) = 1$$

Et puisque

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{x^2+x+1} = \lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{2x+1}{x^2+x}\right) = 1$$

Alors

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan(x+1)-\arctan(x)}{\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)-\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{2}$$

Exercice 6. Soient $n, m \geq 2$ deux entiers naturels. On considère la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par

$$f(x) = \frac{1}{n(1-\sqrt[n]{\cos x})} - \frac{1}{m(1-\sqrt[m]{\cos x})}$$

Montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité en $x_0 = 0$.

Solution.

Il s'agit de montrer que la fonction f admet une limite finie en $x_0 = 0$. Notons d'abord que la fonction f est définie au voisinage de $x_0 = 0$. Pour déterminer $\lim_{n\to 0} f(x)$, on va effectué le changement de variable suivant, $X = \sqrt[nm]{\cos x}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{X\to 0}\left[\frac{1}{n(1-X^m)} - \frac{1}{m(1-X^n)}\right] = \lim_{X\to 0}\frac{m\times\sum_{k=0}^{n-1}X^k - n\times\sum_{k=0}^{m-1}X^k}{nm\times\sum_{k=0}^{m-1}X^k\times\sum_{k=0}^{n-1}X^k\times(1-X)}$$

$$= \frac{m\times\frac{n(n-1)}{2} - n\times\frac{m(m-1)}{2}}{mn\times mn} = \frac{(n-1)-(m-1)}{2nm} = \frac{n-m}{2nm}$$

Donc la fonction f admet un prolongement g par continuité définie par $g(x) = f(x)$ pour $x \neq 0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $g(0) = \frac{n-m}{2nm}$.

Exercice 7. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant pour tout $x \in [0,1]$,

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 3f(x)$$

Montrer que f est identiquement nulle.

Solution.

Première méthode. La fonction f étant continue sur $[0,1]$, l'image de $[0,1]$ par f est un segment $[m, M]$. Soit $y = f(x)$, on sait que

$$3y = 3f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \in [2m, 2M]$$

Par conséquent $y \in \left[\frac{2m}{3}, \frac{2M}{3}\right]$, une récurrence immédiate montre que pour tout entier naturel non nul n, on a $y \in \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n m, \left(\frac{2}{3}\right)^n M\right]$, c'est à dire pour tout entier naturel non nul n, on a $\left(\frac{2}{3}\right)^n m \leq y \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n M$, en faisant tendre n vers ∞, on obtient $y = 0$, c'est à dire $f(x) = 0$ et ceci pour tout $x \in [0,1]$, la fonction f est donc identiquement nulle.
Seconde méthode. La fonction f étant continue sur $[0,1]$, il en est de même pour $|f|$ comme composée de deux fonctions continues. Soit s le maximum de la fonction $|f|$ sur $[0,1]$, ce maximum est atteint pour un certain $a \in [0,1]$, c'est à dire $s = |f(a)|$, on a

$$3s = 3|f(a)| = \left|f\left(\frac{a}{2}\right) + f\left(\frac{a+1}{2}\right)\right| \leq \left|f\left(\frac{a}{2}\right)\right| + \left|f\left(\frac{a+1}{2}\right)\right| \leq s + s = 2s$$

Donc $s = 0$, donc pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) = 0$ et ceci est équivaut à dire que la fonction f est identiquement nulle.

Exercice 8. Soit n un entier naturel non nul. Calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \prod_{k=2}^{2n+1} \sqrt[k]{1 + (-1)^k x}}{x}$$

Solution.

Soit n un entier naturel non nul. En remarquant que

$$1 - a_1 a_2 ... a_{2n+1} = 1 - a_1 + a_1(1 - a_2) + a_1 a_2 (1 - a_3) + ... + a_1 \times ... \times a_{2n}(1 - a_{2n+1})$$

Écrivons

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \prod_{k=2}^{2n+1} \sqrt[k]{1 + (-1)^k x}}{x} &= \frac{1 - \sqrt{1+x} + \sqrt{1+x}\sqrt[3]{1-x} - \sqrt{1+x}\sqrt[3]{1-x} + ... + \prod_{k=2}^{2n} \sqrt[k]{1 + (-1)^k x} - \prod_{k=2}^{2n+1} \sqrt[k]{1 + (-1)^k x}}{x} \\
&= \frac{1 - \sqrt{1+x}}{x} + \sqrt{1+x} \times \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{x} + ... + \prod_{k=2}^{2n} \sqrt[k]{1 + (-1)^k x} \times \frac{1 - \sqrt[2n+1]{1-x}}{x}
\end{aligned}$$

Mais, en posant $f_p(x) = \sqrt[p]{1+(-1)^p x}$ pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$ et pour tout $p \in \{2, 3, ..., 2n+1\}$. Pour tout $p \in \{2, 3, ... + 2n+1\}$, la fonction f_p est dérivable en zéro et on a $f_p'(0) = (-1)^p/p$, donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \displaystyle\prod_{k=2}^{2n+1} \sqrt[k]{1+(-1)^k x}}{x} = f_2'(0) + f_3'(0) + ... + f_{2n}'(0) + f_{2n+1}'(0)$$

Finalement, on obtient

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \displaystyle\prod_{k=2}^{2n+1} \sqrt[k]{1+(-1)^k x}}{x} = \sum_{p=2}^{2n+1} \frac{(-1)^p}{p}$$

➽ Utiliser la même technique pour calculer la limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \cos(kx)}{x^2}$.

➽ On peut calculer la limite autrement en justifiant son existence dans $\mathbb{R}$, puis en considérant la suite de terme général

$$U_n = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \displaystyle\prod_{k=2}^{2n+1} \sqrt[k]{1+(-1)^k x}}{x}$$

puis trouver une relation de récurrence reliant U_n et U_{n-1}.

Exercice 9 (La parité et les primitives).
1/ Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que f' soit impaire et $f(0) = 0$. Montrer que f est une fonction paire.
2/ Que peut-on dire si f' est supposé paire sous l'hypothèse $f(0) = 0$?

Solution.

D'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-x$. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(-x) - f(x)$. Montrons que la fonction g est constante. La fonction g est dérivable (par opérations) sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -f'(-x) - f'(x) = f'(x) - f'(x) = 0$ puisque la fonction f' est impaire. Donc, la fonction g est constante et par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = g(0) = 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = f(x)$ et ceci est équivaut à dire que la fonction f est paire.
2/ La fonction f est impaire. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) + f(-x)$. Montrons que la fonction h est constante, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ (par opérations) et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = f'(x) - f'(-x) = 0$ puisque la fonction f' est paire. Donc, la fonction h est constante et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(0) = 0$ et alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = -f(-x)$ et ceci est équivaut à dire que la fonction f est impaire.

➽ Un résultat similaire que la dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire tandis que la dérivée d'une fonction impaire est une fonction paire.

Exercice 10. Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Déterminer en fonction de n la valeur de la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k$$

Solution.

On va d'abord commencer par déterminer en fonction de n la somme $S'_n = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k$. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est une fonction polynômiale) et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^{k-1}$$

Remarquons que $S'_n = F'(1) = n2^{n-1}$. Pour S_n, on sait que la fonction F est dérivables deux fois sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)C_n^k x^{k-2} = \sum_{k=2}^{n} k^2 C_n^k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{n} kC_n^k x^{k-2}$$

Donc

$$n(n-1)2^{n-2} = F''(1) = S_n - 1 - S'_n + 1 = S_n - S'n = S_n - n2^{n-1}$$

Et par conséquent

$$S_n = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$$

Exercice 11. Parmi tous les losanges qui ont le même périmètre p, quel est celui qui a la plus grande surface ?

Solution.

Notons x un diamètre d'un losange et a l'autre diamètre. Soit $S(x)$ la surface de ce losange. On sait que $S(x) = ax$. On va déterminer a en fonction de p et x, d'après le théorème de Pythagore, on sait que

$$\frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{4}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} \Longrightarrow a = \sqrt{\frac{p^2}{4} - x^2} = \frac{\sqrt{p^2 - 4x^2}}{2}$$

Donc $S(x) = \dfrac{x\sqrt{p^2-4x^2}}{2}$, il s'agit de déterminer le maximum de la fonction $S(x)$. La fonction S est dérivable sur $[0, p/2[$ et on a pour tout $x \in [0, p/2[$,

$$S'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{p^2-4x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{p^2-4x^2}}\right) = \frac{-4x^2 - 4x^2 + p^2}{2\sqrt{p^2-4x^2}} = \frac{-8x^2 + p^2}{2\sqrt{p^2-4x^2}}$$

Et on a

$$S'(x) = 0 \iff -8x^2 + p^2 = 0 \iff x = \frac{\sqrt{2}p}{4}$$

Le tableau des variations de la fonction S est comme suit

x	$-\infty$		0		$\sqrt{2}p/4$		$p/2$		$+\infty$
$S'(x)$				$+$	0	$-$	$\|\|$		$\|\|$
S			.	$\nearrow$	$p^2/8$	$\searrow$	0		$\|\|$

La valeur maximale que peut prendre un losange de périmètre p est $p^2/8$, tel que un de ces diamètres vaut $\sqrt{2}p/4$. Soit a le second diamètre d'un losange de surface maximale (son périmètre étant p). On sait que $a \times \frac{\sqrt{2}p}{4} = \frac{p^2}{8}$, et alors $a = \frac{\sqrt{2}p}{4}$. Finalement la nature d'un losange de surface maximale avec un périmètre donné est un carré.

Exercice 12. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Solution.

Puisque pour tout $n \geq 2$, on a $\sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$, il s'agit donc de montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq n_0 \Longrightarrow \sqrt[n]{n} - 1 < \epsilon$$

Et ceci est équivaut à dire que

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq n_0 \Longrightarrow n < (\epsilon + 1)^n$$

Puisque pour tout $\epsilon > 0$, et pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$(1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2 + ... + \epsilon^n > \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2$$

Il suffit donc de montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2 > n \iff n > \frac{2}{\epsilon^2} + 1$$

Il suffit donc de prendre $n_0 = E\left(1 + \frac{2}{\epsilon}\right) + 1 = E\left(\frac{2}{\epsilon^2}\right) + 2$ pour un $\epsilon > 0$ donné. Résumons, pour tout $\epsilon > 0$, on a trouvé un $n_0 = E\left(\frac{2}{\epsilon^2}\right) + 2$, tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon$. Et ceci est équivaut à dire que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

➳ Cette limite peut être évaluée immédiatement en utilisant la fonction logarithme, mais l'avantage de la méthode proposée est qu'elle est plus générale.

CHAPITRE 4

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1. Déterminer le module et l'argument du nombre complexe

$$z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Solution.

On sait que

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{\sqrt{2-\sqrt{2}}^2 + \sqrt{2+\sqrt{2}}^2} = 2$$

Soit θ l'argument de z qu'on peut choisir dans $[0, \pi/2]$ puisque $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) \geq 0$, de plus $\cos\theta = \sqrt{2+\sqrt{2}}/2$ et $\sin\theta = \sqrt{2-\sqrt{2}}/2$, et alors

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta \times \cos\theta = \frac{2\sqrt{2+\sqrt{2}} \times \sqrt{2-\sqrt{2}}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et puisque $2\theta \in [0, \pi]$, alors $2\theta = \pi/4$, et par conséquent $\theta = \pi/8$. En conclusion, le module de z est 2 et son argument est $\pi/8$.

Exercice 2 (Inégalité du parallélogramme).
Montrer que pour tous nombres complexes z et z', on a l'inégalité

$$|z| + |z'| \leq |z+z'| + |z-z'|$$

Solution.

Soient z et z' deux nombres complexes. D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$2|z| = |2z| = |z + z' + z - z'| \leq |z+z'| + |z-z'|$$

Et aussi
$$2|z'| \leq |z'+z| + |z'-z| = |z+z'| + |z-z'|$$
Donc, en sommant on obtient
$$2|z| + |z'| \leq 2|z+z'| + 2|z-z'|$$
Et par conséquent, on obtient
$$|z| + |z'| \leq |z+z'| + |z-z'|$$

➽ On peut interpréter géométriquement cette inégalité par le fait que la somme des longueurs des deux côtés du parallélogramme est inférieur à la somme des longueurs des deux diagonales.

Exercice 3. Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectifs a, b et c.
Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$.

Solution.

On désigne par j le nombre complexe $e^{2i\frac{\pi}{3}}$. Supposons que le triangle ABC est équilatéral. On peut supposer que C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et que A est l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si
$$c-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) \qquad \text{et} \qquad a-b = e^{i\frac{\pi}{3}}(c-b)$$
Donc si le triangle ABC est équilatéral, alors
$$\left(\frac{a-b}{a-c}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = j^{-2} + j^2 = j + j^2 = -1$$
Par conséquent,
$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 = 0$$
C'est à dire
$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0$$
Alors $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$. Réciproquement, supposons que $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$. Remarquons que
$$(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj) = a^2+b^2+c^2+(j+j^2)ab+(j+j^2)bc+(j+j^2)ca = a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = 0$$
Donc $a+bj+cj^2 = 0$ ou $a+bj^2+cj = 0$. Supposons par exemple que $a+bj+cj^2 = 0$, alors $a+bj+bj^2-bj^2+cj^2 = 0$, et alors $\frac{a-b}{b-c} = j^2$, par conséquent $AB = |b-a| = |c-b| = BC$ et $\overline{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})} \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$ et par conséquent le triangle ABC est équilatéral.

➽ On pourrait montrer l'équivalence directement en partant par des équivalences dans la réciproque.
➽ Le nombre complexe j vérifie $j^2+j+1 = 0$. Il est caractérisé par le fait qu'il est l'unique racine cubique de l'unité dont la partie imaginaire est strictement positive.

Exercice 4. Quelle est l'image du cercle unité privé du point d'affixe 1 par l'application $z \mapsto \frac{1}{1-z}$?

Solution.

Soit $M(z)$ un point du cercle unité privé du point d'affixe $z_0 = 1$. Il existe un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$. On a

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-e^{i\theta}} = e^{-i\frac{\theta}{2}} \times \frac{1}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} = e^{-i\frac{\theta}{2}} \times \frac{i}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \times \frac{i}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Quand θ parcourt $]0, \pi[$, $\theta/2$ parcourt $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et alors $\cot(\theta/2)$ parcourt $\mathbb{R}$. L'image du cercle unité privé du point d'affixe 1 par l'application $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$ est la droite Δ d'équation $x = 1/2$.

Exercice 5. On munit de plan complexe par un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé direct. Soient $M(z)$ et $M'(z')$ deux points différents de O et différents tels que les affixes z et z' vérifient $|z + z'| = |z| + |z'|$. Montrer que les points O, M et M' sont alignés.

Solution.

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ les formes algébriques des nombres complexes z et z'. On sait que

$$\sqrt{(x + x')^2 + (y + y')^2} = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

El élevant au carré les deux côtés, on obtient

$$xx' + yy' = \sqrt{(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)} \iff 2xx'yy' = x^2y'^2 + x'^2y^2 \iff (xy' - x'y)^2 = 0 \iff xy' = x'y$$

Si par exemple $x' \neq 0$, alors $y' \neq 0$, puis $x/x' = y/y'$, nommons ce nombre réel k. D'après ce qui précède, si deux nombres complexes différents z et z' et différents de 0 vérifient $|z + z| = |z| + |z'|$, alors $z = x + iy = kx' + iky' = k(x' + iy') = kz'$ et ceci équivaut à dire que les points O, M et M' sont alignés.

➽ Le résultat ci-dessus donne une caractérisation géométrique du cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire portant sur les nombres complexes.

Exercice 6. Soient a et $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ des nombres réels et n un entier naturel non nul. Simplifier les sommes

$$S = \sum_{k=0}^{n} \sin(a + kx) \qquad \text{et} \qquad S' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx)$$

Solution.

$$S = \sum_{k=0}^{n} \sin(a + kx) = \sum_{k=0}^{n} \sin a \cos(kx) + \sum_{k=0}^{n} \cos a \sin(kx) = \sin a \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)}_{S_1} + \cos a \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)}_{S_2}$$

On a alors besoin de calculer S_1 et S_2, on sait que

$$S_1 + iS_2 = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{i\frac{x}{2}} \times e^{i\frac{n+1}{2}x} \times \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x} - e^{-i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = \left[\cos\left(\frac{n}{2}x + x\right) + i\sin\left(\frac{n}{2}x + x\right)\right] \frac{\sin\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

En comparant, on obtient

$$S_1 = \cos\left(\frac{n}{2}x + x\right) \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sin\left(\frac{n}{2}x + x\right) \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} S = \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kx) &= \sin a \times \cos\left(\frac{n}{2}x + x\right) \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \cos a \times \sin\left(\frac{n}{2}x + x\right) \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left[\sin a \times \cos\left(\frac{n}{2}x + x\right) + \cos a \times \sin\left(\frac{n}{2}x + x\right)\right] \\ &= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \sin\left(a + \frac{n+1}{2}x\right) \end{aligned}$$

Pour la somme S', écrivons

$$\begin{aligned} S' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ikx} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{-ikx} &= \frac{(1+e^{ix})^n + (1+e^{-ix})^n}{2} = \frac{e^{i\frac{n}{2}x}(e^{i\frac{1}{2}x} + e^{-i\frac{1}{2}x}) + e^{-\frac{n}{2}x}(e^{i\frac{1}{2}x} + e^{-i\frac{1}{2}x})}{2} \\ &= \cos\left(\frac{n}{2}x\right)(e^{i\frac{1}{2}x} + e^{-i\frac{1}{2}x}) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \times \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \end{aligned}$$

En conclusion

$$S = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \sin\left(a + \frac{n+1}{2}x\right) \qquad \text{et} \qquad S' = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \times \cos\left(\frac{n}{2}x\right)$$

Exercice 7. On désigne par $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Montrer que pour tous a, b et c des éléments de $\mathbb{U}$ on a

$$|a+b+c| = |ab+bc+ca|$$

Solution.

On va montrer que $|ab+bc+ca|^2 = |a+b+c|^2$. On sait que

$$\begin{aligned} |ab+bc+ca|^2 = (ab+bc+ca) \times \overline{ab+bc+ca} = (ab+bc+ca) \times \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) &= \frac{ab+bc+ca}{abc} \times (a+b+c) \\ = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \times (a+b+c) = (\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}) \times (a+b+c) &= |a+b+c|^2 \end{aligned}$$

Et ceci achève la preuve.

➽ Il est important de se souvenir de la propriété très utile ; un nombre complexe est de module 1 si et seulement si $\overline{z} = 1/z$.

Exercice 8 (Les coordonnées entières).
1/ Soit $ABCD$ un carré dans le plan complexe. Prouver que, si A et B sont à coordonnées entières, il en est de même de C et D.
2/ Peut-on trouver un triangle équilatéral dont les trois sommets sont à coordonnées entières ?

Solution.

1/ On note $a = x + iy$ et $b = x' + iy'$ les affixes respectifs de A et B. Par hypothèse, x, x', y et y' sont des entiers. Puisque $ABCD$ est un carré, D est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$. Traduit en termes de nombres complexes, si d est l'affixe de D, ceci signifie que

$$d - a = i(b - a) \Longrightarrow d = a + i(b - a) = x + iy + ((x - x') + i(y - y')) = x + y - y' + i(y + x' - x)$$

Ainsi, les coordonnées de D sont bien des entiers. Pour prouver que les coordonnées de C sont des entiers, on procède de la même façon, en utilisant cette fois le fait que C est l'image de A dans la rotation de centre D et d'angle $\pi/2$.
2/ Imaginons maintenant que ABC soit un triangle équilatéral dont les trois sommets sont à coordonnées entières, et gardons les notations précédentes. Alors, C, d'affixe $c = x'' + iy''$ est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\pi/3$. Autrement dit,

$$c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a) \Longrightarrow c = (x + iy) + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)((x - x') + i(y - y'))$$

En développant, on trouve

$$c = x + \frac{x - x'}{2} - \frac{\sqrt{3}(y' - y)}{2} + i\left(y + \frac{y' - y}{2} + \frac{\sqrt{3}(x' - x)}{2}\right)$$

Pour que la partie réelle de c soit un entier, il est nécessaire que $y = y'$ et pour que la partie imaginaire de c soit nulle, il est nécessaire que $x = x'$. Finalement, ceci entraîne $A = B$, c'est-à-dire que le triangle est réduit à un point !

Exercice 9 (Inégalités sur les nombres complexes).
1/ Montrer que pour tous nombres complexes u et v, on a

$$\frac{|u + v|}{1 + |u + v|} \leq \frac{|u|}{1 + |u|} + \frac{|v|}{1 + |v|}$$

2/ Soient $z_1, z_2, ..., z_n$ des nombres complexes. Montrer que

$$\frac{\left|\sum_{k=0}^{n} z_k\right|}{1 + \left|\sum_{k=0}^{n} z_k\right|} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{1 + |z_k|}$$

3/ Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer que

$$|z + z'|^2 \leq (1 + |z|^2) \times (1 + |z'|^2)$$

Solution.

1/ Notons D le côté droit de l'inégalité et G le côté gauche de l'inégalité. Il est facile de voir que

$$D = \frac{|u| + |v| + 2|uv|}{1 + |u| + |v| + |uv|} \geq \frac{|u| + |v| + |uv|}{1 + |u| + |v| + |uv|} \geq \frac{|u+v|}{1 + |u+v|} = G$$

Puisque $|u| + |v| + |uv| \geq |u+v|$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ est croissante.
2/ Utiliser la question **1**/ et une récurrence simple.
3/ On montre que la différence $(1+|z|^2) \times (1+|z'|^2) - |z+z'|^2$ est toujours positive. On a pour tous nombres complexes z et z',

$$\begin{aligned}(1+|z|^2) \times (1+|z'|^2) - |z+z'|^2 &= 1 + |z|^2 + |z'|^2 + |zz'|^2 - (z+z') \times (\overline{z} + \overline{z'}) \\ &= 1 + |zz'|^2 - z\overline{z'} - \overline{z}z' \\ &= 1 + z\overline{z'}z'\overline{z'} - z\overline{z'} - \overline{z}z' \\ &= (1 - z\overline{z'}) \times (1 - \overline{z}z') \\ &= |1 - z\overline{z'}|^2\end{aligned}$$

D'où l'inégalité souhaitée.

Exercice 10 (Une inégalité géométrique).
Soit $z \in^*$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$ son argument principal. Montrer que

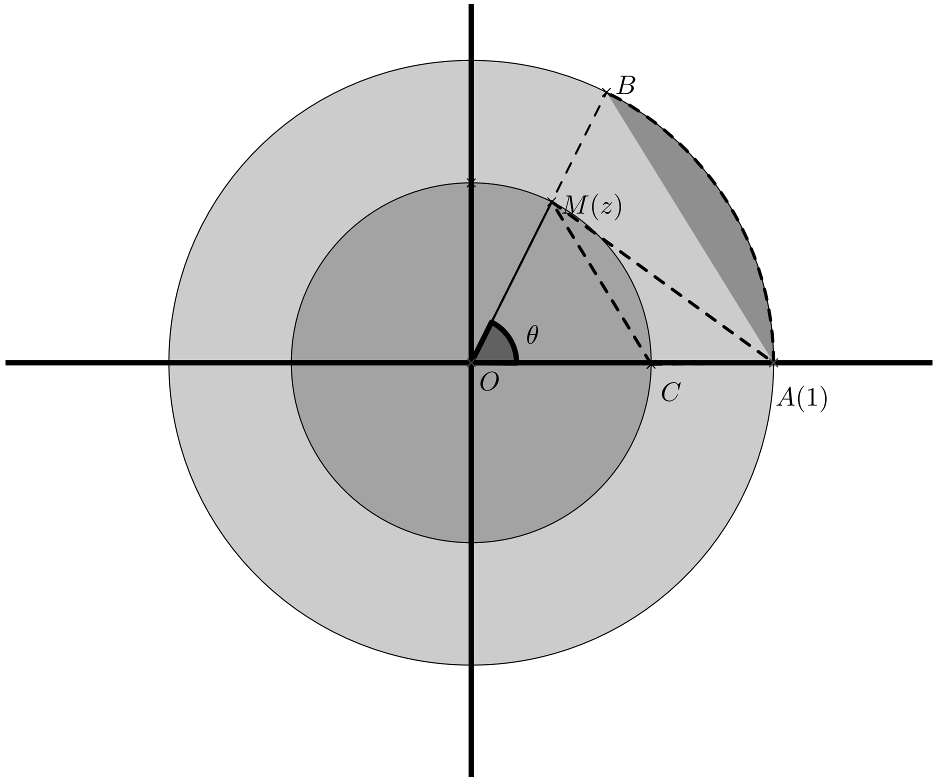
$$|z-1| \leq ||z| - 1| + |z\theta|$$

Solution.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument principal $\theta \in]-\pi, \pi]$. Soit M le point du plan complexe d'affixe z, A le point du plan complexe d'affixe 1. Soient B le point d'intersection du cercle unité $\mathcal{C}$ et la droite (OM) et C le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon r et l'axe des abscisses. Supposons que $|z| \leq 1$. Désignons par a l'arc d'extrémités M et C. Il s'agit de montrer que

$$AM = |z-1| \leq ||z| - 1| + |z\theta| = BM + a = CA + a$$

Mais on sait déjà d'après l'inégalité triangulaire que $CA + a \geq CA + CM \geq AM$. D'où le résultat. Pour le cas $|z| > 1$, on montre l'inégalité de manière similaire.



➽ On peut montrer cette inégalité à la main en écrivant l'écriture exponentielle de z et en utilisant de bonnes majorations.

Exercice 11. Soient $z_1, z_2, ..., z_n$ des nombres de même module tous non nuls. Montrer que le rapport

$$\frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)\dots(z_n+z_1)}{z_1 z_2 \dots z_n}$$

est un nombre réel.

Solution.

Première méthode. Soit $z_{n+1} = z_1$. Écrivons pour tout $p \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, $z_p = re^{i\theta_p}$ l'écriture exponentielle de z_p. En utilisant l'identité d'Euler, le rapport en question vaut

$$R = \frac{\displaystyle\prod_{p=1}^{n} r(e^{i\theta_p} + e^{i\theta_{p+1}})}{\displaystyle\prod_{p=1}^{n} re^{i\theta_1}} = \frac{\displaystyle\prod_{p=1}^{n} e^{i\frac{\theta_p+\theta_{p+1}}{2}} \prod_{p=1}^{n} \left(e^{i\frac{\theta_p-\theta_{p+1}}{2}} + e^{-i\frac{\theta_p-\theta_{p+1}}{2}}\right)}{e^{i(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n)}} = \prod_{p=1}^{n} \left(e^{i\frac{\theta_p-\theta_{p+1}}{2}} + e^{-i\frac{\theta_p-\theta_{p+1}}{2}}\right) = 2^n \prod_{p=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_p - \theta_{p+1}}{2}\right)$$

Donc R est un nombre réel.
Seconde méthode. Quitte à multiplier par $r > 0$, on peut supposer $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = 1$ et par conséquent pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ on a $\overline{z_i} = 1/z_i$. Appelons R le rapport en question, il s'agit de montrer que $\overline{R} = R$, ce qui est facile à voir.

Exercice 12. Soient $z_1, z_2, ..., z_n$ les solutions complexes de l'équation $z^n = 1$ d'inconnu z. Dans le plan complexe, soit M_i le point d'affixe $(1 + z_i)^n$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Montrer que les points M_i sont tous alignés.

Solution.

On va montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, le point M_1 d'affixe 1 appartient à la droite $(M_i M_{i+1})$. Pour $i = 1$, c'est évident. Supposons $i \geq 2$, il s'agit de montrer que le rapport $R = \dfrac{(1+z_{i+1})^n - 1}{(1+z_i)}$ est un nombre réel. Or, puisque pour tout $i\{2, ..., n-1\}$ on a $|z_i| = 1$, alors

$$\overline{R} = \frac{\overline{(1+z_{i+1})^n - 1}}{\overline{(1+z_i)^n - 1}} = \frac{(1+\overline{z_{i+1}})^n - 1}{(1+\overline{z_i})^n - 1} = \frac{(1+1/z_{i+1})^n - 1}{(1+1/z_i)^n - 1} = \frac{(1+z_{i+1})^n - 1}{(1+z_i)^n - 1} = R$$

Donc, pour tout $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$, les points $M_1(z_1), M_i$ et M_{i+1} sont alignés. Par conséquent, tous les points M_i sont alignés.

Exercice 13. Soit n un entier naturel ≥ 2. Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Solution.

C'est classique ! Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Considérons le polynôme $P = X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1$, pour tout $z \in \mathbb{U}_n$ différent de 1 ($\mathbb{U}_n$ étant l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité), on a $P(z) = 0$, les $z \in \mathbb{U}$ différents de 1 étant en nombre $n-1$, le polynôme unitaire P de degré $n-1$ s'écrit $P = \prod_{p=1}^{n-1}(X - \omega^p)$ où $\omega = e^{2i\frac{\pi}{n}}$. En particulier

$$n = P(1) = \prod_{p=1}^{n-1}(1-\omega^p) = \prod_{p=1}^{n-1} \omega^{\frac{p}{2}} \times \prod_{p=1}^{n-1}(e^{-ip\frac{\pi}{n}} - e^{ip\frac{\pi}{n}}) = 2^{n-1} i^{n-1} \omega^{\frac{n(n-1)}{4}} \times \prod_{p=1}^{n-1} \sin\left(-p\frac{\pi}{n}\right) = 2^{n-1} \prod_{p=1}^{n-1} \sin\left(p\frac{\pi}{n}\right)$$

Puisque $i^{n-1}\omega^{\frac{n(n-1)}{4}} = (-1)^{n-1}$ (à vérifier). Finalement, on en déduit que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Exercice 14 (Une équation à inconnu complexe).
Trouver tous les nombres complexes z vérifiant l'équation

$$\overline{z}(z-1) = z^2(\overline{z}-1)$$

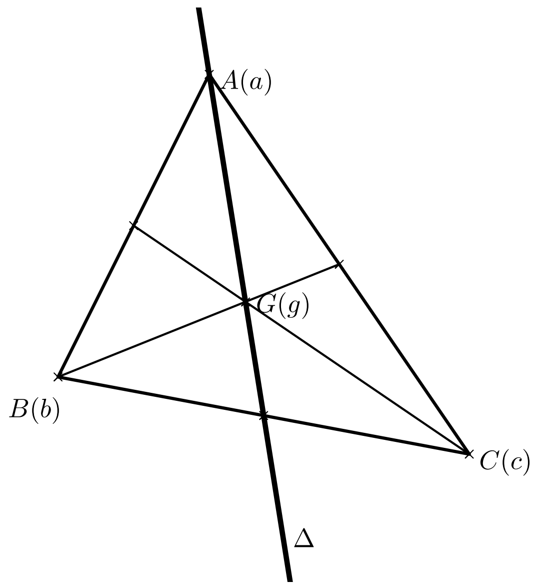
Solution.

Notons (E) l'équation en question. Il est clair que 0 et 1 sont solutions de l'équation (E). Supposons par la suite que z est différent de 0 et 1. Un passage au conjugué dans l'équation (E) montre que $z(\overline{z}-1) = \overline{z}^2(z-1)$, sachant que $z^2(\overline{z}-1) = \overline{z}(z-1)$, donc $z^2/z = \overline{z}/\overline{z}^2$, c'est à dire $z = 1/\overline{z}$, et par conséquent $|z| = 1$, réciproquement on vérifie facilement que tous les éléments de $\mathbb{U}$ (l'ensemble des nombres complexes de module 1) sont solutions de l'équation de (E). Finalement l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \mathbb{U} \cup \{0\}$.

Exercice 15 (Ensemble de points).
On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et considérons un triangle ABC où a, b et c les affixes respectifs des points A, B et C. Déterminer Δ l'ensemble des points du plan M d'affixe z vérifiant
$$\frac{z-a}{b+c-2a} \in \mathbb{R}$$

Solution.

Il est clair que $a \in \Delta$. Soit G d'affixe g le barycentre du triangle ABC, on sait que $g = (a+b+c)/3$. Remarquons que
$$\frac{z-a}{3(z-g)} = \frac{z-a}{3g-3a} = \frac{z-a}{b+c-2a} \in \mathbb{R}$$



Donc le rapport $(z-a)/(g-a)$ est un nombre réel et ceci est équivalent à dire que les points $M(z), A(a)$ et $G(g)$ sont alignés. Donc $M(z) \in (AG)$, et réciproquement tout point de la droite (AG) privée de G vérifie la condition donnée. En conclusion, Δ est la droite (AG) privée de G où G est le barycentre du triangle ABC.

Exercice 16. Soient p un entier naturel non nul et $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_p$ des nombres rationnels. Montrer qu'il existe deux nombres rationnels x et y tels que
$$\prod_{k=1}^{p} (a_k^2 + b_k^2) = x^2 + y^2$$

Solution.

Première méthode. On montre le résultat par récurrence. Pour $p = 1$, rien à démontrer. Pour $p = 2$, on a pour tous a, b, c et d des nombres rationnels.
$$(a^2+b^2) \times (c^2+d^2) = (ac)^2 + (bd)^2 + (bc)^2 + (ad)^2 = (\underbrace{ac+bd}_{A})^2 + (\underbrace{bc-ad}_{B})^2$$

Supposons que le résultat est vrai pour le rang $n \geq 2$ et montrons le pour le rang $n+1$. On se donne $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ et $b_1, \dots, b_n, b_{n+1}$ des nombres rationnels. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe x et y deux nombres rationnels tels que $\prod_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)=x^2+y^2$ et alors

$$\prod_{k=1}^{n+1}(a_k^2+b_k^2)=(a_{n+1}^2+b_{n+1}^2)\times\prod_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)=(a_{n+1}^2+b_{n+1}^2)(x^2+y^2)$$

Or, puisque le résultat est vrai pour le rang $n=2$, on déduit que le produit $\prod_{k=1}^{n+1}(a_k^2+b_k^2)$ est somme de deux carrés de nombres rationnels, et ceci achève la récurrence.
Seconde méthode. Pour tout $k\in\{1,2,\dots,p\}$, notons z_k le nombre complexe $z_k=a_k+ib_k$. Donc

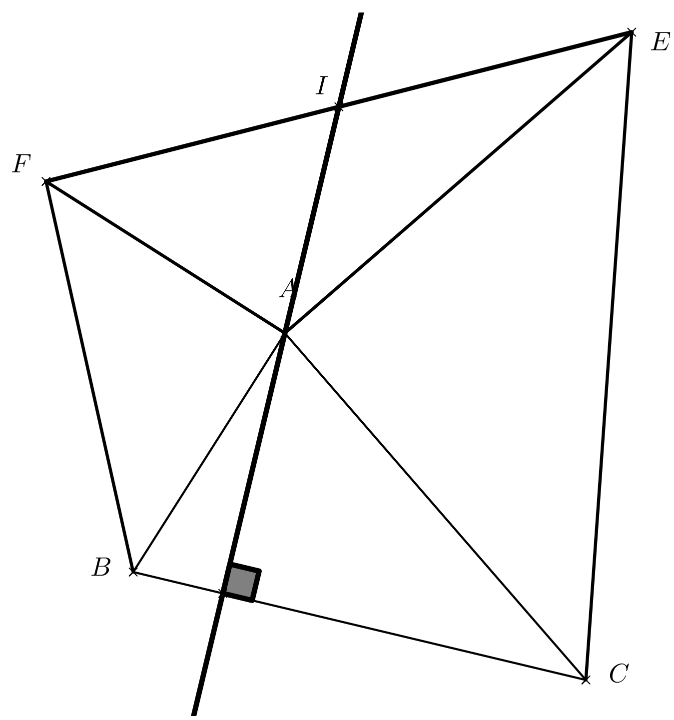
$$\prod_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)=\prod_{k=1}^{n}|z_k|^2=\Big|\underbrace{\prod_{k=1}^{n}z_k}_{Z}\Big|^2=\mathrm{Re}(Z)^2+\mathrm{Im}(Z)^2$$

Or la partie réelle et la partie imaginaire de Z sont des nombres rationnels (c'est facile à voir), d'où le résultat.

Exercice 17 (Nombres complexes et géométrie).
Soit ABC un triangle et AEC et AFB deux triangles isocèles et rectangles en A et I le milieu de $[EF]$.
Montrer que les droites (BC) et (IA) sont perpendiculaires et que $IA=BC/2$.

Solution.

On considère la figure ci-dessous.



Munissons le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. Soient a,b,c,e,f,z_I les affixes respectifs des points A,B,C,D,E et I. Les points E et F sont respectivement les images des points C et B par les rotations $r_1(A,AC)$ et $r_2(A,AB)$. Par conséquent $e=a+e^{i\frac{\pi}{2}}(c-a)$ et $f=a+e^{i\frac{\pi}{2}}(b-a)$. Or $I(z_I)$ est le milieu du segment $[EF]$, donc $z_I=(e+f)/2$. On vérifie facilement que

$$\frac{z_I-a}{c-b}=\frac{i}{2}$$

Donc les deux droites (AI) et (BC) sont perpendiculaires. D'autre part, on a

$$\frac{AI}{BC} = \frac{|z_I - a|}{|c - b|} = \frac{1}{2}$$

Et ceci entraîne que $AI = BC/2$.

Exercice 18 (Une suite de nombres complexes).
On considère la suite complexe (z_n) définie par $z_0 = 1 + i$ et

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}$$

pour tout entier naturel n. Montrer que la suite (z_n) converge et déterminer sa limite.

Solution.

Première méthode. Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = x_n + iy_n$ avec $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ pour tout entier naturel n. On a alors $x_0 = y_0 = 1$ et de plus pour tout entier naturel n, on a

$$x_{n+1} + iy_{n+1} = z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3} = \frac{x_n + iy_n + \sqrt{x_n^2 + y_n^2}}{3}$$

Par identification, on trouve pour tout entier naturel

$$y_{n+1} = \frac{1}{3}y_n, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n + \sqrt{x_n^2 + y_n^2}}{3}$$

Donc pour tout entier naturel n, on a $y_n = 1/3^n$ et $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \sqrt{x_n^2 + 1/9^n}}{3}$. De l'expression de (x_n), on peut montrer que la suite (x_n) converge. En effet, on vérifie immédiatement que $x_{n+1} \geq x_n/3$. Une récurrence immédiate permet de voir que pour tout entier naturel n, on a $x_n \geq 1/3^n$ et par conséquent

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + \sqrt{x_n^2 + 1/9^n}}{3} \leq \frac{x_n + \sqrt{x_n^2 + x_n^2}}{3} = \frac{(1 + \sqrt{2})x_n}{3} \leq x_n$$

Donc la suite (x_n) est décroissante, sachant qu'elle est minorée (par $1/3$), elle est alors convergente. De plus, en appelant x la limite de la suite réelle (x_n), un passage à la limite dans la relation de récurrence montre que $x = \dfrac{(1 + \sqrt{2})x}{3}$ et alors $x = 0$, sachant que la limite de la suite réelle (y_n) vaut 0, on conclut que la suite complexe (z_n) est convergente et sa limite vaut 0.
Seconde méthode. On a d'après l'inégalité triangulaire (sur les nombres complexes),

$$|z_{n+1}| = \frac{|z_n + |z_n||}{3} \leq \frac{|z_n| + |z_n|}{3} = \frac{2}{3}|z_n|$$

Une récurrence immédiate permet de voir que $|z_n| \leq (2/3)^n\sqrt{2}$, sachant que $(2/3)^n \to 0$ quand $n \to \infty$, donc par comparaison on déduit que la suite complexe (z_n) est convergente et que sa limite vaut 0.

➽ L'avantage de la première méthode est qu'elle est plus générale que la seconde, en effet cette méthode peut être utilisée de manière inverse ; plus précisément, étant donnée un couple de suites réelles, on peut étudier leur convergence en les regardant comme étant les parties réelles et imaginaires d'une suite de nombres complexes.

Exercice 19. Montrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet une racine réelle.

Solution.

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair. Le nombre complexe α est une racine de P si et seulement si $\overline{\alpha}$ l'est. Comptées avec leurs multiplicités, le polynôme P admet un nombre impair de racines complexes, par conséquent il existe une racine complexe de P qui coïncide avec son conjugué. C'est donc une racine réelle.

➽ On a utilisé le fait que tout polynôme à coefficients de degré n admet exactement n racines complexes comptées avec leurs multiplicités.

CHAPITRE 5

LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES

Exercice 1. Montrer que pour tout entier naturel non nul $n \geq 2$, on a

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Solution.

Notons que pour tout nombre réel $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leq x$ (inégalité qu'on peut démontrer par exemple par une étude rapide de fonction). De cette inégalité on va dériver une inégalité aussi importante. En effet, pour $x > 0$, on a $\ln(1-1/x) \leq -1/x$. En particulier, pour un entier naturel $n \geq 2$, on a $\ln(1-1/n) \leq -1/n$, par la suite on obtient

$$e \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

D'autre part, on a

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} \leq e^{n\times\frac{1}{n}} = e$$

D'après la première inégalité notée et le caractère croissant de la fonction exponentielle. D'où le résultat.

➽ On peut montrer que les deux suites de termes généraux $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$ sont adjacentes de limite commune e.

Exercice 2 (Lemme de Gibbs).
Soient n un entier naturel non nul et $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ des nombres réels strictement positifs vérifiant $p_1 + \ldots + p_n = q_1 + \ldots + q_n = 1$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{p} p_i \ln q_i \leq \sum_{i=1}^{p} p_i \ln p_i$$

Solution.

Rappelons d'abord l'inégalité classique $\ln x \leq x-1$ vraie pour tout réel $x>0$. Pour montrer l'inégalité souhaitée, on étudie la différence. On a

$$D=\sum_{i=1}^{p} p_i \ln p_i-\sum_{i=1}^{p} p_i \ln q_i=\sum_{i=1}^{p} p_i \ln \left(\frac{p_i}{q_i}\right)=-\sum_{i=1}^{p} p_i \ln \left(\frac{q_i}{p_i}\right) \geq \sum_{i=1}^{p} p_i\left(1-\frac{q_i}{p_i}\right)=\sum_{i=1}^{n} p_i-q_i=0$$

Et le résultat découle.

Exercice 3 (Un système d'équations).
Déterminer tous les triplets de nombres réels (a, b, c) tels que $a+b+c=0$ et $e^a+e^b+e^c=3$.

Solution.

En posant $x=e^a$ et $y=e^b$, les équations sur a, b et c entraînent $x+y+1/xy=3$. En posant pour tout $x, y>0$, $f(x, y)=x+y+1/xy$. On montre que la fonction f à deux variable admet un minimum global sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ qui vaut 3 en $(1,1)$. En laissant x fixé, la fonction $f_1=f(x, .)$ (qui varie en fonction de y) admet un minimum global en $y=1/\sqrt{x}$ qui vaut $f_2(x)=x+2/\sqrt{x}$. Cette fonction à son tour à comme minimum 3 en $x=1$. Résumons, on a montrer que pour tous $x, y>0$, on a $x+y+1/xy \geq 3$ avec égalité si et seulement si $x=1$ et (par conséquent) $y=1$. Donc $a=b=0$ et finalement $c=0$ (puisque $a+b+c=0$). Réciproquement, on voit facilement que le triplet $(0,0,0)$ vérifie le système d'équations donné.

Exercice 4. Soit $f:[0,+\infty[\rightarrow[0,+\infty[$ une fonction qu'on suppose non dérivable et qui vérifie pour tout $x \in[0,+\infty[$

$$f(x) e^{f(x)}=x$$

Étudier les variations de la fonction f.

Solution.

Pas de difficulté. On va montrer que la fonction f est strictement croissante en procédant par contra-position. On se donne $x, y \in[0,+\infty[$ tels que $f(x) \geq f(y)$. On sait $e^{f(x)} \geq e^{f(y)}$ par croissance de la fonction exponentielle, donc $f(x) e^{f(x)} \geq f(x) e^{f(y)} \geq f(y) e^{f(y)}$ et puisque f prend des valeurs positives, et ceci entraîne que $x \geq y$. Donc on a montré que pour tous $x, y \geq 0$, $f(x) \geq f(y)$ entraîne $x \geq y$. Donc par par contra-position, on obtient pour tous $x, y \in[0,+\infty[$, $x<y$ entraîne $f(x)<f(y)$ et ceci équivaut à dire que la fonction f strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Exercice 5 (L'inégalité arithmético-géométrique).
Soient $a_1, a_2, \ldots a_n$ des nombres réels positifs où $n \geq 1$ un entier naturel. Montrer que

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Solution.

On utilisera la fameuse inégalité $e^x \geq x+1$ vraie pour tout réel $x \geq 0$. On peut aussi écrire $e^{x-1} \geq x$ pour tout nombre réel x. Soient $M = (a_1 + \ldots + a_n)/n$ et pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ on note $M_k = a_k/M$. On sait que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a $e^{M_k - 1} \geq M_k$, donc

$$e^{M_1+\ldots+M_n-n} = \prod_{k=1}^{n} e^{M_k-1} \geq \prod_{k=1}^{n} M_k = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{M} = \frac{1}{M^n} \times \prod_{k=1}^{n} a_k$$

Le côté de gauche de cette inégalité vaut 1 (puisque $M_1+\ldots+M_n = n$). Finalement, on a montré que $M^n \geq \prod_{k=1}^{n} a_k$, ce qui permet de conclure.

Exercice 6. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a

$$\prod_{k=2}^{n} \ln k < \frac{\sqrt{n!}}{n}$$

Solution.

On considère la suite $(F_n)_{n\geq 2}$ définie par son terme général

$$F_n = \frac{\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \ln k}{\sqrt[n]{n!}/n}$$

La suite $(F_n)_{n\geq 2}$ est à valeurs strictement positives. De plus, on a pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\sqrt{n+1}\,\ln(n+1)}{n}$$

Une rapide étude de la fonction $f(x) = 2\ln x - x$ sur $[3, +\infty[$ montre que pour tout $x \geq 3$, on a $2\ln x \leq x$, donc pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a $\ln(n+1) \leq \sqrt{n+1}/2$ et par conséquent $F_{n+1}/F_n \leq (n+1)/2n \leq 1$. Donc la suite $(F_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et en particulier on a $F_n \leq F_2$ pour tout entier naturel $n \geq 2$. Or $F_2 < 1$, donc $F_n < 1$ pour tout entier naturel $n \geq 2$ et finalement on en déduit l'inégalité souhaitée.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f'(x)| \leq |f(x)|$$

Montrer que la fonction f est identiquement nulle.

Solution.

Par absurde, supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Quitte à considérer $-f$, on peut supposer que $f(a) > 0$, la continuité de f assure l'existence d'un réel $c \geq 0$ (quitte à considérer la fonction $x \mapsto f(-x)$ tel que $f(c) = 0$ et pour tout $t \in [c, x_0]$ on a $f(x) > 0$. L'hypothèse de l'exercice permet d'écrire $f'(x)/f(x) \leq 1$ pour tout $x \in]c, x_0]$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \ln f(x) - x$ est décroissante sur l'intervalle $]c, x_0]$ (car sa fonction dérivée est négative). En particulier, on a pour tout $x, t \in]c, x_0]$ tels que $x \leq t$ on a $\ln f(t) - t \geq \ln f(x) - x$, ceci entraîne $\ln f(t) - t \geq \ln f(x_0) - x_0$, ce qu'on peut réécrire $f(t) \geq e^{t-x_0} f(x_0)$ pour tout $t \in]c, x_0]$. La continuité de la fonction f en c entraîne par un passage à la limite à droite en c que $f(c) \geq e^{c-x_0} f(x_0) > 0$ mais le terme de gauche vaut 0 par définition du réel c, ce qui n'est pas possible. Donc f est la fonction nulle.

CHAPITRE 6

DÉRIVABILITÉ, THÉOREME DE ROLLE ET ACCROISSEMENTS FINIS

Exercice 1 (Série harmonique).
Montrer que la série $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

est divergente et déterminer sa limite.

Solution.

On va minorer le terme général de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par le terme général d'une suite de limite $+\infty$. On se fixe $x > 0$, on considère la fonction $f : t > 0 \mapsto \ln t$. La fonction f est continue sur le segment $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$, donc on peut appliquer le théorème d'accroissements finis sur f, il existe donc $c \in]x, x+1[$ tel que la différence $f(x) - f(x+1)$ vaut $f'(c) = 1/c$ mais on sait que $1/c \leq 1/x$ (par construction du réel c), autrement dit on a montrer que pour tout $x > 0$, on a $\ln(x+1) - \ln x \leq 1/x$. En particulier, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (n étant un entier naturel non nul fixé), on a $1/k \geq \ln(k+1) - \ln k$ en sommant les inégalités pour $k \in \{1, 2; \ldots, n\}$, on obtient en télescopant $H_n \geq \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$, et ceci pour tout entier naturel non nul n, puisque le terme de droite de la dernière inégalité diverge et sa limite vaut $+\infty$, il en est de même pour la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Ce qui permet de conclure.

Exercice 2 (Dérivée à droite et croissance).
Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b[$, dérivable à droite en tout point de cet intervalle, on suppose de plus que pour tout $x \in [a, b[$ on a $f'_d(x) \geq 0$. Montrer que la fonction f est croissante.

Solution.

On montre d'abord le résultat en supposant que $f'_d(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b[$. On se donne x et y dans l'intervalle $[a, b[$ tels que $x < y$ et montrons que $f(x) \leq f(y)$. La fonction f est continue sur le segment $[x, y]$, donc son maximum sur le segment $[x, y]$ existe et il est atteint en $c \in [x, y]$. On veut montrer que $c = y$ pour conclure. Supposons par absurde que $c \in [x, y[$. On peut trouver une suite (c_n) à valeurs dans l'intervalle $[x, y[$ tels que à partir d'un certain rang on a $c_n > c$ et la suite (c_n) converge vers c (c'est facile à voir en considérant la suite qui son terme général égal à $c + 1/n$ à partir d'un certain rang). Mais on sait que

$$\frac{f(c_n) - f(c)}{c_n - c} \to f'_d(c) > 0$$

Ce qui contredit le caractère négatif du terme de gauche puisque $f(c) = \max_{[a,b]} f$ et $c_n > c$ à partir d'un certain rang par construction de la suite (c_n). Finalement on a montré le résultat pour toute fonction dont la fonction dérivée à droite est à valeurs strictement positives.
Supposons maintenant comme dans l'exercice que la fonction f'_d peut prendre des valeurs nulles. Pour $\epsilon > 0$, on considère la fonction g_ϵ définie par $g_\epsilon(x) = f(x) + \epsilon x$, la fonction dérivée à droite de cette fonction existe bien sur (par opérations) et on a pour tout $x \in [a, b[$, $g'_\epsilon(x) > 0$, donc en vertu de ce qui précède, on déduit que pour tout $x, y \in [a, b[$ tels que $x < y$ on a $g_\epsilon(x) \leq g_\epsilon(y)$, autrement dit on a $f(x) \leq f(y) + \epsilon(x - y)$ et ceci pour tout $\epsilon > 0$. En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient l'inégalité $f(x) \leq f(y)$. Ce qui fallait démontrer.

➽ On peut obtenir un résultat similaire en supposant que $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ possède une dérivée à gauche à valeurs positives.
➽ La perturbation par ϵ utilisée est une technique classique. On va l'utiliser dans d'autres contextes !

Exercice 3 (Valeur moyenne de Cauchy-Règle de l'Hospital).
1/a/ (Valeur moyenne de Cauchy). Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et dérivables sur $]a, b[$ tels que $g(a) \neq g(b)$ et on suppose de plus que pour tout $x \in]a, b[$ on a $g'(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}$$

b/ (Règle de l'Hospital) Soient I un intervalle ouvert et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I et $a \in I$. On suppose que f et g s'annulent en a. Si $l = \lim\limits_{x \to a} f'(x)/g'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$, montrer que $\lim\limits_{x \to a} f(x)/g(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et que cette limite vaut l.
2/ (Application). Calculer les limites suivantes

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \qquad L_2 = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}, \qquad L_3 = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

Solution.

1/a/ Remarquer que pour $g = \text{id}$, on retrouve le théorème des accroissements finis. Pour la preuve, on procède comme dans la démonstration du théorème des accroissements finis. En effet, on considère la fonction $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = f(x)[g(a) - g(b)] - g(x)[f(a) - f(b)]$$

pour tout $x \in [a, b]$. La fonction h est combinaison linéaire de f et g, donc h est continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$, de plus remarquons que $h(a) = h(b)$ (c'est facile à voir), donc d'après le théorème de Rolle, on a l'existence de $c \in]a, b[$ vérifiant $h'(c) = 0$, c'est à dire $f'(c)/g'(c) = [f(a) - f(b)]/[g(a) - g(b)]$ en vertu du caractère non nul de la fonction g. Ce qui achève la preuve.

b/ On applique le résultat précédent en considérant le segment $[a, x] \in I$ tel que $x > a$, il existe donc $c_x \in [a, x]$ tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \qquad (*)$$

Quand x tend vers a (par valeurs supérieures), c_x tend aussi vers a. Par conséquent le terme de droite de $(*)$, tend vers l quand x tend vers a (par valeurs supérieures), donc il est de même pour le terme de gauche de $(*)$.
2/ En appliquant la règle de l'Hospital à $f_1(x) = 1 - \cos x$ et $g_1(x) = x^2$, et en utilisant le fait que $\lim\limits_{x \to 0} \sin x/x = \lim\limits_{x \to 0} f_1(x)/g_1(x) = 1$, on trouve $L_1 = 1/2$. De même pour les deux autres limites on retrouve $L_2 = 1/6$ et $L_3 = 1/2$.

➽ La règle de l'Hopistal reste vraie si l'on suppose $l = \infty$.
➽ Attention ! La règle de l'Hospital ne donne qu'une condition suffisante. Cependant, il peut exister des cas où la limite du rapport $f(x)/g(x)$ existe sans que la limite du rapport $f'(x)/g'(x)$ existe. Prendre par exemple le cas de la limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin(1/x)}{x}$.

Exercice 4 (Deux généralisations du théorème de Rolle).
1/a/ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.
b/ (Application) Montrer que toute fonction polynômiale à coefficients réels de degré impair admet une racine dans $\mathbb{R}$.
2/ Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose de plus que f est dérivable $n - 1$ (n un entier naturel ≥ 1) fois sur $[a, b]$, sa dérivée $(n-1)$-ème continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose de plus que f s'annule en $n + 1$ points $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$ ($f^{(n)}$ désigne la fonction dérivée n-ème de f).

Solution.

1/a/ Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, alors il existe $a < 0$ tel que $f(a) \geq l/2$ et il existe $b > 0$ tel que $f(b) \geq l/2$. Quitte à considérer $-f$ et $-g$, on peut supposer $l \geq 0$, on en déduit que $f(a) \geq l/2 \geq 0$ et $f(b) \geq l/2 \geq 0$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur les segments $[a, 0]$ et $[0, b]$ on déduit l'existence de $\alpha \in [a, 0]$ et $\beta \in [0, b]$ tels que $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}$ (en particulier sur le segment $[\alpha, \beta]$), il existe donc $c \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$. On procéde de même si la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est supposée infinie.
b/ Soit une fonction polynômiale à coefficients réels de degré impair. Appelons F la primitive de la fonction f, la fonction polynômiale F de coefficients réels est de degré pair, par conséquent $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, donc d'après le résultat de la question précédente on obtient l'existence de $c \in \mathbb{R}$ tel que $F'(c) = 0$, c'est à dire, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$, d'où la conclusion.
2/ Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, la fonction f est continue sur le segment $[a_{k-1}, a_k]$ et dérivable sur $]a_k, a_{k+1}[$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $f'(c_k) = 0$. Donc, il existe $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < b$ tels que $f'(c_1) = f'(c_2) = \ldots = f'(c_n)$. En réitérant notre raisonnement sur les $f^{(k)}$ pour $2 \leq k \leq n$ (ce qu'on peut exprimer en utiliser une récurrence bornée), on obtient ainsi l'existence de $c \in [a, b]$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 5. Déterminer la valeur de la limite suivante

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right) \right)$$

Solution.

Soit $x > 0$ un réel positif. On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \exp(1/t)$. La fonction f est dérivable sur $[x, x+1]$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]x, x+1[$ tel que

$$\exp\left(\frac{1}{x+1}\right) - \exp\left(\frac{1}{x}\right) = f(x+1) - f(x) = f'(c_x) = -\frac{1}{c_x^2}\exp\left(\frac{1}{c_x}\right)$$

Donc

$$x^2\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right) = \frac{x^2}{c_x^2}\exp\left(\frac{1}{c_x}\right) = \left(\frac{x}{c_x}\right)^2\exp\left(\frac{1}{c_x}\right)$$

Et ceci pour tout $x > 0$, donc en faisant tendre x vers $+\infty$, le terme de droite tend vers 1 (puisque $c_x \to +\infty$ -car $c_x > x$ pour tout $x > 0$- et $c_x/x \to 1$ -puisque $x < c_x < x+1$ pour tout $x > 0$-).

Exercice 6. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I et a, b et c trois réels tous différents de I. Montrer qu'il existe $d \in I$ tel que

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(c-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{f''(d)}{2}$$

Solution.

La solution proposée est un peu technique ! On considère la fonction φ définie sur I par

$$\varphi(x) = (x-b)f(a) + (a-x)f(b) + (b-a)f(x) - \frac{1}{2}A(a-b)(b-x)(x-a)$$

pour tout $x \in I$. La constante A est choisie de manière que $\varphi(c) = 0$. On peut supposer que $a < b < c$, on applique le théorème de Rolle sur $[a, b]$ et $[b, c]$ sur la fonction φ (qui est clairement deux fois dérivable sur I), on obtient l'existence de $\alpha \in]a, b[$ et $\beta \in]b, c[$ tel que $\varphi'(\alpha) = \varphi'(\beta) = 0$. On applique une seconde fois le théorème de Rolle sur $[\alpha, \beta]$ sur la fonction φ' (qui est dérivable sur I). On obtient donc l'existence de $d \in [\alpha, \beta] \subset I$ tel que $\varphi''(d) = 0$. Or, on voit facilement que ceci amène au résultat en question.

CHAPITRE 7

LOI DE COMPOSITION INTERNE

Un monoïde est un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne associative et admettant un élément neutre pour cette loi ; par exemple $(\mathbb{Z}, +)$ *est un monoïde et il est de plus commutatif.*
Soit $(M, *)$ *un monoïde, son élément neutre est noté* e*. On dit qu'un élément* r *est régulier à gauche (resp. inversible à gauche) si pour tous* $x, y \in M$*,* $r * x = r * y$ *entraîne* $x = y$ *(resp. il existe* $r' \in M$ *tel que* $r' * r = e$*). On définit de manière analogue la régularité à droite et l'inversibilté à droite.*

Exercice 1 (Étude d'une loi).
On définit sur l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ la loi $\star$ par

$$x \star y = x + y - xy$$

pour tous deux nombres rationnels x et y. Étudier la loi $\star$.

Solution.

Notons d'abord que que la loi $\star$ est interne. La loi de composition interne $\star$ est associative. En effet, on se donne x, y et z dans $\mathbb{Q}$, on a

$$(x \star y) \star z = x \star y + z - (x \star y)z = x + y - xy - (x + y - xy)z = x + y + z - xy - yz - zx + xyz$$

Et de même, on montre que

$$x \star (y \star z) = x + y + z - xy - yz - zx + xyz$$

De plus il est clair que la loi $\star$ est commutative. La loi $\star$ admet un élément neutre qui est zéro puisque la loi $\star$ est commutative et $x \star 0 = x$. Cherchons les éléments symétrisables de $\mathbb{Q}$ muni de la loi $\star$. Par analyse-synthèse, on se donne un rationnel x et appelons x' son symétrique (sous réserve d'existence) ; puisque la loi $\star$ est commutative, ceci est équivaut à dire que $x \star x' = 0$, autrement dit $x + x' - xx' = 0$, i.e. $x'(1 - x) = x$, donc 1 n'est pas symétrisable (sinon on aura $0 = 1$) et on a pour tout $x \neq 1$, le symétrique de x est $x' = \dfrac{x}{1-x}$. Résumons, la loi de composition interne $\star$ est associative, commutative, admet un élément neutre 0 et tout nombre rationnel $x \neq 1$ admet un symétrique $x/(x - 1)$.

Exercice 2. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On définit sur E la loi $\dagger$ définie par

$$x \dagger y = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

Montrer que $\dagger$ définit une loi de composition interne sur E et étudier ses propriétés.

Solution.

Remarquons que pour tous deux éléments x et y de A, on a $x \dagger y = \max(x, y)$. En effet, si $x \geq y$ on obtient $x \dagger y = x$ et si $x < y$ on trouve $x \dagger y = y$. Donc $\dagger$ est une loi de composition interne. Étudions les propriétés de la loi $\dagger$, on a pour tous $x, y, z \in A$

$$(x \dagger y) \dagger z = \max(x \dagger y, z) = \max(\max(x, y), z) = \max(x, y, z) = \max(x, \max(y, z)) = \max(x, x \dagger y) = x \dagger (y \dagger z)$$

D'où l'associativité de la loi $\dagger$. La commutativité de la loi $\dagger$ est facile à voir. Supposons que la loi $\dagger$ admet un élément neutre e, par conséquent pour tout $x \in E$, $\max(x, e) = x$ et ceci équivaut à dire que pour tout $x \in A$, on a $x \geq e$. Cet élément e n'existe pas toujours dans A, prendre par exemple $A = \mathbb{R}$. Il reste à déterminer les éléments de A réguliers. Supposons qu'un tel élément r existe bien, donc pour tous $x, y \in A$ on a $x \dagger r = y \dagger r$ entraîne $x = y$. En prenant $y = r$ on obtient $x \dagger r = r$ pour tout $x \in A$, c'est à dire que r est l'élément neutre. Résumons, la loi $\dagger$ sur A est associative, commutative, n'admet pas d'élément symétrique et aucun élément de l'ensemble A n'est régulier.

Exercice 3 (Autour des monoïdes).
1/a/ Montrer que $\mathbb{Z}$ est un monoïde commutatif pour la loi $*$ définie par

$$x * y = x + y - xy$$

b/ Calculer les puissances de $x \in \mathbb{Z}$ correspondants à la loi $*$ (on note la puissance $x^{[n]} = \underbrace{x * x * \ldots * x}_{n \text{ fois}}$ où n est un entier naturel non nul).
2/a/ Montrer que l'ensemble $A = \{a^2 + b^2 | a, b \in \mathbb{N}\}$ muni de la multiplication des entiers, est un monoïde.
b/ Muni de la multiplication des entiers, l'ensemble $B = \{a^2 + b^2 + c^2 | a, b, c \in \mathbb{N}\}$ est il un monoïde ?

Solution.

1/a/ La loi $*$ est une loi de composition interne. De plus, elle est clairement commutative et on vérifie par un calcul simple qu'elle est associative. Donc $(\mathbb{Z}, +)$ un monoïde commutatif.
b/ *Première méthode.* On vérifie facilement que $x^{[2]} = x * x = 2x - x^2 = 1 - (1 - x)^2$ puis que

$$x^{[3]} = x * x^{[2]} = x + x^{[2]} - xx^{[2]} = x + 2x - x^2 - x(2x - x^2) = 3x - 3x^2 + x^3 = 1 - (1 - x)^3$$

On constate que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $x^{[n]} = 1 - (1 - x)^n$. Montrons le résultat par récurrence. Pour $n = 1$, c'est évident. Supposons le résultat vrai pour le rang n, et explicitons $x^{[n+1]}$. On sait que

$$x^{[n+1]} = xx^{[n]} = x + x^{[n]} - xx^{[n]} = x + 1 - (1 - x)^n - x[1 - (1 - x)^n] = 1 - (1 - x)^{n+1}$$

On obtient ainsi le résultat par récurrence.
Seconde méthode. On remarque que pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$, on a $x * y = 1 - (1 - x)(1 - y)$ puis que $x * y * z = 1 - (1 - x)(1 - y)(1 - z)$, on obtient ainsi par récurrence que pour tous entiers $x_1, \ldots, x_p$ (p un entier naturel non nul) que

$$x_1 * x_2 * \ldots * x_p = 1 - \prod_{k=1}^{p}(1 - x_k)$$

En particulier
$$x^{[n]} = \underbrace{x * x * \ldots * x}_{n \text{ fois}} = 1 - (1-x)^n$$
pour tout entier naturel non nul n. D'où le résultat.
2/a/ L'ensemble A est non vide. En effet $0 = 0^2 + 0^2 \in A$. De plus, la loi $\times$ est une loi de composition interne sur A. En effet, on a
$$(a^2+b^2)\times(c^2+d^2) = (ac)^2 + (bd)^2 + (ac)^2 + (bd)^2 = (ac+bd)^2 + (ac-bd)^2$$
De plus, la loi $*$ est associative et possédant un élément neutre $1 = 1^2 + 0^2$. Finalement, $(A, \times)$ est monoïde.
b/ La réponse est Non ! On montre que B n'est pas stable par multiplication. En effet $3, 5 \in B$ pourtant on vérifie facilement l'inexistence d'entiers naturels a, b et c dont la somme de leurs carrés vaut 15.

Exercice 4 (Le monoïde des applications définies d'un ensemble vers lui même).
Soient X un ensemble non vide et on note $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble des applications de X dans lui même et f un élément du monoïde $\mathcal{F}(X)$.
1/ Montrer que f est régulière à gauche si et seulement si f est injective, si et seulement si f est inversible à gauche.
2/ Montrer que f est régulière à droite si et seulement si f est surjective, si et seulement si f est inversible à droite.

Solution.

1/ Supposons que f est régulière à gauche et montrons que f est injective. On se donne $x, y \in X$ tels que $f(x) = f(y)$. On définit les deux fonction u et v de $\mathcal{F}(X)$ par $u(t) = x$ et $v(t) = y$ pour tout $t \in X$. On a pour tout $t \in X$,
$$(f \circ u)(t) = f(u(t)) = f(x) = f(y) = f(v(t)) = (f \circ v)(t)$$
Donc, $f \circ u = f \circ v$ et puisque f est régulière à gauche, on obtient $u = v$, autrement dit pour tout $t \in X$ on a $u(t) = v(t)$, c'est à dire $x = y$. D'où l'injectivité de f. Supposons maintenant que f est injective et montrons que f est inversible à gauche. Pour tout $y \in X$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est un singleton ou vide. Donnons nous $a \in X$, on définit l'application $g \in \mathcal{F}(X)$ par $g(y) = x$ si $f^{-1}(\{y\}) = x$ et $g(y) = a$ si $f^{-1}(\{y\}) = \varnothing$, alors on a pour tout $x \in X$, $(g \circ f)(x) = x$, par conséquent $g \circ f = 1_X$. D'autre part, dans tout monoïde, l'inversibilté à gauche entraîne la régularité à gauche (c'est facile à voir en multipliant par l'inverse à gauche pour obtenir la régularité).
2/ Supposons que f est régulière à droite et montrons que f est surjective. On procède par contraposition en supposant que f n'est pas surjective, il existe donc $y \in X$ tel que y ne soit pas dans l'image $f(X)$ de X par l'application f. Fixons deux éléments différents a et b dans X et définissons les fonctions g et h par $g(x) = a$ pour tout $x \in A$ et $h(x) = a$ si $x \in f(X)$ et $h(x) = b$ sinon. On a alors $(g \circ f)(x) = (h \circ f)(x) = a$ pour tout $x \in X$, donc $f \circ f = h \circ f$ pourtant $g \neq f$ (puisque qu'il existe $y \in X$ tel que $y \notin f(X)$. Supposons maintenant que f est surjective et montrons que f est inversible à droite. Pour tout élément y de X, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est non vide. Donc les $f^{-1}(\{y\})$ pour $y \in X$, forment une partition de X, choisissons dans chaque $f^{-1}(\{y\})$ un élément z_y. On définit ainsi une application $g : X \to X$ qui à y associe z_y. Cette application est bien définie et vérifie $(f \circ g)(y) = y$ pour tout $y \in X$, autrement dit $f \circ g = 1_X$ et ceci équivaut à dire que f est inversible à droite. Finalement, il est facile de voir que si f est inversible à droite, alors elle est égulière à droite (résultat restant vrai dans tout monoïde).

➼ On peut déduire que $f \in \mathcal{F}(X)$ est bijective si et seulement si elle est régulière si et seulement si elle est inversible.

Exercice 5 (Encore les monoïdes).
On considère un monoïde M d'élément neutre e.
1/ Montrer que tout élément inversible à gauche et régulier à droite est inversible.

2/ Donner un exemple d'un monoïde contenant un élément inversible à gauche non inversible à droite.
3/ Montrer que dans un monoïde si tout élément régulier à gauche ou à droite est inversible.

Solution.

1/ Soit x un élément de E inversible à gauche et régulier à droite. Il existe donc $x' \in E$ tel que $x'x = e$. Par associativité, on obtient $(xx')x = x(x'x) = xe = x = ex$. Puisque x est régulier à droite, alors $xx' = e$, donc x est inversible à droite, sachant que par hypothèse, x est inversible à gauche, alors x est inversible.
2/ D'après l'exercice précédent, il suffit de choisir un ensemble E infini et $f \in \mathcal{F}(E)$ injective (inversible à gauche) et non surjective (non inversible à droite), par exemple $X = \mathbb{N}$ et $f(n) = n + 1$ pour tout entier naturel n.
3/ C'est un résultat classique ! On donne deux méthodes différentes pour résoudre cette question.
Première méthode. Supposons que E est fini, et fixons $a \in E$ un élément régulier à droite. On considère l'application $\psi_a : X \to X$ définie par $\psi_a(x) = xa$. L'application ψ_a est bien définie. De plus remarquons que pour $x, y \in E$ on a $\psi_a(x) = \psi_a(y)$ entraîne $xa = ya$ et puisque a est régulier à droite, alors $x = y$ et ceci pour tous $x, y \in E$. Autrement dit, l'application ψ est injective, l'ensemble E étant supposé fini et ψ_a part de E vers E, l'application ψ_a est donc bijective, mais $e \in E$ et alors e admet un antécédant par l'application ψ_a, c'est à dire qu'il existe $a' \in E$ tel que $a'a = e$, et ceci est équivaut à dire que a est inversible à gauche. En conclusion, a est régulier à droite et inversible à gauche, donc d'après le résultat de la première question, a est inversible.
Seconde méthode. On se fixe $a \in E$, et on considère l'application $p : \mathbb{N} \to E$ qui à un entier naturel n associe a^n (avec par convention $a^0 = e$). L'application p étant bien définie. De plus puisque l'ensemble E est fini, l'application p ne peut être injective (sinon la suite $e, a, a^2, \ldots a^n, \ldots$ va être infinie), par conséquent il existe deux entiers naturels n et m différents qui ont même image par p, c'est à dire $a^n = a^m$, on peut supposer par exemple que $m < n$, donc $a^{n-1}a = a^{m-1}a$ et puisque a est régulière à droite, on obtient $a^{n-1} = a^{m-1}$. Une récurrence (bornée) permet de montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ on a $a^{n-k} = a^{m-k}$ et en particulier pour $k = m$; on obtient $a^{n-m} = a^0 = e$, autrement dit $a^{n-m-1}a = aa^{n-m-1} = e$, on en déduit que a est inversible et que son inverse est a^{n-m-1}, et ceci achève la preuve.

➻ Pour un ensemble fini A, une application $f : A \to A$ est injective si et seulement si elle est surjective, si et seulement si elle est bijective (raison pour laquelle on a choisit X un ensemble infini dans la question **2/**).
➻ La seconde méthode de la question **3/** nous donne plus de renseignements sur l'inverse d'un élément $a \in E$, elle montre que l'inverse d'un élément de E est une puissance de cet élément. En revanche, la première méthode utilisée reste plus générale.

Exercice 6 (Loi définie à partir d'autre loi).
On définit sur un ensemble E non vide une loi de composition interne $*$ associative et on considère un élément $a \in E$. On définit la loi de composition interne $\star$ sur E par

$$x \star y = x * a * y$$

pour tous x et y de E.
1/ Montrer que la loi $\star$ est associative, puis que $\star$ est commutative si $*$ est commutative.
2/ On suppose que la loi $*$ commutative et qu'elle admet un élément neutre e ($e \neq a$) et que a admet un symétrique a' par la loi $*$.
a/ Montrer que la loi $\star$ admet un élément neutre qu'on doit déterminer.
b/ Soit x un élément de E et x' est le symétrique de x par la loi $*$. Montrer que x admet un symétrique par rapport à la loi $\star$ qu'on doit déterminer.

Solution.

1/ Montrons l'associativité de la loi $\star$. Soient x, y et z trois éléments de E. On a

$$x \star (y \star z) = x \star (y * a * z) = x * a * y * a * z = (x * a * y) * a * z = (x \star y) * a * z = (x \star y) \star z$$

Donc, la loi $\star$ est associative.
Montrons maintenant que la loi $\star$ est commutative en supposant que la loi $*$ est commutative. On se donne deux éléments x et y dans E. On a alors

$$x \star y = x * a * y = x * y * a = y * a * x = y \star x$$

Donc, la loi $*$ est commutative.
2/a/ On procède par analyse-synthèse. On suppose que que la loi $\star$ admet un élément neutre ϵ, puisque la loi $\star$ est commutative (puisque la loi $*$ est supposée commutative), alors c'est équivaut à dire que pour tout $x \in E$, on a $x \star \epsilon = x$, c'est à dire $x * (a * \epsilon) = x * a * \epsilon = x$, et ceci pour tout $x \in E$, donc $a * \epsilon$ est l'élément neutre de $*$. On en déduit par unicité de l'élément neutre d'une loi que $a * \epsilon = e$, puisque a possède un symétrique a' par rapport à la loi $*$, alors $\epsilon = a'$ (par unicité du symétrique). Réciproquement, on vérifie facilement que a' est l'élément neutre de la loi $\star$. Donc, $\star$ admet un élément neutre qui est le symétrique a' de a par rapport à la loi $*$.
b/ Par analyse-synthèse. On suppose que l'élément x admet un symétrique x'' par rapport à la loi $\star$, puisque la loi $\star$ est commutative (puisque $*$ l'est), c'est équivalent à dire que $x \star x'' = a'$, autrement dit $x * a * x = a'$, en composant par x' le symétrique de x (par rapport à la loi $*$) à gauche et à droite, on obtient $x" = x' * a' * x'$. Réciproquement, on vérifie facilement que que l'élément $x' * a' * x'$ est le symétrique de x par rapport à la loi $\star$.

Exercice 7. Soit M un monoïde commutatif dont la loi est noté multiplicativement. Soient x et y deux éléments de M, on suppose que xy soit symétrisable. Montrer que x et y sont symétrisables.

Solution.

C'est immédiat en remarquant que

$$x[y(xy)^{-1}] = xy(xy)^{-1} = e$$

où e désigne l'élément neutre su monoïde M. Donc x est inversible à droite et puisque la loi est commutative, x est donc inversible. On montre de manière similaire que y est inversible.

CHAPITRE 8

STRUCTURE DE GROUPE

Exercice 1 (Autour des magmas).
Un magma est un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne.
1/ Soit $E = [0, 1]$ et on définit sur l'ensemble E la loi $\star$ définie par

$$x \star y = x + y - xy$$

pour tous s et y de E. Montrer que E muni de la loi $\star$ est un magma associatif et commutatif.
2/ (Idempotents). Soit $(M, \star)$ un magma. On dit que $x \in M$ est idempotent si $x \star x = x$.
a/ On suppose que tout élément de M est régulier et que $\star$ est distributive à elle même. Montrer que tout élément de M est idempotent (Une loi $\star$ est dite distributive à elle même si pour tous x, y et z on a $x \star (y \star z) = (x \star y) \star (x \star z)$ et $(y \star z) \star x = (y \star x) \star (z \star x)$).
b/ On suppose que tout élément de M est régulier et que la loi $\star$ est associative. Montrer que M admet au plus un idempotent.

Solution.

1/ La loi $\star$ définie sur E est une loi de composition interne. En effet, il suffit de voir que pour tous $x, y \in E$, on a

$$x \star y = x + y - xy = x - (x-1)y = (x-1)(1-y) + 1 \in [0, 1]$$

Donc, muni de la loi $\star$, $E = [0, 1]$ est un magma. De plus, il est clair que la loi $\star$ est commutative et on vérifie par un calcul simple qu'elle est également associative. Finalement, $(E, \star)$ est un magma associatif et commutatif.
2/a/ On a pour tout $x \in M$,

$$x \star (x \star x) = (x \star x) \star (x \star x)$$

En simplifiant par $x \star x$ à gauche (puisque tout élément du magma M est régulier), on obtient $x \star x = x$, d'où le résultat.
b/ Il s'agit de montrer que le magma M ne peut admettre deux idempotents. Donnons nous deux idempotents x et y dans M et montrons qu'ils sont identiques, on sait que $x^2y = xy = xy^2$, et en simplifiant par x à gauche et par y à droite, on obtient $x = y$, et le résultat découle.

Exercice 2. On pose $G =]-1, 1[$, et on pose pour tous x et y éléments de E,

$$x \oplus y = \frac{x+y}{1+xy}$$

Montrer que G muni de la loi $\oplus$ est un groupe commutatif.

Solution.

On commence par vérifier que $\oplus$ est une loi de composition interne. Il s'agit de montrer que pour tous $x \oplus y \in]-1, 1[$, on a d'une part

$$x \oplus y - 1 = \frac{x+y}{1+xy} - 1 = \frac{x+y-1-xy}{1+xy} = \frac{(x-1)(1-y)}{1+xy}$$

Le numérateur de cette fraction est clairement négatif, donc le signe de ctte fraction est celui du dénominateur $1+xy$ qui est strictement positif puisque $xy > -1$. Donc, pour tous x et y éléments de E, on a $x \oplus y < 1$. De même, on montre que $x \star y > -1$ pour tous éléments x et y de G. Donc, $\oplus$ est une loi de composition interne sur G. De plus, la loi $\oplus$ est commutative (c'est facile à voir). Pour l'associativité, on se fixe x, y et z trois éléments de G, on a alors

$$x \oplus (y \oplus z) = \frac{x + y \oplus z}{1 + x(y \oplus z)} = \frac{x + \dfrac{y+z}{1+yz}}{1 + x \times \dfrac{y+z}{1+yz}} = \underbrace{\frac{x+y+z+xyz}{1+yz+xy+zx}}_{Q}$$

On montre de même que $(x \oplus y) \oplus z$ est égale à la quantité Q. Par conséquent, la loi $\oplus$ soit être associative. De plus, on voit facilement que 0 est l'élément neutre de la loi $\oplus$. Tout élément x de G est symétrisable de symétrique $-x$. En conclusion, $(G, \oplus)$ est un groupe commutatif.

Exercice 3 (Sous groupes usuels d'un groupe G).
Soit G un groupe noté multiplicativement.
1/a/ Soient I un ensemble quelquonque non vide et $(G_i)_{i \in I}$ une famille de sous groupes de G. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{i \in I} G_i$ est un sous groupe de G.
b/ Une réunion finie de sous groupes de G est elle un sous groupe de G ?
c/ *On appelle suite croissante d'ensembles, une famille d'ensembles (éventuellement vides)* $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *tel que* $E_0 \subset E_1 \subset \ldots E_n \subset \ldots$.
Montrer que la réunion d'une suite croissante de sous groupes de G est un sous groupe de G.
2/a/ (Centraliseur d'un élément). Soit $x \in G$, on appelle centraliseur de x dans G l'ensemble C_x des éléments de G qui commutent avec x. Montrer que pour tout $x \in G$, C_x est un sous groupe de G.
b/ (Centre du groupe G). On appelle centre du groupe G, l'ensemble $Z(G)$ des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G, autrement dit $Z(G) = \{x \in G \,|\, \forall y \in G,\, xy = yx\}$. Montrer que $Z(G)$ est un sous groupe de G.

Solution.

1/a/ On utilise la propriété caractéristique des sous groupes. On pose $K = \cap_{i \in I} G_i$, K est un sous groupe de G. En effet, c'est un ensemble non vide et si x et y sont deux éléments de K, alors pour tout $i \in I$, on a $x, y \in G_i$ et puisque les G_i sont des sous groupes de G, alors $xy^{-1} \in G_i$ et ceci pour tout $i \in I$. Donc $xy^{-1} \in K$, puis on déduit que K est un sous groupe de G.
b/ La réponse est négative. En effet, considérons le groupe $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$, on sait que $\{\overline{0}, \overline{3}\}$ et $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ sont deux sous groupes de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (c'est facile à vérifier), mais pourtant leur réunion $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{3}\}$ n'est pas un groupe (puisque $\overline{2} + \overline{3} = \overline{5}$).

c/ On se donne une suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante de sous groupes de G. Il s'agit de montrer que $U = \cup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ est sous groupe de G. Il est clair que U non vide (puisque $\varnothing \neq G_0 \subset U$). Soient x et y deux éléments de G, donc il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $x \in G_n$ et $y \in G_m$. Si $n = m$, alors puisque G_n est un sous groupe de G, alors $xy^{-1} \in G_n \subset U$, d'où U est un sous groupe de G d'après la propriété caractéristique des sous groupes. Si $n \neq m$, on peu par exemple supposer que $n < m$, puisque la suite des G_i est croissante, alors $G_n \subset G_m$, donc x et y sont deux éléments de G_m, et puisque G_m est un sous groupe de G, alors $xy^{-1} \in G_m \subset U$. Donc, U est un sous groupe de G et ceci achève la preuve.
2/a/ Soient $x \in G$ et u et v deux éléments de C_x. Notons d'abord que C_x n'est pas vide puisque l'élément neutre commute avec x. On montre d'abord que C_x est stable par multiplication, on a $(uv)x = uvx = uxv = xuv = x(uv)$. De plus, C_x est stable ar passage à l'inverse. En effet, on a $u^{-1}x = (x^{-1}u)^{-1} = (ux^{-1})^{-1}$ (car si un élément u commute avec un élément, il commute alors avec son inverse -puisque $ux = xu$ entraîne $x^{-1}u = ux^{-1}$ en multipliant à droite et à gauche par x^{-1}-), finalement $u^{-1}x = xu^{-1}$. Résumons, pour tout $x \in G$, C_x est une partie de G stable par multiplication et par passage à l'inverse, C_x est donc un sous groupe de G pour tout $x \in G$.
b/ C'est facile à vérifier, il suffit de montrer que $Z(G) \neq \varnothing$ est stable par multiplication et par passage à l'inverse.

➽ Dans **2/a/**, on pourrait montrer la stabilité par passage à l'inverse en remarquant que si u commute avec x, alors x commute avec u et donc x^{-1} commute avec u d'après la remarque cité.

Exercice 4 (Réunion et produit de sous groupes).
Soit G un groupe noté multiplicativement, H et K deux sous groupes de G.
1/ Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $H \cup K$ soit un sous groupe de G.
2/ Donner une condition nécessaire pour que l'ensemble $HK = \{xy \,|\, x \in H, y \in K\}$ soit un sous groupe de G.

Solution.

1/ Une condition suffisante pour que $H \subset K$ soit un sous groupe de G est $H \subset K$ ou $K \subset K$. Montrons que c'est une condition nécessaire, par absurde supposons que $H \cup K$ un groupe et que $H \not\subset K$ et $K \not\subset H$. Donc, il existe deux éléments x et y dans G tels que $x \in H$, $x \notin K$, $y \in K$ et $y \notin H$, sachant que $xy \in H \cup K$ (car $x, y \in H$), alors $xy \in H$ ou $xy \in K$. Supposons par exemple que $xy \in H$, puisque $x^{-1} \in H$, alors $y \in H$ et ceci n'est pas possible. De même, on montre que $xy \notin K$, d'où l'absurdité.
2/ L'ensemble HK est un sous groupe de G si et seulement si $HK = KH$.
Condition nécessaire. On suppose que HK est un sous groupe de G, montrons que $HK \subset KH$ et $KH \subset HK$. Soit $z \in HK$, donc $z^{-1} \in HK$. Écrivons $z^{-1} = xy$ avec $x \in H$ et $y \in K$, donc $z = y^{-1}x^{-1} \in KH$ (puisque $y^{-1} \in K$ et $x^{-1} \in H$). Pour l'inclusion réciproque, on se donne $z = xy \in KH$, avec $x \in K$ et $y \in H$, donc $x^{-1} \in K$ et $y^{-1} \in K$ et par conséquent $z^{-1} = y^{-1}x^{-1} \in HK$ et puisque HK est un groupe, alors $z \in HK$. Donc $KH \subset HK$. D'où le résultat.
Condition suffisante. Supposons que $HK = KH$ et montrons que HK est un sous groupe de G. D'abord, HK est non vide puisque $e = ee \in HK$ (e l'élément neutre du groupe de G). De plus, HK est stable par multiplication, en effet on se donne $z_1 = x_1y_1$ et $z_2 = x_2y_2$ deux éléments de HK avec $x_1, x_2 \in H$ et $y_1, y_2 \in K$. On a $z_1z_2 = x_1y_1x_2y_2$, comme $KH = HK$ alors il existe $h \in H$ et $k \in K$ tels que $y_1x_2 = hk$, donc $z_1z_2 = (x_1h)(ky_2) \in HK$. Donc HK est stable par multiplication. Pour le passage à l'inverse, on a pour tout $x \in H$ et $y \in K$, $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \in KH = HK$, donc HK est stable par passage à l'inverse. Finalement, HK est un sous groupe de G.

Exercice 5 (Groupe des automorphismes intérieurs).
Soit G un groupe noté multiplicativement. Pour $a \in G$ fixé, on note $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ pour tout $x \in G$. L'application φ_a est bien définie pour tout $a \in G$.
1/ Montrer que pour tout $a \in G$, φ_a est un automorphisme de G.
2/ Montrer que que l'ensemble $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes intérieurs de G, muni de la composition $\circ$ est un groupe.

Solution.

1/ Soit $a \in G$ un élément fixé. L'application $\varphi_a : G \to G$ est injective, en effet pour x et y dans G tel que $\varphi_a(x) = \varphi_a(y)$ on a $axa^{-1} = aya^{-1}$, et puisque a et a^{-1} sont réguliers, alors $x = y$. Donc, l'application φ_a est injective. Cette application est de plus surjective. En effet, pour $y \in G$ on a $\varphi_a(a^{-1}ya) = aa^{-1}yaa^{-1} = y$. Finalement, on a montré que φ_a est biejective. Montrons maintenant que l'application φ_a est un endomorphisme de groupe. C'est facile à voir, en effet pour $x, y \in G$, on a

$$\varphi_a(xy) = axya^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = \varphi_a(x)\varphi_a(y)$$

Finalement, on a montré que φ_a est un automorphisme de groupe pour tout $a \in G$.
2/ On pose $\mathrm{Aut}(G) = A$. On a $\mathrm{id}_G = \varphi_e \in A$, de plus A est stable par la loi $\circ$ puisque pour tout $x \in G$, on a

$$(\varphi_a \circ \varphi_b)(x) = \varphi_a(\varphi_b(x)) = a\varphi_b(x)a^{-1} = abxb^{-1}a^{-1} = abx(ab)^{-1} = \varphi_{ab}(x)$$

Donc $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab} \in A$. De plus, on voit que $\varphi_{a^{-1}} \circ \varphi_a = \varphi_a \circ \varphi_{a^{-1}} = \varphi_e = \mathrm{id}_G$. Donc, A est stable par passage à l'inverse, par suite $A = \mathrm{Aut}(G)$ est un groupe pour la composition.

> Exercice 6. Soit G un groupe noté multiplicativement et on note e son élément neutre. On suppose de plus que G est fini de cardinal un nombre pair. Montrer qu'il existe un élément $x \neq e$ tel que $x^{-1} = x$.

Solution.

On met en paires les x et x^{-1}. Pour $x \in G$, on pose $I_x = \{x, x^{-1}\}$. On remarque que les $(I_x)_{x \in G}$ forment une partition de G (il est facile de voir que les $I_x \neq \varnothing$ et que $I_x \cap I_y = \varnothing$ si $x \neq y$ et que la réunion des I_x vaut G). Donc $\sum_{x \in G,\, x \neq e} [I_x| + 1$ est pair ($[I_x|$ désigne le cardinal de l'ensemble I_x), alors $\sum_{x \in G,\, x \neq e} [I_x|$ est impair et puisqu'une somme impaire de nombre impaire ne peut être paire, alors il existe $x \in G$, tel que I_x soit réduit à un élément, i.e. $x = x^{-1}$. Ce qu'il fallait prouver.

> Exercice 7. Soit $(G, *)$ un groupe fini. On considère un morphisme non constant $f : (G, *) \to (^*, \times)$. Déterminer la somme des valeurs prises par f sur G.

Solution.

Puisque $f(e) = 1$ (où e désigne l'élément neutre de G) et que f n'est pas constante, alors il existe $g \in G$ tel que $f(g) \neq 1$ (g est différent de e bien sûr). L'application $x \in G \mapsto gx \in G$ est injective (puisque g est régulier), le groupe G étant fini, l'application ainsi définie est une bijection. Donc

$$\sum_{x \in G} f(x) = \sum_{x \in G} f(gx) = \sum_{x \in G} f(g)f(x) = f(g) \sum_{x \in G} f(x)$$

Alors $\sum_{x \in G} f(x) = 0$ (puisque $f(a) \neq 1$). Ce qui permet de conclure.

> Exercice 8. Soit G un groupe noté multiplicativement et H et K deux sous groupes de G. On suppose qu'il existe deux éléments $x, y \in G$ tels que $xH = yK$. Montrer que $H = K$.

Solution.

Pour montrer que $H = K$, il suffit de montrer que $H \subset K$ (on montre similairement que KH puisque x et y sont arbitraires). On sait que $y^{-1}xH = K$, donc $y^{-1}x = (y^{-1}x)e \in y^{-1}xH = K$ (e étant l'élément neutre du groupe G). Soit $h \in H$, on sait que $y^{-1}xh \in y^{-1}xH = K$, donc il existe $k \in K$ tel que $y^{-1}xh = k$, donc $h = x^{-1}yk \in K$ (puisque $k \in K$ et $x^{-1}y = (y^{-1}x)^{-1} \in K$), et ceci pour tout $h \in K$. Donc $H \subset K$. Ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 9. Soit G un groupe noté multiplicativement. Sur G, on définit la loi $\star$ par $x \star y = yx$. Montrer que $(G, \star)$ est un groupe isomorphe au groupe $(G, \times)$.

Solution.

Tout d'abord, il est clair $\star$ une loi de composition interne sur G. On définit l'application ϕ par $x \in G \mapsto \phi(x) = x^{-1} \in G$. L'application ϕ est bien définie, elle est clairement bijective (puisque tout élément d'un groupe admet un unique inverse), de plus pour tout $x, y \in G$ on a

$$\phi(x \star y) = \phi(yx) = (yx)^{-1} = x^{-1}y^{-1} = \phi(x)\phi(y)$$

Donc, les groupes $(G, \star)$ et $(G, \times)$ sont isomorphes.

Exercice 10. Soit G un groupe noté multiplicativement, son élément neutre est noté e. Soient a et b deux éléments de G vérifiant $a^2 = b^2 = (ba)^2 = e$. Montrer que a et b commutent (c'est à dire $ab = ba$).

Solution.

C'est immédiat. En effet, il suffit de remarquer que $a^{-1} = a$ et $b^{-1} = b$ et que $(ba)^{-1} = ba$. Donc

$$ab = a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1} = ba$$

Exercice 11. Soit G un groupe fini commutatif de cardinal n noté multiplicativement, son élément neutre est noté e. Montrer que pour tout élément g dans G, on a $g^n = 1$.

Solution.

On fixe un élément g de G. L'application $x \in G \mapsto gx \in G$ est bijective (puisqu'elle est clairement injective et G est fini), donc

$$\prod_{x \in G} x = \prod_{x \in G} gx = g^n \prod_{x \in G} x$$

Puisqu'on est dans un groupe, alors $g^n = e$ (en simplifiant par $\prod_{x \in G} x$). D'où le résultat.

➽ Ce résultat est un cas particulier du théorème de Lagrange. Le théorème de Lagrange est prouvée dans le sujet d'étude ($*$).

Exercice 12 (Sous groupes additifs de $\mathbb{Z}$).
Montrer que les sous groupes de $(\mathbb{Z},+)$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$ où n un entier naturel.

Solution.

Il est clair que les $n\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}$) sont des sous groupes de $\mathbb{Z}$. Réciproquement soit I un sous groupe de $\mathbb{Z}$, si I est réduit à l'élément neutre 0, c'est fini (puisque $\{0\} = 0\mathbb{Z}$). Sinon, I possède un élément entier naturel. En effet, I contient un élément non nul a, si $a \in \mathbb{N}^*$ c'est fini, sinon on aura $a \in \mathbb{Z}_*^-$ et alors $-a$ convient (puisque I est stable par passage à l'inverse -la loi est additive-). Notons $\Gamma = I \cap \mathbb{N}^*$, cet ensemble est une partie de $\mathbb{N}^*$ non vide, donc elle admet un plus petit élément qu'on notera n. On va montrer par la suite $I = n\mathbb{Z}$, l'inclusion $n\mathbb{Z} \subset I$ est facile à voir (puisque $0, n \in I$ et que I est stable par addition et par passage à l'opposé). Pour l'inclusion réciproque, on se donne un élément $a \in I$, et soit $a = qn + r$ la division euclidienne. Or $r = a - qn \in I$ (puisque $a, qn \in I$) avec $0 \leq r \leq n-1$. Si $r > 0$, r sera le plus petit élément de Γ et ceci contredit le caractère minimal de n. Donc $r = 0$ puis $a = qn \in n\mathbb{Z}$ et ceci pour tout $a \in I$, donc $I \subset n\mathbb{Z}$. Finalement, $I = n\mathbb{Z}$, d'où le résultat.

➼ C'est un résultat très utile qui permet de caractériser des sous groupes de $\mathbb{Z}$. Un résultat similaire permettant de caractériser les sous groupes additifs de $\mathbb{R}$ est démontré dans le problème $(*)$.

CHAPITRE 9

STRUCTURE D'ANNEAU, CORPS

Cette partie d'exercices est adaptée au programme de la terminale, cependant on invite le lecteur curieux à lire le chapitre "compléments sur les anneaux et les idéaux" et la partie des problèmes concernant les structures algébriques.

On se donne deux anneaux unitaires A et B, un morphisme d'anneaux $f : A \to B$ est une application vérifiant $f(a+b) = f(a) + f(b)$ et $f(ab) = f(a)f(b)$ pour tout $a, b \in A$ et en plus $f(1_A) = 1_B$. Un isomorphisme d'anneaux est un morphisme d'anneaux bijectif, et comme pour les groupes un isomorphisme défini d'un anneau vers lui même est dit automorphisme.
Un sous anneau A' d'un anneau $(A, +, \times)$ est un anneau contenu dans A, on peut caractériser les sous anneaux A' de A par le fait qu'elles soient des sous groupes de $(A, +)$ et qu'il soit stable par multiplication.

Exercice 1. Pour $\omega \geq 0$ un nombre réel, on note $\mathbb{Z}[\sqrt{\omega}] = \{a + b\sqrt{\omega} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{\omega}] = \{a + b\sqrt{\omega} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
1/a/ Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.
b/ Déterminer $U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ (l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$).
2/ Soit a un entier naturel tel que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$. Démontrer que $(\mathbb{Q}[\sqrt{a}], +, \times)$ est un corps.
3/ Soit ω un nombre complexe. Donner une condition nécessaire et suffisante sur ω pour que l'ensemble $\{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ soit un sous anneau de $\mathbb{C}$.

Solution.

1/a/ Notons que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est non vide. On montre que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est sous anneau de $\mathbb{R}$, on se donne $a + b\sqrt{2}, a' + b'\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. On a

$$(a + b\sqrt{2}) - (a' + b'\sqrt{2}) = (a - a') + (b - b')\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$$

Donc $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +)$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$. De plus, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est stable par multiplication, puisque

$$(a + b\sqrt{2})(a' + b'\sqrt{2}) = aa' + 2bb' + (ab' + a'b)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$$

Donc $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous anneau de $\mathbb{R}$, en particulier c'est un anneau.
b/ Pour $x = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on pose $N(x) = a^2 - 2b^2$. On vérifie que pour tous $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ on a $N(xy) = N(x)N(y)$. Soit $x = a + b\sqrt{2}$ un élément inversible, notons x' son inverse on sait que $N(x)N(x') = N(1) = 1$ mais $N(x)$ et $N(x')$ sont des entiers. Par conséquent, $|N(x)| = 1$; c'est à dire $a^2 - 2b^2 = \pm 1$, réciproquement on voit

facilement que si $N(x) = \pm 1$, alors $x = a + b\sqrt{2}$ est inversible d'inverse $\pm(a - b\sqrt{2})$.
2/ Il suffit de vérifier que l'ensemble en question un sous anneau de $\mathbb{R}$, et qu'il est stable par passage à l'inverse (pour la loi multiplicative) ; on dit que $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ est un sous corps de $\mathbb{R}$.
3/ Notons d'abord que l'ensemble $A_\omega = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un sous groupe de $(,+)$. De plus $1 \in A_\omega$. On montre facilement qu'une condition nécessaire et suffisante pour que A_ω soit un sous anneau de $\mathbb{C}$ est qu'il existe $c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $\omega^2 = a\omega + b$ (car si on muliplie deux éléments de A_ω, une condition nécessaire et suffisante est $\omega^2 \in A_\omega$).

Exercice 2. Montrer qu'un anneau fini intègre est nécessairement un corps.

Solution.

Il s'agit de montrer que tout élément $a \in A^*$ est inversible. On se fixe un élément $a \in A^*$, considérons l'application $\psi_a : x \in A \mapsto ax \in A$. L'application ψ_a est bien définie. De plus, ψ_a est injective, puisque pour tous $x, y \in A$, $\psi_a(x) = \psi_a(y)$ entraîne $ax = ay$, entraîne $a(x - y) = 0$ et puisque l'anneau A est intègre, on déduit que $x - y = 0$ (puisque $a \neq 0$), ce qui se réecrit $x = y$. Donc ψ_a est injective, puisque A est fini, ψ_a est donc bijective, puisque $1_A \in A$, alors il existe $a' \in A$ tel que $aa' = 1_A$ (on dit que a est inversible à droite) et de même on montre l'existence de $a'' \in A$ tel que $a''a = 1_A$ (en considérant l'application $x \mapsto xa$). Donc, a est inversible (puisque les inverses à gauche et à droite coïncident dans le monoïde $(A, \times)$. D'où le résultat.

➻ On peut résoudre cet exercice en utilisant la méthode décrite dans la seconde méthode de la solution de la question **3/** de l'exercice 5 page 44.

Exercice 3 (Un morphisme de corps est toujours injectif).
Soit $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ deux corps, et $f : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ un morphisme d'anneaux. Montrer que f est une application injective.

Solution.

Soit $f : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ un morphisme de corps. On se fixe $x \in \mathbb{K}^*$, x est bien sur inversible, donc il en est de même pour $f(x)$ (puisque $f(x)f(x^{-1}) = f(1_\mathbb{K}) = 1_\mathbb{L} = f(x^{-1})f(x)$). Soient x et y, deux éléments de $\mathbb{K}$, tels que $f(x) = f(y)$, ceci entraîne $f(x - y) = 0$, d'après ce qui précède on déduit que $x - y = 0_\mathbb{K}$ (sinon $x - y$ sera inversible et donc son image le serait également d'après ce qui précède). Donc $x = y$, finalement on a montré que f est injective.

CHAPITRE 10

CALCUL INTÉGRAL DES FONCTIONS CONTINUES

Cette partie d'exercices est adaptée au programme de la terminale, cependant on invite le lecteur curieux à lire les chapitre "Intégration sur un segment" et "Intégration sur un intervalle quelconque" et la partie des problèmes concernant l'intégration.

Exercice 1. Déterminer les valeurs des intégrales suivantes

a/ $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2t)}{1+2\sin t}\,\mathrm{d}t$, **b/** $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\,\mathrm{d}t$, **c/** $K = \displaystyle\int_0^{\pi} (\cos^6 t + \sin^6 t)\,\mathrm{d}t$

Solution.

a/ On considère I' l'intégrale définie par $I' = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+2\sin t}\,\mathrm{d}t$, on sait que

$$I+I' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2t)}{1+2\sin t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+2\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2t)+\cos t}{1+2\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin t\cos t+\cos t}{1+2\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

D'autre part

$$I' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+2\sin t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos t}{1+2\sin t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}[\ln(1+2\sin t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 3$$

Par conséquent $I = 1 - I' = 1 - \ln(3)/2$.

b/ On pose $J' = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}\,\mathrm{d}t$, on a clairement $J + J' = \pi/4$. De plus, on a

$$J' - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}\,\mathrm{d}t = [\ln(\cos t + \sin t)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(\sqrt{2}) = \ln(2)/2$$

Par conséquent, on a $J = \pi/8 - \ln(2)/4$.

c/ On remarque que pour tout nombre réel x, on a

$$(1-x)^3 + (1+x)^3 = 2 + 6x^2$$

Donc,

$$K = \int_0^\pi (\cos^6 t + \sin^6 t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \left[\left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)^3 + \left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right)^3\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int_0^\pi (2+6\cos^2(2t))\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\int_0^\pi \frac{1+\cos(4t)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{5\pi}{8} + \frac{3}{16}[\sin(4t)]_0^\pi = \frac{5\pi}{8}$$

Donc $K = 5\pi/8$.

Exercice 2.

1/ Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(a+b-t)\,\mathrm{d}t$$

2/ (Application). Calculer les intégrales suivantes.

$$I = \int_{-1}^{1} (\sqrt{1-t^3} - \sqrt{1+t^3})\,\mathrm{d}t, \qquad J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt[3]{\sin t} - \sqrt[3]{\cos t})\,\mathrm{d}t, \qquad K = \int_0^\pi t\sin t\,\mathrm{d}t$$

Solution.

1/ Un simple changement de variable $u = a+b-t$ permet d'écrire

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_b^a -f(a+b-u)\,\mathrm{d}u = -\int_b^a f(a+b-u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(a+b-t)\,\mathrm{d}t$$

D'où le résultat.

2/ Pour l'intégrale I, on sait d'après la question précédente

$$I = \int_{-1}^{1} (\sqrt{1-t^3} - \sqrt{1+t^3})\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1} (\sqrt{1+t^3} - \sqrt{1-t^3})\,\mathrm{d}t = -I$$

puisque la fonction $f_1 : t \in [-1,1] \mapsto \sqrt{1-t^3} - \sqrt{1+t^3}$ est continue sur $[-1,1]$ et que pour tout $t \in [-1,1]$, on a $f_1(-1+1-t) = -f_1(t)$, donc $2I = 0$ et par conséquent on obtient $I = 0$.

Pour l'intégrale J, on sait que la fonction $f_2 : t \in [\pi/6, \pi/3] \mapsto t\sin t$ est continue et en plus elle vérifie

$$f_2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} - t\right) = f_2(\pi/2 - t) = -f_2(t)$$

pour tout $t \in [\pi/6, \pi/3]$. Donc d'après la question précédente on en déduit que $J = -J$, d'où l'intégrale J est nulle.

Pour l'intégrale K, on a d'après la question précédente

$$K = \int_0^\pi t\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi (\pi - t)\sin(\pi - t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \pi\sin t\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi t\sin t\,\mathrm{d}t$$

On en déduit que

$$2K = \int_0^\pi \pi\sin t\,\mathrm{d}t = \pi\int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t = \pi[-\cos t]_0^\pi = 2\pi$$

D'où la valeur de l'intégrale K vaut π.

Exercice 3.
1/ En utilisant le changement de variable $t = x + \sqrt{1+x^2}$, déterminer la valeur de l'intégrale suivante

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

2/ En déduire le calcul de l'intégrale suivante

$$J = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Solution.

1/ Utilisons l'indication, le changement de variable $t = x + \sqrt{1+x^2}$ fournit

$$\mathrm{d}t = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x$$

et alors on obtient

$$\frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Donc

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t}\,\mathrm{d}x = \ln(1+\sqrt{2})$$

2/ En utilisant une intégration par partie, on obtient

$$J = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [x\sqrt{1+x^2}]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x\Big] = \sqrt{2} - \left[\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2} - J + I\right.$$

Donc

$$J = \frac{\sqrt{2}+I}{2} = \frac{\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}}{2}$$

➽ Le changement de variable de la question **1/** parait étrange, l'origine de ce changement de variable provient des fonctions hyperboliques réciproques.

Exercice 4. Montrer que

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

pour tous p et q entiers naturels.

Solution.

Soient (p, q) un couple d'entiers naturels. On sait que

$$I_{p,q} = \frac{1}{p+1}\int_0^1 (p+1)t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p+1}\underbrace{\Big[t^{p+1}(1-t)^q\Big]_0^1}_{=0} + \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t = \frac{q}{p+1}I_{p+1,q-1}$$

Maintenant, en fixant p et en regardant les $I_{p,q}$ (pour q parcourant l'ensemble des entiers naturels) comme les termes d'une suite en q. On a

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1} = \frac{q \times (q-1)}{(p+1) \times (p+2)} I_{p+2,q-2} = \ldots = \frac{q!}{(p+1) \times \ldots \times (p+q)} I_{p+q,0}$$

Or, on a

$$I_{p+q,0} = \int_0^1 t^{p+q} \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{p+q+1}}{p+q+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$$

On en déduit que

$$I_{p,q} = \frac{q!}{(p+1) \times \ldots \times (p+q+1)} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

D'où le résultat.

➽ On peut déterminer l'expression explicite de l'intégrale $I_{p,q}$ en développant $(1-t)^q$ et en utilisant la linéarité du signe intégrale.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue périodique de période $T > 0$. Montrer que pour tout réel a et pour entier relatif n, on a

$$\int_a^{a+nT} f(x) \, \mathrm{d}x = n \int_a^{a+T} f(x) \, \mathrm{d}x$$

Solution.

Première méthode. Écrivons en utilisant la relation de Chasles

$$\int_a^{a+nT} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^{a+T} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_{a+T}^{a+2T} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_{a+2T}^{a+3T} f(x) \, \mathrm{d}x + \ldots + \int_{a+(n-1)T}^{a+nT} f(x) \, \mathrm{d}x \qquad (*)$$

Montrons que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, on a

$$\underbrace{\int_{a+kT}^{a+(k+1)T} f(x) \, \mathrm{d}x}_{I_k} = \int_a^{a+T} f(x) \, \mathrm{d}x$$

Autrement dit la suite de terme général I_k est constante, or on a pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ d'après la relation de Chasles,

$$I_k = \int_{a+kT}^{a+(k+1)T} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{a+kT}^{a} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_a^{a+T} f(x) \, \mathrm{d}x + \underbrace{\int_{a+T}^{a+(k+1)T} f(x) \, \mathrm{d}x}_{I}$$

Évaluons l'intégrale I, en utilisant un changement de variable $u = x - T$ et la T-périodicité de la fonction f nous garantit la chose suivante,

$$I = \int_{a+T}^{a+(k+1)T} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^{a+kT} f(x) \, \mathrm{d}x$$

Donc

$$I_k = \int_{a+kT}^{a} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_a^{a+T} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_a^{a+kT} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^{a+T} f(x) \, \mathrm{d}x$$

Revenons à l'expression $(*)$, on a alors

$$\int_a^{a+nT} f(x) \, \mathrm{d}x = I_0 + I_1 + \ldots + I_{n-1} = nI_0 = n \int_a^{a+T} f(x) \, \mathrm{d}x$$

Seconde méthode. Soit φ la fonction de variable définie pour tout réel a par

$$\varphi(a) = \int_a^{a+nT} f(x) \, \mathrm{d}x - n \int_a^{a+T} f(x) \, \mathrm{d}x$$

Il s'agit de montrer que φ est constamment nulle. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\varphi'(a) = f(a+nT) - f(a) - n(f(a+T) - f(a)) = 0$$

Donc, φ est une fonction constante et par conséquent, pour tout réel a on a $\varphi(a) = \varphi(0) = 0$ (résultat facile à voir en utilisant un changement de variable et la T-périodicité de f). Ceci achève la preuve.

Exercice 7.
1/ Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (où $a < b$ sont des réels) une fonction continue positive non nulle.Montrer que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$$

2/ Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ (où $a < b$ sont des réels) une fonction numérique continue. Montrer qu'on a l'implication suivante

$$\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow g = 0$$

Solution.

1/ La non-nullité de la fonction f et son signe positif sur le segment $[a,b]$ nous assure l'existence d'un $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$. La fonction f étant continue en x_0, on a alors

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \eta > 0)(\forall x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]), \qquad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Réécrivons cette proposition pour $\epsilon_0 = f(x_0)/2$, on déduit que qu'il existe un segment non réduit à un singleton $[\alpha, \beta]$ (pour $\alpha = x_0 - \eta$ et $\beta = x_0 + \eta$) sur lequel pour tout $x \in [\alpha, \beta]$ on a $-\epsilon_0 + f(x_0) < f(x) < f(x_0) + \epsilon_0$. Donc, sur $[\alpha, \beta]$ on a $f \geq f(x_0)/2 = f(x_0) - \epsilon_0$. En intégrant sur le segment $[\alpha, \beta]$ on trouve

$$\int_{[\alpha,\beta]} f \geq f(x_0)(\beta - \alpha)/2 > 0$$

Mais on a

$$\int_{[a,b]} f = \underbrace{\int_{[a,\alpha]} f}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{[\alpha,\beta]} f}_{>0} + \underbrace{\int_{[\beta,b]} f}_{\geq 0} > 0$$

D'où le résultat.
2/ Procédons par l'absurde en supposant que g n'est pas constamment nulle, il résulte que g^2 n'est pas constamment nulle, cette fonction est de plus continue et de signe positif sur le segment $[a,b]$. Donc d'après la question précédente, on déduit que

$$\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x > 0$$

Et ceci n'est pas possible par hypothèse. Donc g est constamment nulle.

➽ Le résultat de la question **1/** montre que si l'intégrale sur un segment d'une fonction continue positive est nulle, alors la fonction intégrée est identiquement nulle.

Exercice 7. Déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n>0}$ de terme général défini par

$$U_n = \frac{1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

où $\alpha > 0$ un nombre réel donné.

Solution.

On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^\alpha$ pour tout $x \in [0,1]$. Notons que la fonction f est continue. D'autre part, on remarque que

$$U_n = \frac{1+2^\alpha+3^\alpha+\ldots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{1+\alpha}$$

En utilisant les sommes de Riemann.

➼ Il existe un théorème plus général concernant les sommes de Riemann et les sommes de Darboux.

Exercice 9. Déterminer la limite de la suite $(V_n)_{n>0}$ de terme général défini par

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

Solution.

On peut pas utiliser des sommes de Riemann directement, pour s'en sortir on va faire une petite rectification, on écrit

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \underbrace{\left[\frac{1}{n+1} \times \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1} \sin\left(\frac{k}{n+1}\pi\right)\right]}_{W_n}$$

Or, pour $n \geq 2$ on a

$$W_{n-1} = \frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \sin\left(\frac{k}{n}\pi\right) \to \int_0^1 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}$$

Donc la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ converge et sa limite vaut $1/\pi$.

Exercice 10. Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant

$$\int_0^\pi \sin(t) f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Montrer qu'il existe un nombre réel $\alpha \in [0,\pi]$ telle que $f(\alpha) = 0$.

Solution.

C'est facile à voir, considérons la fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tout $x \in [0,1]$. On sait que $\varphi(0) = 0$ et par hypothèse, on a $\varphi(\pi) = 0$, en plus la fonction φ est dérivable sur $[0,\pi]$, donc le théorème de Rolle s'applique et permet de garantir l'existence de $\alpha \in]0,\pi[$ tel que $\varphi'(\alpha) = \sin(\alpha)f(\alpha) = 0$, mais la fonction sinus ne s'annule pas sur l'intervalle $]0,\pi[$, donc $f(\alpha) = 0$, ce qui permet de conclure.

Exercice 11. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto x^5 e^{x^3}$.

Solution.

On note $\displaystyle\int f$ une primitive de la fonction f. On écrit

$$\int f = \int x^5 e^{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^3 \times x^2 e^{x^3}\,\mathrm{d}x = \left[x^3 \frac{e^{x^3}}{3}\right] - \int x^5 e^{x^3}\,\mathrm{d}x = \left[x^3 \frac{e^{x^3}}{3}\right] - \int f\,\mathrm{d}x$$

Donc les primitives de la fonction f sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^3 e^{x^3}}{6} + \lambda$ où λ est une constante réelle.

Exercice 12. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, on a

$$\exp(x) \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

pour tout entier naturel n.

Solution.

On montre le résultat par récurrence sur n. Pour $n = 0$, on a bien évidemment $\exp(x) \geq 1$ pour tout $x \geq 0$. Supposons le résultat pour le rang $n-1$, on a alors pour tout $t \geq 0$,

$$\exp(t) \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}$$

La positivité de l'intégrale, permet d'écrire pour un réel $x \geq 0$

$$\exp(x) - 1 = \int_0^x \exp(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x \frac{t^k}{k!}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Et ceci achève la récurrence.

➽ On peut montrer que pour tout réel x, on a $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$; résultat qu'on peut démontrer par exemple en utilisant l'inégalité de Taylor.

CHAPITRE 11

MATRICES

Cette partie d'exercices traite le cas général des matrices à coefficients complexes de taille $n \times m$ où n et m deux entiers naturels non nuls, en particulier les matrices d'ordre n où n un entier naturel non nul. Avant de de lancer dans les exercices, on invite le lecteur à lire les généralités données au début de ce chapitre d'exercices.

Soient (n, m) un couple d'entiers naturels non nuls. Une matrice M de taille $n \times m$ à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ est la donnée d'une suite finie $(m_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]\times[[1,m]]}$ doublement indexée où les $m_{i,j}$ sont des éléments du corps $\mathbb{K}$. Lorsque n et m sont égaux, la matrice M est dite matrice carrée d'ordre n. On définit le produit de deux matrices $M = (a_{i,j})$ et $N = (b_{i,j})$ de tailles respectifs $n \times m$ et $m \times l$ par $M \times N = L(c_{i,j})$ où L est la matrice de taille $n \times l$ avec

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

La matrice $L = (c_{i,j})$ est obtenue en multipliant la i-ème ligne de la matrice M par la j-ème colonne de la matrice N. Muni de cette loi, le triplet $(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}), +, .)$ est un anneau unitaire dont l'élément unité est la matrice I_n où $I_n = diag(1_{\mathbb{K}}, \dots, 1_{\mathbb{K}})$. L'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices d'ordre n qui sont inversibles, muni de la multiplication matricielle, cet ensemble est un groupe appelé le groupe linéaire d'ordre n.
Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de taille $n \times m$, la transposée de la matrice A est la matrice notée A^T de taille $m \times n$ obtenue en transposant les lignes et les colonnes de la matrice A, c'est la matrice $(a'_{i,j})$ où pour tout couple (i, j), on a $a'_{i,j} = a_{j,i}$. Une matrice est dite symétrique si elle est égale à sa transposée, et est dite antisymétrique si elle est égale à l'opposée de sa matrice transposée.

Exercice 1. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice carrée définie par

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer M^3, puis déduire que la matrice $I - M$ est inversible et déterminer son inverse.

Solution.

On commence par déterminer la valeur de M^2, on a

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis, on a

$$M^3 = M^2 \times M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ensuite, on a

$$(I - M)(I + M + M^2) = (I + M + M^2)(I - M) = I - M^3 = I$$

Donc, la matrice $I - M$ est inversible d'inverse

$$I + M + M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Pour un réel θ, on note

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Déterminer les puissances de A_θ (les A_θ^n pour n un entier relatif).

Solution.

Soient θ et θ' deux nombres réels. On a

$$A_\theta \times A_{\theta'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \times \cos\theta' - \sin\theta \times \sin\theta' & -\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & -\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} = A_{\theta+\theta'}$$

Une récurrence immédiate permet de voir que pour tout entier naturel n, on a $A_\theta^n = A_{n\theta}$. Soit n un entier relatif négatif, on remarque que

$$I = A_0 = A_{n\theta - n\theta} = A_{n\theta} \times A_{-n\theta} A_n = A_\theta^{-n} \times A_{n\theta}$$

Il résulte que $A_\theta^n = \left(A_\theta^{-n}\right)^{-1} = A_{n\theta}$. On en déduit que pour tout entier relatif n, on a $A_\theta^n = A_{n\theta}$.

Exercice 3. Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ où $p \geq 1$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer M^n pour un entier relatif n.

Solution.

Une multiplication matricielle permet de voir que

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} = I$$

Donc pour un entier impair n, on a $A^n = A$ et pour un entier pair n, on a $A^n = I$.

Exercice 4. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\sigma(A)$ la somme de tous les termes de A. Soit J la matrice définie par

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice dont tous les termes sont égals à 1.
Montrer que $J \times A \times J = \sigma(A)J$.

Solution.

On note AJ la matrice $(b_{i,j})$, $(c_{i,j})$ la matrice JAJ. On sait que pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ on a $b_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}$, et alors pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ on a

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{k,i} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n b_{k,j} = \sigma(A)$$

Donc $JAJ = (c_{i,j})$ est la matrice dont tous les termes valent $\sigma(A)$, c'est donc la matrice $\sigma(A)J$.

Exercice 5.
1/ On suppose que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices qui commutent et que A est inversible. Montrer que les matrices A^{-1} et B commutent.
2/ On rappelle qu'une matrice M d'ordre n est dite nilpotente si M^p s'annule pour un certain entier naturel p. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices tels que B nilpotente et commute avec A. Montrer que A et $A+B$ sont simultanément inversibles.

Solution.

1/ Écrivons

$$A^{-1}B = A^{-1}(BA)A^{-1} = A^{-1}(AB)A^{-1} = BA^{-1}$$

Donc, A^{-1} et B commutent.
2/ Notons que si une matrice N est nilpotente, alors la matrice $I - N$ est inversible. En effet, soit p un entier naturel tel que $N^p = 0$, alors on a

$$(I - N)(I + N + N^2 + \ldots + N^{p-1}) = (I + N + N^2 + \ldots + N^{p-1})(I - N) = I - N^p = I$$

On va utiliser ce résultat par la suite, puisque la matrice B est nilpotente, il en est de même pour la matrice $-BA^{-1}$, donc la matrice $I + BA^{-1}$ est inversible, mais observons que $A+B$ est produit de deux matrices inversibles $I + BA^{-1}$ et A, c'est donc une matrice inversible. Supposons maintenant que la matrice $A + B$ est inversible, il est facile de voir que la matrice $A = (A + B) + (-B)$ est inversible puisque la matrice $-B$ est nilpotente.

➸ Dans tout anneau A, si élément $a \in A$ est nilpotent, alors $1 - a$ est inversible. Il en résulte que si $1 - a$ est nilpotent, alors $a = 1 - (1 - a)$ est inversible.

CHAPITRE 12

GÉNÉRALITÉS SUR LES ESPACES VECTORIELS

Cette partie d'exercices concernent les espaces vectoriels. Les notions abordées sont adaptées au programme de la terminale : structure d'espace vectoriel, sous-espace vectoriel, familles génératrices, familles libres, bases et la définition de la dimension.

Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un espace vectoriel dont l'ensemble des scalaires est le corps $\mathbb{K}$, par exemple $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit que E est un espace vectoriel réel.

Exercice 1. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions numériques f définies par $f(x) = ax + b|x|$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $(\mathcal{F}, +, \times)$ est un espace vectoriel réels puis déterminer sa dimension.

Solution.

On peut montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel, en vérifiant les axiomes d'un espace vectoriel, mais nous allons montrer que $\mathcal{F}$ est sous espace vectoriel réel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. D'abord, $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \to \mathbb{R})$ est non vide puisqu'il contient la fonction identiquement nulle. Maintenant, soient λ, μ deux nombres réels et f_1, f_2 deux éléments de $\mathcal{F}$. Il existe $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f_1(x) = a_1 x + b_1|x|$ et $f_2(x) = a_2 x + b_2|x|$ pour tout réel x. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda f_1 + \mu f_2)(x) = \lambda f_1(x) + \mu f_2(x) = \lambda a_1 x + \lambda b_1|x| + \mu a_2 x + \mu b_2|x| = \underbrace{(\lambda a_1 + \mu a_2)}_{a} x + \underbrace{(\lambda b_1 + \mu b_2)}_{b} |x| = ax + b|x|$$

Donc, $\lambda f_1 + \mu f_2 \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire $\mathcal{F}$ est stable par toute combinaison linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La famille (f, g) où $f(x) = x$ et $g(x) = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{F}$ qui est génératrice (par définition de $\mathcal{F}$) et qui est libre. En effet, soient λ, μ deux nombres réels tels que $\lambda f + \mu g = 0$. On a alors, $\lambda x + \mu|x| = 0$ pour tout réel x. En particulier, pour $x = -1$, on obtient $\lambda = \mu$ et pour $x = 1$, on trouve $\lambda + \mu = 0$, donc $\lambda = \mu = 0$. Finalement, $(\mathcal{F}, +, \times)$ est un espace vectoriel réel de dimension 2.

Exercice 2 (Complexité d'un espace vectoriel).
Soit E un espace vectoriel réel. On munit $E \times E$ de l'addition usuelle

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

et de la multiplication externe par des complexes définie par

$$(a + ib).(x, y) = (a.x - b.y, a.y + b.x)$$

Muni de ces lois, montrer que $E \times E$ est $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Solution.

Il est aisé de voir que $(E \times E, +)$ est un groupe commutatif. De plus, on peut vérifier facilement que les axiomes d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ sont vérifiés pour $E \times E$.

Exercice 3. Montrer que l'ensemble des fonctions numériques périodiques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solution.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions numériques périodiques. L'ensemble $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$ est bien sur non vide, de plus il est stable par toute combinaison linéaire. En effet, soient f, g deux fonctions numériques périodiques et λ, μ deux nombres réels, la fonction numérique $\lambda f + \mu g$ est une fonction numérique périodique qui admet TT' comme période où T et T' sont deux périodes respectives de f et g.

Exercice 4 (Liberté de quelques familles de fonctions).
Soient I un ensemble quelconque, E un espace vectoriel et $(e_\lambda)_{\lambda \in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in I}$ est libre, si pour tout ensemble fini $J \subset I$, la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in J}$ est libre.

1/ Montrer que dans l'espace vectoriel des fonctions continues, la famille des fonctions $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ où f_λ : $x \mapsto e^{\lambda x}$ est libre.
2/ Montrer que dans l'espace vectoriel des fonctions continues, la famille des fonctions $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ où f_λ : $x \mapsto \cos(\lambda x)$ est libre.

Solution.

1/ Supposons que cette famille liée, de sorte qu'il existe $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ et $(\mu_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n \mu_i f_{\lambda_i} = 0$ avec les μ_i non tous nuls. Quitte à retirer des termes, on peut supposer que les $\mu \not= 0$. Quitte à réordonner des termes, on peut même supposer $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$. On a

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-\lambda_1 x} \left(\sum_{i=1}^n \mu_i e^{\lambda_i x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \sum_{i=1}^n \mu_i e^{(\lambda_i - \lambda_1)x} = \mu_1$$

puisque pour tout $i \geq 2$, $\lambda_i - \lambda_1 < 0$. Or $\sum_i \mu_i f_i = 0$, donc $\mu_1 = 0$, ce qui constitue une absurdité.
2/ Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que si $\sum_{i=1}^n \mu_i f_{\lambda_i} = 0$ où les λ_i des nombres réels positifs, alors pour tout

i, $\mu_i = 0$. Pour $n = 1$, c'est évident. Supposons maintenant que le résultat est vrai pour le rang $n-1$ et montrons le au rang n. Si $\sum_{i=1}^{n} \mu_i f_{\lambda_i} = 0, \quad (*)$ (les λ_i sont supposés distincts), en dérivant deux fois $(*)$, on obtient $-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \mu_i f_{\lambda_i}, \quad (**)$. En combinant $(*)$ et $(**)$, on obtient $\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i(\lambda_n^2 - \lambda_i^2) = 0$, et l'hypothèse de récurrence permet de déduire que $\lambda_n^2 - \lambda_i^2 = 0$, puisque les λ_i sont supposés positifs on tire $\lambda_i = \lambda_n$ pour tout i ou $\mu_i = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, puisque les λ_i sont distincts on a alors $\mu_i = 0$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, en substituant dans $(*)$, on trouve $\mu_n = 0$, finalement on a montré que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et la récurrence est alors établie.

Exercice 5. Soit ω un nombre complexe. On désigne par $\omega.\mathbb{R}$ l'ensemble $\{\omega x, \quad x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $\omega.\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme un espace vectoriel réel. Pour quelle condition $\omega.\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Solution.

On vérifie facilement que $\omega.\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme un espace vectoriel réel. Ainsi $\omega.\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Si $\omega.\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ alors puisque $\omega = \omega \times 1 \in \omega.\mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{C}$, on a $i.\omega \in \omega.\mathbb{R}$. Cela n'est possible que si $\omega = 0$. Inversement, si $\omega = 0$ alors $\omega.\mathbb{R} = \{0\}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Exercice 6.
1/ Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille non vide de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On suppose pour tout $(i,j) \in I^2$, il existe $k \in I$ tel que $F_i \cup F_j \subset F_k$. Démontrer que $\cup_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.
2/ Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $k \geq 2$ un entier, E un espace vectoriel et $(V_i)_{1\leq i\leq k}$ une famille finie de k sous-espace vectoriels stricts de E (les V_i sont différents de $\{0\}$ et E). Si $\cup_{1\leq i\leq n} V_i$ est un espace vectoriel, montrer que le corps $\mathbb{K}$ est fini et que le nombre de ses éléments est $\leq k-1$. Cette inégalité peut-elle être une égalité ?

Solution.

1/ On note $F = \cup_{i\in I} F_i$, il est clair que F est non vide. Soient $x, y \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ deux scalaires. Il existe un couple $(i,j) \in I^2$ tels que $x \in F_i$ et $y \in F_j$, or d'après l'hypothèse, il existe $k \in I$ tel que $F_i \cup F_j \cup F_k$, donc $x, y \in F_i \cup F_j \subset F_k$, F_k étant un espace vectoriel, on en déduit que $\lambda x + \mu y \in F_k \subset F$. Donc F est stable par toute combinaison linéaire, par conséquent F est un sous-espace vectoriel de E.
2/ On commence par démontrer un résultat classique qu'on utilisera par la suite, si F et G sont deux sous-espace vectoriels d'un espace vectoriel E sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. Alors, $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement l'un des deux sous-espaces vectoriels F et G est contenu dans l'autre. Si $F \subset G$ ou $G \subset F$, alors $F \cup G$ est sous-espace vectoriel de E. La condition nécessaire est plus délicate, on procède par absurde. Supposons que F n'est pas contenu dans G et que G n'est pas contenu dans F de sorte qu'il existe $x \in F$, $x \notin G$ et $y \in G$, $y \notin F$. On sait que x et y sont deux éléments de l'espace vectoriel $F \cup G$, donc $x + y \in F \subset G$. Donc $x + y \in F$ ou $x + y \in G$. Supposons par exemple que $x + y \in F$, puisque $-x \in F$, alors $y = x + y - x \in F$, ce qui est absurde.
Revenons à notre question. On note $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$. Quitte à retirer V_1, on peut supposer que $V_1 \subsetneq V_2 \cup \ldots \cup V_k$. Il existe donc $x \in V_1$ tel que $x \notin V_2 \cup \ldots V_k$. Or $V_2 \cup \ldots \cup V_k \subsetneq V_1$ (sinon on aura $V = V_1$), donc il existe $y \in V_2 \cup \ldots \cup V_k$ tel que $y \notin V_1$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $x + \lambda y \in V$ (puisque V est un espace vectoriel). Or $x + \lambda y \notin V_1$ (sinon on aura $y = x + y - x \in V_1$), donc il existe $i_\lambda \in \{2, \ldots, k\}$ tel que $x + \lambda y \in V_{i_\lambda}$. L'application $\varphi : \lambda \in \mathbb{K} \to i_\lambda \{2, \ldots, k\}$ est bien défnie. De plus elle injective, en effet, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $\varphi(\lambda) = \varphi(\mu)$. Ceci entraine que $i_\lambda = i_\mu$, alors $x + \lambda y$ et $x + \mu y$ sont deux éléments V_{i_λ}, donc $(\lambda - \mu)x \in V_{i_\lambda}$, comme $x \notin V_{i_\lambda}$ (puisque $x \notin V_2 \cup \ldots \cup V_k$), alors $\lambda - \mu = 0$, c'est-à-dire $\lambda = \mu$. Finalement, on a montré que φ injective. L'ensemble d'arrivé $\{2, \ldots, k\}$ étant fini, il en est de même pour le corps $\mathbb{K}$ et de plus le nombre de ses éléments est inférieur à celui de l'ensemble $\{2, \ldots, k\}$ qui vaut $k-1$. Ce qui

fallait démontrer.

Exercice 7. On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. On considère une famille de polynômes $F = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$ tels que $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \ldots < \deg(P_n)$ (on dit que F est une famille de polynômes de degrés échelonnés). Montrer que la famille F est libre.

Solution.

C'est facile à voir. En effet, soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une famille de scalaires réels vérifiant $\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n = 0$. Supposons qu'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\lambda_i \neq 0$. Soit p le plus grand entier $\in \{1, \ldots, n\}$ vérifiant cette propriété. Alors, le polynôme $\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n$ est de degré p, et ceci n'est pas possible puisque ce polynôme est le polynôme nul. Donc, la famille F est libre.

CHAPITRE 13

GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Exercice 1. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions numériques dérivables sur $]-1,+\infty[$ et vérifiant pour tout $x\in]-1,+\infty[$
$$(1+x)f'(x)+f(x)=1+\ln(1+x)$$
1/ Soit f une fonction dérivable sur $]-1,+\infty[$. Montrer que $f\in\mathcal{F}$ si et seulement si
$$x+\int_0^x \ln(1+t)\,\mathrm{d}t=(x+1)f(x)-f(0)$$
2/ En déduire les éléments de l'ensemble $\mathcal{F}$.

Solution.

1/ oit f une fonction dérivable sur $]-1,+\infty[$ vérifiant
$$(1+x)f'(x)+f(x)=1+\ln(1+x)$$
Alors
$$x+\int_0^x \ln(1+t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x \mathrm{d}t+\int_0^x \ln(1+t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x 1+\ln(1+t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x (1+t)f'(t)+f(t)\,\mathrm{d}t=[(1+t)f(t)]_0^x=(x+1)f(x)-f(0)$$
Réciproquement, supposons que
$$x+\int_0^x \ln(1+t)\,\mathrm{d}t=(x+1)f(x)-f(0)$$
En dérivant cette relation par rapport à x, on retrouve que $f\in\mathcal{F}$.
2/ Soit $f\in\mathcal{F}$. Soit $x\in]-1,+\infty[$, d'après la question précédente on a l'existence d'une constante λ indépendante de x telle que pour tout $x\in]-1,+\infty[$
$$f(x)=\frac{\lambda}{x+1}+\frac{x}{x+1}+\frac{\int_0^x \ln(1+t)\,\mathrm{d}t}{x+1}=\frac{\lambda}{x+1}+\frac{x}{x+1}+\frac{[(t+1)\ln(t+1)-(t+1)]_0^x}{x+1}=\frac{\lambda}{x+1}+\frac{x}{x+1}+\ln(x+1)-1+\frac{1}{x+1}$$
On en déduit que les éléments de l'ensemble $\mathcal{F}$ sont les fonctions
$$f:x\mapsto\frac{x+\lambda}{x+1}+\ln(1+x)$$

avec λ une constante réelle.

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(E), \quad y' + y = e^{2x}$$

Solution.

Soit y une solution de l'équation différentielle. Puisque $y' = e^{2x} - y$, alors y' est dérivable sur $\mathbb{R}$, c'est à dire y est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$. En dérivant les deux côtés de l'équation (E), on obtient $y''+y = 2e^{2x}$ et en combinant avec $2y' + 2y = 2e^{2x}$, on obtient $(F), \quad y'' - y - 2y' = 0$. L'équation (F) est une équation linéaire homogène de second ordre à coefficients constants. Trouvons les solutions de l'équation (F). L'équation caractéristique de l'équation différentielle (F) est $r^2 - r - 2 = 0$ de discriminant strictement positifs et admet deux zéros qui sont -1 et 2. Donc les solutions de l'équation différentielle (F) sont les fonctions $f : x \mapsto \alpha e^{-x} + \beta e^{2x}$. Réciproquement, en substituant ces fonctions dans l'équation différentielle de départ (E) et en remplaçant x par la valeur nulle, on trouve $\beta = 1/3$ et α reste arbitraire. Finalement, les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions $x \mapsto \alpha e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$ où α un nombre réel.

Exercice 3. Soient f et g deux fonctions numériques continues sur $[0,1]$ tels que pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$f(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que les fonctions f et g sont identiquement nulles.

Solution.

D'après les écritures des fonctions f et g, la fonction f est une primitive de g s'annulant en 0, pareil pour la fonction g. Donc $f(0) = g(0)$ et on a également les deux fonctions f et g sont dérivables sur $[0,1]$ et que pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) = g(x)$ et $f(x) = g'(x)$. Donc, en multipliant par le terme e^{-x} on obtient $e^{-x}f'(x) = e^{-x}g(x)$ et $e^{-x}f(x) = e^{-x}g'(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. Donc pour tout $t \in [0,1]$,

$$e^{-t}f'(t) - e^{-t}f(t) = e^{-t}g(t) - e^{-t}g'(t)$$

En intégrant les deux termes de cette égalité sur le segment $[0,x]$ (pour $x \in [0,1]$ un réel fixé), on obtient $e^{-x}f(x) = -e^{-x}g(x)$ (puisque $f(0) = g(0) = 0$), donc $f(x) = -g(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. Donc pour tout $t \in [0,1]$ on a $f'(t) + f(t) = g(t) + f(t) = g(t) - g(t) = 0$. En multipliant par e^t, on obtient pour tout $t \in [0,1]$, $e^t f'(t) + e^t f(t) = 0$ et en intégrant sur le segment $[0,x]$ (pour $x \in [0,1]$ un réel fixé) et en utilisant le fait que $f(0) = g(0) = 0$ on obtient $e^x f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et on en déduit que f est identiquement nulle, pareil pour g puisque $g = f'$. Ce qui achève la preuve.

CHAPITRE 14

ARITHMÉTIQUE DES ENTIERS

Exercice 1. Soient n et k deux entiers naturels impairs. Montrer que n divise

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + (n-1)^k + n^k$$

Solution.

Il suffit de montrer que n divise la somme $S = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + (n-1)^k + n^k$. Or, on remarque

$$2S = S + S = \sum_{i=1}^{n} i^k + \sum_{i=1}^{n}(n-i)^k + n^k = \sum_{i=1}^{n}[i^k + (n-i)^k] + n + \equiv \sum_{i=1}^{n}(i^k - i^k) \equiv 0 \pmod{n}$$

Donc n divise $2S$, puisque n est impair, alors d'après le théorème de Gauss, n divise S. D'où le résultat.

Exercice 2. Soient a, b et c trois entiers relatifs. Montrer l'équivalence suivante

$$6 \,|\, a^{81} + b^{81} + c^{81} \iff 6 \,|\, a + b + c$$

Solution.

On commence par remarquer que les entiers x et x^{81} ont même parité, donc 2 divise leur différence. Par conséquent $x^{81} \equiv x \pmod{2}$ pour $x \in \{a, b, c\}$. On montre également que $x^{81} \equiv x \pmod{3}$ pour $x \in \{a, b, c\}$. En effet, pour un entier x d'après le théorème de Fermat, on a $x^3 \equiv x \pmod{3}$, par conséquent $x^{81} \equiv x^{27} \equiv x^9 \equiv x^3 \equiv x \pmod{3}$, d'ou le résultat. Donc $x^{81} \equiv x \pmod{6}$ (puisque 2 et 3 sont premiers entre eux) et par conséquent

$$a^{81} + b^{81} + c^{81} \equiv a + b + c \pmod{6}$$

Ce qui permet de conclure.

Exercice 3 (Nombres de Fermat).
1/ Soit n un entier naturel, le n-ème nombre de Fermat est défini par $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que tous les nombres de Fermat sont premiers entre eux deux à deux.
2/ Soit n un entier naturel. Montrer que si l'entier $2^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2.

Solution.

1/ Soient $n < m$ deux entiers naturels. Il s'agit de montrer que F_n et F_m sont premiers entre eux, on note classiquement Δ leur plus grand diviseurde F_n et F_m commun et montre qu'il vaut 1. L'entier Δ divise $F_m - 2$. En effet,

$$F_m - 2 = 2^{2^m} - 1 = \prod_{k=1}^{m-1}(2^{2^k} + 1) = F_n \times \prod_{k=1, k\neq n}^{m-1}(2^{2^k} + 1)$$

Donc Δ divise 2, i.e. $\Delta \in \{1, 2\}$. Or, Δ ne peut pas être égal à 2 puisque 2 ne peut pas divise un nombre de Fermat. Donc $\Delta = 1$, ce qui est équivaut à dire que F_n et F_m sont premiers entre eux.
2/ On écrit $n = 2^p(2q+1)$ où p et q deux entiers naturels. Il s'agit de montrer que $q = 0$, supposons que $q \geq 1$. On remarque que

$$2^n + 1 = 2^{2^p(2q+1)} + 1 = (2^{2^p} + 1)K$$

où K un entier naturel en utilisant une identité remarquable classique. Donc, $2^n + 1$ n'est pas premier, ce qui contredit l'hypothèse. Donc, n est une puissance de 2.

Exercice 4. Soient x et y deux entiers naturels non nuls et k le plus petit entier naturel non nul tel que y divise kx. Montrer que k est un diviseur de y.

Solution.

Soit $y = kq + r$ la division euclidienne de y par k. Il s'agit de prouver que $r = 0$. C'est ce qu'on va démontrer par la suite. On remarque que $rx = (y - kq)x = yx - qkx$ est un multiple de y, mais la division euclidienne de y par k nous assure que $0 \leq r \leq k - 1$, k étant le plus petit entier naturel non nul tel que y divise kx, on tire que $r = 0$. Ce qui achève la preuve.

Exercice 5 (Autour des nombres jumeaux).
Deux entiers naturels sont dit des nombres jumeaux sont deux nombres premiers qui ne diffèrent que de 2.

Soient $\overline{a_1a_2\ldots a_n}_{(10)}$ et $\overline{b_1b_2\ldots b_n}_{(10)}$ la représentation en base décimale de deux nombres jumeaux ≥ 5. Montrer que l'entier N de représentation en base décimale $\overline{a_1b_1a_2b_2\ldots a_nb_n}_{(10)}$ ne peut pas être un nombre premier.

Solution.

Pour un entier naturel x quelconque dont la représentation en base décimale $\overline{x_1\ldots x_n}_{(10)}$, on a $x \equiv x_1 + \ldots + x_n \pmod{10}$. En effet, on écrit

$$x = \overline{x_1\ldots x_n}_{(10)} = 10^n x_1 + 10^{n-1}x_2 + \ldots + x_n \equiv x_1 + \ldots + x_n \pmod 3$$

Les deux entiers a et b étant des nombres jumeaux, ils sont en particuliers des nombres premiers et on aura donc par exemple (en supposant que $a < b$) $a \equiv 2 \pmod 3$ et $b \equiv 1$ (on ne pas avoir $a \equiv 0 \pmod 3$ ou $b \equiv 0 \pmod 3$ car $b > a \geq 5$ des nombres premiers). Par conséquent

$$\overline{a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_n b_n}_{(10)} \equiv a_1 + b_1 + \ldots + a_n + b_n \equiv (a_1 + \ldots + a_n) + (b_1 + \ldots + b_n) \equiv a + b \equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$$

Donc, l'entier $\overline{a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_n b_n}_{(10)}$ est divisible par 3 et puisqu'il est > 3, il est alors non premier.

Exercice 6 (Nombres de Mersenne).
Soient a et n deux entiers ≥ 2. Montrer que si $a^n - 1$ est un nombre premier, alors $a = 2$ et n est un nombre premier.

Solution.

Montrons d'abord que $a = 2$, si jamais on avait $a \geq 3$, alors $a - 1 \geq 2$ et alors l'entier $M_n = a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \ldots + 1)$ ne sera pas premier et on déduit que $a = 2$. Montrons maintenant que n est premier. Supposons par absurde qu'il existe $2 \leq x, y \leq n - 1$ tels que $n = xy$. Donc

$$M_n = 2^n - 1 = 2^{xy} - 1 = (2^x - 1)(2^{x(y-1)} + \ldots + 1)$$

qui n'est pas premier, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Donc n est un nombre premier.

Exercice 7. Déterminer tous les polynômes P à coefficients entiers tels que $P(n)$ divise $2^n - 1$ pour tout entier naturel non nul n.

Solution.

Rappelons une propriété utile qu'on utilisera par la suite ; Soit Q un polynôme à coefficients entiers et a et b deux entiers, alors $a - b$ divise $Q(a) - Q(b)$. En effet, pour $Q(x) = c_d x^d + \ldots + c_0$, regardons les monômes x^k, remarquons que $a - b$ divise $a^k - b^k$, donc par combinaison linéaire $a - b$ divise $Q(a) - Q(b)$.
Fixons maintenant un nombre premier q diviseur de $P(n_0)$ pour un entier naturel non nul n_0 (en supposant qu'il existe un tel n_0 tel que $|P(n_0)| \geq 2$), $q = n_0 + q - n_0$ divise $P(n + q) - P(n_0)$, mais q divise $P(n_0)$, alors q divise $P(n_0 + q)$ qui divise à son tour $2^{n_0+q} - 1$, donc par transitivité q divise $2^{n_0+q} - 1$. Or

$$0 \equiv 2^{n_0+q} - 1 \equiv 2^q \times 2^{n_0} - 1 \equiv 2 \times 2^{n_0} - 1 \equiv 2^{n_0+1} - 1 \pmod q$$

mais $2^{n_0} \equiv 1 \pmod q$ (puisque q divise $2^{n_0} - 1$), donc q divise 1, ce qui est impossible. Donc pour tout entier naturel non nui n, $P(n) \in \{-1, 1\}$, mais le polynôme P va prendre pour une infinité d'entiers naturels, la, soit la valeur -1 ou 1, il va par conséquent être constamment égal à cette valeur. Réciproquement, on vérifie que les polynômes qui sont constamment égaux à -1 et 1 sont solutions du problème.

Exercice 8 (Une variante du théorème de Bezout).
Soit x et y deux entiers ≥ 2 premiers entre eux. Montrer qu'il existe un unique couple d'entiers naturels (u_0, v_0) vérifiant

$$u_0 a - v_0 b = 1$$

Solution.

Les deux entiers naturels x et $y \geq 2$ étant premiers entre eux, le théorème de Bezout assure l'existence de $u_1, v_1 \in \mathbb{Z}$ tels que $u_1 x - v_1 y = 1$. Soit $u_1 = qy + r$ la division euclidienne de u_1 par y, on obtient $1 = (qy+r)x - v_1 y = rx - (v_1 - qx)y = u_0 x - v_0 y$ avec $u_0 = r$ et $v_9 = v_1 - qx$. De l'égalité $(v_1 - qx)y = rx - 1 \geq -1$, or $(v_1 - qx)y$ ne peut pas être égal à -1 puisque y est ≥ 2 par hypothèse. Donc $v_0 = (v_1 - qx)y \geq 0$. Le couple d'entiers naturels (u_0, v_0) convient donc.
Montrons par la suite que le couple (u_0, v_0) est unique. Soit alors (u_0', v_0') un couple vérifiant la même propriété que (u_0, v_0) vérifie. On a alors $(u_0' - u_0)x = (v_0' - v_0)y$, ceci montre que a divise $b|u_0' - u_0|$, mais a et b sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, on peut déduire que a divise $|u_0' - u_0'|$, sachant que $0 \leq |u_0' - u_0'| \leq a - 1$, donc $|u_0' - u_0| = 0$, par conséquent $u_0' = u_0$, et de même on trouve $v_0' = v_0$, les couples (u_0, v_0) et (u_0', v_0') sont identiques.

Exercice 9. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe n entiers entiers consécutifs tels que aucun parmi eux n'est un nombre premier

Solution.

Soit n un entier naturel non nul. On considère la suite d'entiers $(u_2, u_3, \ldots, u_{n+1})$ où pour tout $i \in \{2, 3, \ldots, n+1\}$, $u_i = i + (n+1)!$. Cette suite finie d'entiers consécutifs est convenable puisque pour tout $i \in \{2, 3, \ldots, n+1\}$, u_i est divisible par i.

Exercice 10
1/ Soit x et y deux entiers relatifs tels que x^2 divise y^2. Montrer que x divise y.
2/ Un entier n s'écrit sous forme d'un carré parfait et d'un cube parfait. Montrer que cet entier est une puissance sixième (i.e. il existe un entier m tel que $n = m^6$).

Solution.

1/ Supposons que x ne divise pas y, alors $x \geq 2$ et il existe un nombre premier p divisant x et ne divisant pas y. Or p divise x^2 qui divise de son tour y^2, donc p divise y^2, et alors p divise y, ce qui constitue une absurdité.
2/ Soient a et b des entiers tels que $n = a^2 = b^3$, par conséquent b^2 divise a^2, donc d'après la question précédente on peut déduire que b divise a, par conséquent il existe k tel que $a = kb$ et en substituant a dans la relation $a^2 = b^3$, on trouve $b = k^2$, mais on sait que $n = b^3$, donc $n = k^6$. D'où le résultat.

Exercice 11. Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels k tels que

$$p \quad \text{divise} \quad 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + (p+1)^k$$

Solution.

Pour tout $x \in \{1, 2, \ldots, p-1, p+1\}$, on sait d'après le petit théorème de Fermat que $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, donc on on prend les entiers naturels k comme étant les multiples de $p-1$ (qui sont bien évidemment en nombre infini), on trouve $x^k \equiv 1 \pmod p$ pour tout $x \in \{1, 2, \ldots, p-1, p+1\}$, les $x \in \{1, 2, \ldots, p-1, p+1\}$ étant en nombre p, alors leur somme est congru à $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{p} = p$ modulo p. La quantité $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + (p+1)^k$ est alors divisible par p (puisque p divise p^k). Les entiers naturels k étant en nombre infini, on a alors répondu à la question.

CHAPITRE 15

PROBABILITÉS DISCRÉTES

Exercice 1. Une urne contient des boules numérotées de 1 à 10. On tire, sans remise, trois boules dans cette urne.
1/ Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros en ordre croissant ?
2/ Même question pour un tirage avec remise et des numéros en ordre strictement croissant.
3/ Même question pour un tirage avec remise et des numéros en ordre croissant au sens large.

Solution.

1/ Pour chaque tirage faisant apparaître les nombres a, b, c dans le bon ordre, il y en a 5 autres où ces mêmes nombres apparaissent dans le désordre. La probabilité recherchée est donc égale à $1/6$.
2/ Un tirage s'apparente à une fonction de $[[1,3]]$ vers $[[1,10]]$. Il y a 10^3 fonctions tous équiprobables. Parmi celles-ci, on recherche les fonctions strictement croissantes. Celles-ci sont simplement déterminées par les 3 valeurs distinctes qu'elles prennent qu'il sut ensuite d'ordonner. Déterminer ces trois valeurs revient à choisir 3 éléments dans un ensemble à 10 éléments, il y a $\binom{10}{3}$ possibilités. La probabilité recherchée vaut donc

$$\frac{\binom{10}{3}}{10^3} = \frac{12}{100}$$

3/ Il s'agit maintenant de dénombrer les fonctions croissantes de $[[1,3]]$ vers $[[1,10]]$. A une telle fonction f on peut associer la fonction $g : [[1,3]] \to [[1,12]]$ définie par

$$g(1) = f(1), \quad g(2) = f(2) + 1, \quad g(3) = f(3) + 2$$

La fonction f étant croissante, la fonction g est strictement croissante. Inversement, à une fonction g strictement croissante de $[[1,3]]$ vers $[[1,12]]$ correspond une unique fonction f croissante de $[[1,3]]$ vers $[[1,10]]$.Il y a donc autant de fonctions croissantes de $[[1,3]]$ vers $[[1,10]]$ que de fonctions strictement croissantes de $[[1,3]]$ vers $[[1,12]]$ à savoir $\binom{12}{3}$. La probabilité recherchée vaut donc

$$\frac{\binom{10}{3}}{10^3} = \frac{22}{100}$$

Exercice 2. On considère N coffres. Avec une probabilité p un trésor à été placé dans l'un de ces coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $N-1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

Solution.

Considérons l'événement A : un trésor est placé dans l'un des coffres. Par hypothèse

$$\mathbb{P}(A) = p$$

Considérons l'événement A_i , un trésor est placé dans le coffre d'indice i. Par hypothèse $\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_j)$ et puisque les événements A_i sont deux à deux incompatibles, alors

$$\mathbb{P}(A_i) = p/N$$

La question posée consiste à déterminer

$$\mathbb{P}(A_N \,|\, \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{N-1}})$$

On a

$$\mathbb{P}(A_N \cap \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}}) = \mathbb{P}(A_N) = \frac{p}{N}$$

Et

$$\mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{N-1}}) = 1 - \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_{N-1}) = 1 - \frac{N-1}{N}p$$

Donc

$$\mathbb{P}(A_N \,|\, \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{N-1}}) = \frac{p}{N-(N-1)p}$$

Exercice 3. Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires.
1/ Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure à l'intérieur du tirage ?
2/ Sachant qu'une boule noire gure dans le tirage. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire ?

Solution.

1/ L'évènement contraire est que le tirage ne comporte que des boules blanches. Par dénombrement, sa probabilité est

$$\binom{8}{3} \Big/ \binom{10}{3} = \frac{7}{15}$$

et la probabilité cherchée est

$$1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

2/ Notons A l'événement, la première boule tirée est noire. En raisonnant comme au dessus

$$\mathbb{P}(A) = \frac{9 \times 8 + 9 \times 8}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{5},$$

L'événement B, au moins une boule tirée est noire a été mesurée ci-dessus et donc

$$\mathbb{P}(A \,|\, B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{3}{8}$$

Exercice 4 (Inégalité de Boole-Fréchet).
Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements de l'espace probabilisé $((\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
1/ Montrer que
$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \leq \min_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(A_i)$$
2/ Montrer que
$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1)$$

Solution.

1/ Soit i un élément de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a $A_1 \cap \ldots \cap A_n \subset A_i$, donc $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \leq \mathbb{P}(A_i)$. Par conséquent
$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \leq \min_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(A_i)$$
puisque $\min_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_{i_0})$ pour un certain $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
2/ Un passage au complémentaire fournit
$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) &= \mathbb{P}(\overline{A_1} \cup \ldots \cup \overline{A_n}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_i}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_i)) = n - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \end{aligned}$$
Et le résultat découle.

CHAPITRE 16

EXERCICES DE THÈMES VARIÉS

Cette dernière partie d'exercices, comme nommée regroupe une centaine d'exercices de thèmes variés, couvrant le programme des mathématiques du lycée, branche mathématique. Ces exercices sont issus en général des concours d'entrée en classes préparatoires de mathématiques supérieures (MPSI) pour les élèves prevenant du continent asiatique.

Exercice 1. Déterminer tous les entiers $n \geq 1$ tels que $\lfloor n \rfloor$ divise n.

Exercice 2.

1. Soient A, B et C trois points distincts du plan. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant
$$AC^2 - AM^2 = BC^2 - BM^2$$
2. Soient A, B et C trois points distincts du plan et P, Q et R rois plans du plan. On note D_1 la droite passant par le point P et perpendiculaire à (BC), D_2 la droite passant par Q et perpendiculaire à (CA), D_3 la droite passant par R et perpendiculaire à (AB). Montrer que D_1, D_2 et D_3 sont concourantes si et seulement si
$$BP^2 - PC^2 + CQ^2 - QA^2 + AR^2 - RB^2 = 0$$

Exercice 3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ des nombres réels et s leurs somme. Montrer que
$$\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!}$$

Exercice 4. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) \leq x$ pour tout réel x et
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x + y) \leq f(x) + f(y)$$

Exercice 5. Soient ABC un triangle et α, β, γ les angles aux sommets respectifs A, B et C. Montrer que
$$\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) \leq \frac{1}{8}$$

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel qui n'est divisible ni par 2, ni par 5. Montrer que dans l'écriture décimale de n^{20}, le chiffre de centaines est pair, le chiffre des dizaines est 0 et le chiffre des unités est pair.

Exercice 7. Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, on ait

$$y \geq x \Longrightarrow f(y) - f(x) \geq (y-x)^\alpha$$

Exercice 8. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur R, non identiquement nulles et telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x)f(y)$$

Exercice 9. On note $|X|$ le nombre d'éléments (ou cardinal) d'un ensemble fini X. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des parties finies d'un ensemble E. Pour x dans E, soit $d(x)$ le nombre d'indice $i \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $x \in A_i$. Montrer que

1. $$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{i=1}^n \sum_{x \in A_i} \frac{1}{d(x)}$$
2. $$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| \geq \sum_{i=1}^n \frac{|A_i|^2}{\sum_{j=1}^n |A_i \cap A_j|}$$

Exercice 10. Soient E un ensemble fini, $n \geq 2$ un entier, $A_1, \ldots, A_n$ et $B_1, \ldots, B_n$ des parties de E. On suppose que, pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$, $A_i \cap B_i = \varnothing$ et que, si i et j sont des éléments distincts dans $\{1, \ldots, n\}$, alors $(A_i \cap B_j) \cup (A_j \cap B_i) \neq \varnothing$. Pour p dans $[0,1]$, démontrer que

$$\sum_{i=1}^n p^{|A_i|}(1-p)^{|B_i|} \leq 1$$

Exercice 11. Trouver tous les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ et $f(x) \leq x$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 12. Trouver tous les réels x tels que $3^x + 4^x = 5^x$.

Exercice 13. Pour $a \in \mathbb{R}_*^+$, on note A_a l'ensemble

$$\left\{\sum_{i=0}^n \epsilon_i a^i, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \epsilon_0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1,0,1\}\right\}$$

1. Pour quelles valeurs de a, l'ensemble A_a est-il majoré ?
2. On suppose que $a \geq 2$. Montrer que l'intersection $A_a \cap]-1,1[$ est non vide.

Exercice 14. Soit N_n le nombre d'entiers $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tels que l'écriture de 2^k en base décimale se termine par 12. Calculer la limite de N_n/n quand n tend vers ∞.

Exercice 15. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, que vaut $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t$? En déduire que pour tout entier naturel non nul n,

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Exercice 16. On place 100 points distincts dans le plan. Montrer qu'il existe une droite du plan telle qu'il y ait exactement 50 points de chaque côté de la droite.

Exercice 17. Soient a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle dont le périmètre vaut 1. Montrer que

$$\frac{13}{27} \leq a^2 + b^2 + c^2 + 4abc \leq \frac{1}{2}$$

Exercice 18. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soient D_n l'ensemble des diviseurs de n et $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. Montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$\sum_{k \in D_n} d(k)^3 = \Big(\sum_{k \in D_n} d(k) \Big)^2$$

Exercice 19. On lance une infinité de fois un dé à 6 faces numérotées $1, 2, \dots, 6$, non pipé. On note $X_k \in \{1, 2, \dots, 6\}$ le résultat du k-ème lancer. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

la somme des résultats des n premiers lancers. Pour un entier naturel non nul s, soit p_s la probabilité pour qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_n = s$.
Déterminer les valeurs minimale et maximale de p_s lorsque s décrit l'ensemble des entiers naturels non nuls.

Exercice 20. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels strictement positifs, σ une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$. Démontrer que

$$\frac{a_1}{a_{\sigma(1)}} + \frac{a_2}{a_{\sigma(2)}} + \ldots + \frac{a_n}{a_{\sigma(n)}} \geq n$$

Exercice 21. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles qui se coupent en deux points A et B. Soient Δ une droite tangente aux deux cercles en deux points M et N. Montrer que la droite (AB) coupe le segment $[MN]$ dans son milieu.

Exercice 22. Montrer que pour tout réel x, on a $\sin(\cos x) < \cos(\sin(x))$.

Exercice 23. Trouver les entiers n de trois chiffres tels que l'écriture décimale de n^2 se termine par n.

Exercice 24. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels positifs tels que $u_0 = 1$ et telle que pour tout entier $n \geq 1$, au moins la moitié des termes $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ sont supérieurs ou égaux à $2u_n$. Montrer que (u_n) converge vers 0.

Exercice 25.

1. Exhiber une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ admet exactement trois solutions.
2. Est-il possible une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ admet exactement trois solutions ?

Exercice 26. On lance une pièce équilibrée n fois et on note F le nombre de «faces» et P le nombre de «piles».

1. Montrer que l'espérance (c'est-à-dire la moyenne) de l'écart $|F-P|$ est égale à

$$\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k<n/2}(n-2k)\binom{n}{k}$$

2. Simplifier cette somme lorsque $n=2p$ est pair.

Exercice 27. Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{N}^*\to]0,+\infty[$ croissantes telles que

$$f(n^k)=f(n)^k$$

pour tout couple (n,k) d'entiers naturels non nuls.

Exercice 28. L'enveloppe convexe d'un objet ou d'un regroupement d'objets géométriques est l'ensemble convexe le plus petit parmi ceux qui le contiennent.
Soit Γ un cercle de centre O et $A_1,\ldots,A_n$ des points de Γ. Quelle est la probabilité que O appartienne à l'enveloppe convexe de $A_1,\ldots,A_n$?

Exercice 29. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

Exercice 30. Montrer que

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\times\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\times\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)=\frac{1}{8}$$

Exercice 31. Soient n un entier naturel non nul et $u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_n$ des réels de valeurs absolues ≤ 1. Montrer que

$$\left|\prod_{p=1}^{n}u_p-\prod_{p=1}^{n}v_p\right|\leq\sum_{p=1}^{n}|u_p-v_p|$$

Exercice 32. Déterminer tous les triplets d'entiers avec $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ tels que $a+b+c$ par a,b et c.

Exercice 33. Soit n un entier naturel non nulle et f la fonction défnie sur l'intervalle $[n,+\infty[$ par :

$$f(x)=\sqrt{x-n}+\sqrt{x-n+1}+\ldots+\sqrt{x-1}+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\ldots+\sqrt{x+n}-(2n+1)\sqrt{x}$$

Montrer que f est croissante sur $[n,+\infty[$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Exercice 34. Montrer que pour $n\in\mathbb{N}^*$, la partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$ est toujours un entier impair.

Exercice 35. Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur un ensemble Ω, A et B deux parties de Ω. Montrer que

$$|\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|\leq\frac{1}{4}$$

Exercice 36. On note E l'ensemble des points du plan dont les deux coordonnées sont rationnelles.

1. Donner un cercle passant par deux points de E mais dont le centre n'est pas dans E.
2. Montrer que si un cercle passe par trois points de E alors son centre est forcément dans E.

Exercice 37. Soient n un entier naturel non nul et $(M_i)_{0\leq i\leq n}$ des points du plan. Montrer qu'il existe un point du plan tel que $MM_0 \leq \sqrt{n}$ et pour tout $i \in \{0,1,\dots,n\}$ on a $MM_i \geq 1$.

Exercice 38. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \qquad f(x)-f(y)=(x-y)g\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Montrer que f est une fonction polynômiale de second degré.

Exercice 39. Pour un ensemble A, on note $|A|$ son cardinal. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et Ω l'ensemble des applications $f : \{1,2,\dots,m\}\to\{1,2,\dots,n\}$. Déterminer la valeur de

$$\sum_{f\in\Omega} |f(\{1,2,\dots,m\})|$$

Exercice 40. Déterminer les entiers $n\geq 2$ qui ont un nombre impair de diviseurs.

Exercice 41. Trouver les réels y tels qu'il existe au moins un réel x vérifiant

$$y=(1+\sin x)(1+\sin y)$$

Exercice 42. Soient ABC un triangle, on note $a=BC, b=CA$ et $c=AB$, m_a, m_b et m_c les longueurs des médianes issues de A, B et C respectivement et soit S la surface du triangle ABC. Montrer que

$$a^2m_a^2+b^2m_b^2+c^2m_c^2\geq 12S\text{Î}2$$

Exercice 43. Déterminer les fonctions $f:[0,1]\to[0,1]$ vérifiant $|f(x)-f(y)|\geq|x-y|$ pour tout $(x,y)\in[0,1]^2$.

Exercice 44. Soit ABC un triangle. On note a, b et c les longueurs des côtés respectifs BC, CA et AB. Montrer que les médianes issues sont perpendiculaires si et seulement si $a^2+b^2=5c^2$.

Exercice 45. Soient S une sphère de rayon 1 de l'espace de dimension 3 et un entier $n\geq 2$. Quelle est la valeur maximale de

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} M_iM_j^2$$

où les M_i sont des points de S.

Exercice 46. Soit $n\geq 2$ un entier naturel. Quel est le maximum de la somme

$$\sum_{k=1}^{n} k\sigma(k)$$

lorsque σ décrit l'ensemble des bijections de $\{1, 2, \ldots, n\}$ vers lui même.

Exercice 47. Soit $n \geq 2$ un entier et a et b deux entiers relatifs différents tels que n divise $a^n - b^n$. Montrer que

$$n \,|\, \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

Exercice 48. Soient a un entier naturel impair et b un entier strictement positif. On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = b$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est un entier pair} \\ a + u_n & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer qu'on peut trouver un entier naturel n tel que $u_n \leq a$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est périodique à partir d'un certain rang

Exercice 49. On définit la suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1. Vérifier que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n$$
2. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.
3. Montrer que si $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, l'équivalence suivante est vraie
$$m \quad \text{divise} \quad n \iff F_m \quad \text{divise} \quad F_n$$
4. Soit m un entier naturel non nul. Déterminer les entiers naturels n tels que
$$F_m^2 \quad \text{divise} \quad F_n$$

Exercice 50. Soit un entier $n \geq 1$. Si $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est un n-uplet de réels et m un élément de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on pose

$$S_m(A) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des entiers relatifs dont la somme vaut 1. On note

$$X^1 = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$$

et pour $k \in \{2, \ldots, n\}$, on pose

$$X^k = (x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{k-1})$$

Montrer qu'il existe un seul $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que

$$\forall m \in \{1, \ldots, n\}, \qquad S_m(X^k) > 0$$

Exercice 51. Trouver le réel x réel tel que

$$\cos x = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}{2}$$

Exercice 52. Soit x un réel tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Montrer que

$$x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$$

pour tout entier relatif n.

Exercice 53.

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a

$$1.1! + 2.2! + \ldots + n.n! = (n+1)! - 1$$

2. Soit A un entier vérifiant $0 \leq A \leq (n+1)! - 1$. Montrer qu'on peut trouver des entiers $a_1, \ldots, a_n$ vérifiant $0 \leq a_k \leq k$ pour tout k et tels que $A = a_1.1! + a_2.2! + \ldots + a_n.n!$.
3. Prouver que cette écriture est unique.

Exercice 55. Soient n un entier naturel non nul et $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels non nuls tels que

$$(n-1)\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$$

Montrer que tous les x_i ont le même signe.

Exercice 56. Soient ABC un triangle, $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$, α, β et γ les angles respectifs aux sommets A, B et C et S la surface de ABC.

1. Exprimer a^2 en fonction de $(b-c)^2$, S et $\tan(\alpha/2)$.
2. Montrer l'inégalité suivante

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

Exercice 57. Soient $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}$ et $\overrightarrow{x_3}$ trois vecteurs unitaires du plan qui ne sont pas tous dans un demi plan. Montrer que

$$||\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{x_3}|| \leq 1$$

Exercice 58. On se donne un parallélogramme $ABCD$ du plan $\mathcal{P}$. Montrer qu'il existe A', B', C', D' dans l'espace tel que $A'B'C'D'$ soit un carré (A', B', C' et D' sont coplanaires) et que A' (resp. B', C', D') soit la projection orthogonale de A (resp. B, C, D) sur $\mathcal{P}$.

Exercice 59. Soit n un entier naturel. Montrer l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} 2^{-k} = 2^n$$

Exercice 60. Pour un entier naturel non nul, on pose

$$S_n = \frac{1^n + 2^n + \ldots + n^n}{n^n}$$

Montrer que pour tout entier naturel n, on a $S_n \leq \frac{e}{e-1}$.

Exercice 61. Soit ABC un triangle. Où doit se situer le point M à l'intérieur du triangle pour que la somme des distances du point M aux trois côtés du triangle soit maximale ?

Exercice 62. Existe t-il un entier naturel non nul n et n nombres réels vérifiant

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx > 0\,?$$

pour tout nombre réel x.

Exercice 63. L'ensemble des ponts $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, est-il une partie d'une parabole ? Donner la représentation graphique de cet ensemble de points.

Exercice 64. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, on définit l'ensemble $\widehat{A}$ comme suit

$$\{a + a', \quad a, a' \in A\}$$

1. Supposons que l'ensemble A est fini de cardinal n. Montrer que

$$2n - 1 \leq |\widehat{A}| \leq \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Trouver une partie non vide A de $\mathbb{R}$ sachant que $|A| = n$ et $|\widehat{A}| = 2n - 1$.
   (b) Trouver une partie non vide B de $\mathbb{R}$ sachant que $|B| = n$ et$|\widehat{B}| = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 65. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a > 0$ un nombre réel vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}$$

Montrer que la fonction f est périodique.

Exercice 66. Soient $a, n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{N}^*$ vérifiant

$$(\sqrt{a} - \sqrt{a-1})^n = \sqrt{b} - \sqrt{b-1}$$

Exercice 67. Comparer les deux nombres e^π et π^e.

Exercice 68. Trois cercles de rayon $r = 1$ se coupent en un point O et se coupent deux à deux en A, B et C. Montrer que O est l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 69. Soit M un point se situant à l'intérieur (strictement) d'un n-gone de côté de longueur a. Soient $d_1, \ldots, d_n$ les distances M et les différents côtés du polygone. Montrer que

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_n} > \frac{2\pi}{a}$$

Exercice 70. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et notons E l'ensemble des centres de symétries du graphe de f.

1. Trouver E si f est la fonction $x \mapsto x + \sin x$.
2. Supposons que E contient au moins deux points. Montrer que f peut s'écrire comme somme d'une fonction affine et d'une fonction périodique.

3. L'ensemble E peut-il contenir 3 trois points non alignés ?

Exercice 71. On considère un triangle ABC dans le plan $\mathcal{P}$, soit O le centre du triangle ABC. La droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ et passant par O, D un point de Δ différent de O. Exprimer le rayon de la sphère contenant A, B, C et D en fonction de $I = AB$ et $e = OD$.

Exercice 72. Soit X une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ vérifiant, pour tout $x \in X$, on a $4x \in x$ et $\lfloor x \rfloor \in X$.
Montrer que $X = \mathbb{N}^*$.

Exercice 73. Soit la sphère de rayon 1 et de centre O dans l'espace euclidien. Pour A, B et C des points de S, on considère

$$f(A,B,C) = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}$$

Trouver le maximum et le minimum de la fonction f.

Exercice 74. Considérons un alphabet avec n lettres. Notons M l'ensemble des mots avec les propriétés suivantes, quand deux lettres d'un mot sont identiques, alors tous les lettres situés entre ces deux lettres sont différents. Par exemple, si l'alphabet est $\{a, b, c\}$, le mot $abbacb \notin M$ mais $bbacbac \in M$.

1. Quelle est la taille maximale d'un mot appartenant à M ?
2. Combien de mots de taille maximale appartiennent à M ?

Exercice 75. Trouver tous les nombres réels $x > 0$ vérifiant

$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$$

Exercice 76. Si p un nombre réel, soit D_p la droite $y = px + p(p-1)$ dans le plan $\mathbb{R}^2$. Trouver et tracer l'ensemble des points (x, y) qui n'appartiennent à aucun des droites D_p quand p parcourt l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Exercice 77. Dans le plan, soit D une droite, Γ et Γ' deux cercles, r le rayon de Γ, r' le rayon de Γ'. Supposons que Γ et Γ' se situent dans le même côté d'une droite D, que Γ et Γ' sont tangents à la droite D respectivement en M et M' et que Γ est tangent à Γ' sont tangents. Exprimer la distance MM' en fonction de r et r'.

Exercice 78. Trouver la plus grande valeur du réel k pour laquelle

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x^2 + xy + y^2 \geq k(x^2 + y^2)$$

Exercice 79. Soit $m \geq 1$ un entier. Trouver le plus grand entier naturel $n \geq 1$ pour lequel 2^n divise $5^{2^m} - 1$.

Exercice 80. Soit $k \geq 2$ un entier. Montrer que l'ensemble

$$\{1, 2^k, 3^k, \ldots\}$$

ne contient aucune progression arithmétique.

Exercice 81. Soit Γ un demi-cercle de centre O et de rayon 1. On se donne $2n+1$ points $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ sur Γ, montrer que

$$||\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_{2n+1}}|| \geq 1$$

Exercice 82. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. Un ensemble aléatoire (pouvant être vide) est tiré de cette urne. Cet ensemble est remis et un deuxième tir est effectué. Quelle est la probabilité que le second ensemble de jetons tirés contient le premier ensemble ?

Exercice 83. Montrer que pour tout triangle de côtés a, b et c et d'aire A, on a

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}A$$

Exercice 84. Soit $p \geq 3$ un nombre premier. Montrer, que pour tout entier naturel $n \geq 1$, le nombre

$$u_n = p + \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{3} + \ldots + \frac{p^n}{n}$$

peut s'écrire sous la forme $u_n = pa_n/b_n$ où a_n et b_n sont deux entiers naturels non divisibles par p.

Exercice 85. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels définie par $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = 2$, $u_4 = u_5 = u_6 = 3$, $u_7 = u_8 = u_9 = u_{10} = 4, \ldots$. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$

$$u_n = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{8n - 7}}{2} \right\rfloor$$

Exercice 86. Soit T l'ensemble des fonctions polynômiales qui peuvent s'écrire sous la forme

$$x \mapsto x^2 + ax + b$$

où a et b deux entiers relatifs. Soit E l'ensemble des nombres réels > 1 pour lesquels on peut trouver $f \in T$ et $y \in]-1, 1[$ tels que $f(x) = f(y) = 0$.

1. Montrer que le nombre $k + \sqrt{k^2 - 1}$ est dans E pour tout entier $k \geq 2$.
2. Si $M > 1$, montrer que l'ensemble $E \cap [1, M]$ est fini.
3. Quel est le plus petit nombre réel qui élément de E ?

Exercice 87. Trouver le nombre de façons de placer n tours indistinguables dans un échiquier $n \times n$ sachant que chaque tour ne peut attaquer une autre tour, et telle que le placement est invariant par rapport au quart de tour de l'échiquier. *Rappelons qu'une tour peut attaquer une autre tour si les deux tours sont placés dans la même ligne ou la même colonne.*

Exercice 88. Soit P un polygone convexe plein dans le plan. Pour un réel $r \geq 0$, on note $\mathcal{A}(r)$ l'aire de l'ensemble des points dont la distance à P est $\leq r$. Trouver l'expression de $\mathcal{A}(r)$ en fonction de r, de l'aire $A(0) = A$ de P et du périmètre l de P.

Exercice 89. Soit S une partie non vide $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout plan $\mathcal{P}$ qui coupe S, l'intersection $S \cap \mathcal{P}$ est un cercle (ou un point). Que peut-on dire de l'ensemble S ?

Exercice 90. Trouver le plus petit entier naturel $m \geq 1$ tel que on peut toujours trouver m points du plan vérifiant la propriété suivante ; pour tout point du plan M, au moins une des distance A_kM est un nombre rationnel.

Exercice 91. Trouver toutes les suites numériques $(a_n)_{n\geq 1}$ strictement positives vérifiant

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2$$

Exercice 92. Soient ABC un triangle et notons A' le milieu du segment $[BC]$, $B4$ le milieu de $[AC]$ et C le milieu de $[AB]$. Déterminer la valeur du rapport

$$\frac{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2}{BC^2 + AC^2 + AB^2}$$

Exercice 93. Soient a, b et c trois réels strictement positifs vérifiant $abc = 1$. Montrer que

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}$$

Exercice 94. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ une fonction vérifiant $f(1) = 1$ et

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \qquad x + y \leq 1 \Longrightarrow f(x) + f(y) \leq f(x+y)$$

Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) \leq 2x$.

Exercice 95.

1. Trouver tous les entiers $n \geq 2$ tels que n divise $(n-1)!$.
2. Soient $n \geq 2$ et $n \geq 1$ des entiers vérifiant $n-1$ divise $1 + n + \ldots + n^{k-1}$. Montrer que $n-1$ divise k.
3. Trouver tous les entiers $n \geq 2$ tels que $(n-1)! + 1$ est une puissance de n.

Exercice 96. Trouver la valeur maximale du produit des entiers naturels dont la somme vaut 2006.

Exercice 97. Soit $n = 2^p$ une puissance de 2 Considérons les sous-ensembles A de l'ensemble $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ vérifiant la propriété suivante ; si $x \in A$, alors $2x \notin A$. Quel est le nombre maximal d'entiers naturels que peut contenir un tel sous-ensemble de E ?

Exercice 98. Calculer

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)$$

Exercice 99. Déterminer tous les quadruplets d'entiers naturels non nuls vérifiant

$$x! + y! + z! = t!$$

Exercice 100. Soient a, b et c trois nombres réels strictement positifs. Montrer que au moins l'un des nombres $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $1/4$.

Exercice 101. Montrer qu'un triangle équilatéral ne peut pas avoir tous ses sommets à cordonnées entières.

Exercice 102. Si (A, B, C) est un triplet de points, soit $p(A, B, C) = AB + BC + CA$. Soit f une fonction partant du plan vers le plan lui même telle que $p(f(A), f(B), f(C)) = p(A, B, C)$. Montrer que f est une isométrie.
Une application du plan vers lui même est dite une isométrie si elle conserve les distances, c-à-d pour tout couple de points du plan (X, Y), on a $XY = f(X)f(Y)$.

Exercice 103. Soient a et b deux entiers vérifiant $2 \leq a \leq b$. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note

$$u_n = \frac{b^n - 1}{a^n - 1}$$

1. Supposons qu'il existe un entier naturel non nul k tel que $b = a^k$. Montrer que u_n est un entier pour tout entier naturel n.
2. Supposons maintenant que $a < b < a^2$. En considérant $au_{n+1} - bu_n$, montrer que l'on peut trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n \in \mathbb{N}^*$.
3. Supposons maintenant que $a^2 < b < a^3$. Montrer que l'on peut trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n \notin \mathbb{N}^*$.
4. Comment peut-on généraliser les résultats des questions (2) et (3).

Exercice 104. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^*\mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre des suites finies $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de à valeurs dans $\{0, 1\}^n$ tel que le cardinal de l'ensemble

$$\{i \in \{1, \ldots, n-1\}, \quad x_i = 0 \quad \text{et} \quad x_{i+1} = 1$$

est m.

Exercice 105. Soit x un nombre réel satisfaisant $x^3 + 1/x^3 = 2\sqrt{5}$. Trouver la valeur de $x^2 + 1/x^2$.

Exercice 106. Soit $A_1A_2A_3$ un triangle du plan. Soit A_4 l'orthocentre de ce triangle et G le centre de gravité des points A_1, A_2, A_3, A_4. Pour $i \leq i < j \leq 4$ soit $A_{i,j}$ le milieu du segment $[A_iA_j]$.
Montrer que les six distances $A_{i,j}G$ sont identiques.

Exercice 107. Soient a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle ABC.

1. Montrer qu'on peut trouver trois nombres réels strictement positifs tels que $a = x + y$, $b = y + z$ et $c = z + x$.
2. Montrer que
$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

Exercice 108. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction. Soit d un nombre réel positif, on dit que f préserve la distance d si pour tout deux points du plan A et B, on a

$$AB = d \Longrightarrow f(A)f(B) = d$$

Supposons que f préserve la distance 1 et qu'elle injective.

1. Montrer que f préserve la distance 2, puis qu'elle préserve toute distance entière.
2. Montrer que f préserve la distance $\sqrt{3}$.

Exercice 109. Soient n et k deux entiers naturels vérifiant $1 \leq k \leq n-1$. Quand est ce que le coefficient binômial $\binom{n}{k}$ est un nombre premier ?

Exercice 110. Soit ϵ un réel $\in]0, 1[$ et n un entier naturel non nul. Considérons n nombres réels strictement positifs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifiant

$$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \qquad x_ix_j \leq \epsilon^{|i-j|}$$

Montrer que

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq \frac{1}{1 - \sqrt{\epsilon}}$$

Exercice 111. Soit $n \geq 2$ un entier naturel, notons p_n le nombre de permutations σ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ tel qu'il existe un unique $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ tel que $\sigma(i) > \sigma(i+1)$. Déterminer p_n.

Exercice 112. Pour un entier m, on note $f(m)$ le plus grand diviseur impair de m. Pour $n \geq 1$ entier naturel. Évaluer

$$f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(2^n)$$

Exercice 113. Soit ABC un triangle et C' me milieu de $[AB]$. Comparer $AC + BC$ et CC'.

Exercice 114. Sachant que $\sqrt{30} \notin \mathbb{Q}$, montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 115. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$E(2x+1) = E(x+4)$$

où $E(t)$ désigne la partie entière du réel t.

Exercice 116. Soit $n \geq 3$ un entier naturel et soit E l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

1. Trouver le nombre de façons pour choisir une paire $\{a, b\}$ d'éléments distincts et non consécutifs.
2. Soit $p \leq n/2$ un entier naturel. Trouver le nombre de parties de E de cardinal p ne contenant pas des entiers consécutifs.

Exercice 117. Pour un entier n naturel non nul, soit $d(n)$ le nombre de ses diviseurs.

1. On écrit la factorisation de n en facteurs premiers
$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$
Trouver $d(n)$ en fonction des α_i.
2. Que peut-on dire si $d(n)$ est impair ?
3. La suite $(n_k)_{k \geq 0}$ est définie par
$$n_0 = n \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad n_{k+1} = d(n_k)$$
Trouver les entiers naturels non nuls tels que l'ensemble $\{n_k, \quad k \in \mathbb{N}\}$ ne contient aucun carré parfait.

Exercice 118. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Supposons que l'on peut trouver $2k$ entiers naturels non nuls $a_1, b_1, \dots, a_k, b_k$ tels que les sommes $a_1 + b_1, \dots, a_k + b_k$ sont tous différentes et inférieures à n. Montrer que

$$k \leq \frac{2n-3}{5}$$

Exercice 119. Les points du plan sont coloriés par deux couleurs. Montrer que l'on peut toujours trouver un triangle isocèle et rectangle dont les sommets ont la même couleur.

Exercice 120. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Trouver tous les nombres réels x vérifiant

$$\cos^n x - \sin^n x = 1$$

Exercice 121. Trouver deux nombres réels a et b vérifiant

$$\int_0^\pi (at + bt^2) \cos(nt) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

Pour tout entier naturel $n \geq 1$.