Royaume du Maroc
المملكة المغربية

Ministère de l'Éducation Nationale,
du Préscolaire et des Sports
وزارة التربية الوطنية والتعليم
الأولي والرياضة

Académie Hassan II
des Sciences et Techniques
أكاديمية الحسن الثاني
للعلوم والتقنيات

المباراة العامة للعلوم والتقنيات
C.G.S.T

بسم الله الرحمن الرحيم

المباراة العامة للعلوم والتقنيات

مسائل الرياضيات مصنفة حسب المحاور وحسب درجة الصعوبة

Sessions 2010 – 2026 • دورات 2010–2026

Concours Général

des Sciences et Techniques

Problèmes de Mathématiques classés par thème

et par ordre de difficulté croissante

Analyse réelle • Analyse complexe • Calcul intégral • Équations différentielles
Arithmétique • Probabilités • Nombres complexes • Structures algébriques

إعداد الأستاذ سعد شكري

تاريخ الإصدار : 28 أكتوبر 2026

Préparé par **Saad Choukri**

Édition du 28 octobre 2026

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés ◇ جميع الحقوق محفوظة © 2026

Résumé • ملخص

Résumé

Ce recueil rassemble les épreuves de mathématiques du **Concours Général des Sciences et Techniques** (Maroc), sessions 2010 à 2026. Chaque sujet a été découpé en **problèmes indépendants**, munis d'un titre, de l'année de la session et de la partie du sujet dont ils proviennent, puis classés en huit thèmes : analyse réelle, analyse complexe, calcul intégral, équations différentielles, arithmétique, probabilités, nombres complexes et structures algébriques. À l'intérieur de chaque thème, les problèmes sont rangés par **ordre de difficulté croissante**. Les sujets rédigés en arabe (2010 à 2013) ont été traduits en français, et chaque problème est suivi de sa version arabe intégrale ; les énoncés ont été relus, les résultats demandés vérifiés, et les coquilles corrigées et signalées. Ce document s'adresse aux élèves du cycle secondaire qualifiant qui préparent le concours, ainsi qu'à leurs professeurs.

ملخص

يضم هذا الكتيب مواضيع مادة الرياضيات في **المباراة العامة للعلوم والتقنيات** بالمغرب، دورات 2010 إلى 2026. وقد قُسِّم كل موضوع إلى **مسائل مستقلة**، لكل منها عنوان وسنة الدورة والجزء الذي أُخذت منه، ثم صُنِّفت في ثمانية محاور : التحليل الحقيقي، والتحليل العقدي، والحساب التكاملي، والمعادلات التفاضلية، والحسابيات، والاحتمالات، والأعداد العقدية، والبنيات الجبرية. ورُتِّبت المسائل داخل كل محور **حسب درجة الصعوبة تصاعديا**. وقد تُرجمت المواضيع المحررة بالعربية من 2010 إلى 2013 إلى الفرنسية، وأُرفقت كل مسألة بنسختها العربية الكاملة، وروجعت النصوص وتُحقِّق من النتائج المطلوبة، مع تصحيح الأخطاء المطبعية والتنبيه عليها. هذا العمل موجَّه إلى تلاميذ السلك الثانوي التأهيلي المستعدين للمباراة وإلى أساتذتهم.

Saad Choukri • سعد شكري

Pour toute remarque ou correction • للملاحظات والتصحيحات

saadchoukri00@gmail.com

Édition du 28 octobre 2026

© **2026 Saad Choukri.** Tous droits réservés. Toute reproduction ou diffusion, même partielle, est interdite sans l'autorisation écrite de l'auteur.

© 2026 سعد شكري. جميع الحقوق محفوظة، ويمنع نسخ هذا العمل أو نشره كليا أو جزئيا دون إذن كتابي من المؤلف.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

Introduction

Le Concours Général des Sciences et Techniques

Le **Concours Général des Sciences et Techniques** (CGST) a été lancé en **2010**, dans le cadre d'une convention de partenariat entre le **Ministère de l'Éducation Nationale** et l'**Académie Hassan II des Sciences et Techniques**. Son but est de repérer, parmi les meilleurs bacheliers des filières scientifiques et techniques, les talents les plus prometteurs et de les accompagner jusqu'au plus haut niveau des études supérieures. Le concours a lieu chaque année en juillet, après les épreuves du baccalauréat, à Rabat ; il comporte une épreuve écrite dans chacune des quatre disciplines : **mathématiques**, **physique-chimie**, **sciences de la vie et de la Terre** et **sciences de l'ingénieur** (options électrique et mécanique). L'épreuve de mathématiques dure **quatre heures** et se compose en général d'un ou deux longs problèmes, construits en parties enchaînées, qui mènent l'élève d'outils du programme du lycée jusqu'à des résultats classiques de l'enseignement supérieur.

L'Académie Hassan II des Sciences et Techniques

L'Académie Hassan II des Sciences et Techniques a été créée par le **dahir n° 1-93-364 du 6 octobre 1993**, modifié par le dahir n° 1-00-205 du 19 mai 2000. Elle a été officiellement installée par **Sa Majesté le Roi Mohammed VI** le **18 mai 2006** au Palais royal d'Agadir. Elle a pour mission de promouvoir la recherche scientifique et technique au Maroc et de contribuer à l'émergence de compétences scientifiques nationales de haut niveau ; le CGST est l'une des actions qu'elle mène en direction des lycéens.

La sélection des candidats

Le concours n'est pas ouvert à candidature libre : sont **convoqués** les élèves de deuxième année du baccalauréat des filières scientifiques et techniques qui ont obtenu les **meilleurs résultats** au sein de chacune des **douze académies régionales d'éducation et de formation** (les listes « Top Bac » publiées par le ministère). Ont également le droit de participer au concours les **lauréats des olympiades nationales** qui **représentent le Maroc aux olympiades internationales** (mathématiques, physique, chimie, biologie, informatique…). Chaque année, près de **400 candidats** composent ainsi, répartis selon les disciplines. Les copies sont corrigées par des jurys de discipline, qui délibèrent et établissent un classement par discipline.

Les lauréats et les récompenses

Chaque session distingue **dix lauréats** : **quatre en mathématiques**, deux en physique-chimie, deux en sciences de la vie et de la Terre et deux en sciences de l'ingénieur. Ils reçoivent une **bourse d'excellence** de l'Académie Hassan II, qui les accompagne durant tout leur parcours universitaire, jusqu'au doctorat, à condition de maintenir l'excellence de leurs résultats.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

Quelques chiffres

Création	2010 (convention Ministère – Académie Hassan II)
Candidats par session	environ 400 : 397 en 2018 (98 en mathématiques, 98 en physique-chimie, 117 en SVT, 84 en sciences de l'ingénieur) ; 397 en 2020 dans 12 centres ; 396 en 2024
Lauréats par session	10 (4 en mathématiques, 2 dans chacune des trois autres disciplines)
Bilan 2010–2025	138 boursiers (97 garçons, 41 filles), dont 48 en mathématiques
Parcours des anciens lauréats	École polytechnique (30), Écoles normales supérieures (8), CentraleSupélec et autres grandes écoles (13) ; 12 docteurs et 7 doctorants (MIT, Stanford, Oxford, EPFL, …)

Ce recueil

Ce recueil réunit les sujets de mathématiques des sessions 2010 à 2017 et 2019 à 2026, découpés en problèmes indépendants et classés en huit thèmes. Il peut servir de banque d'entraînement aux élèves de terminale qui préparent le concours ou les olympiades, et de réservoir d'exercices aux professeurs des classes de baccalauréat et des classes préparatoires.

Sources des données chiffrées : site de l'Académie Hassan II des Sciences et Techniques ; Hespress (août 2018) ; Le Matin (juillet 2020) ; Intelligencia (novembre 2024) ; Yabiladi (juillet 2025).

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri
© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

Sommaire

I Analyse réelle 8

(1) La suite $u_{n+1} = e^{u_n}/(n+1)$: convergence vers 0 ou divergence vers $+\infty$ . . . 2023 8
(2) Séries de Riemann : convergence et équivalent du reste . . . 2024 10
(3) La fonction zêta de Riemann sur $]1, +\infty[$ . . . 2026 11
(4) Théorème du point fixe pour les applications contractantes . . . 2010 13
(5) Inégalités de Landau entre normes uniformes des dérivées ($n = 2$ et $n = 3$) . . . 2015 16
(6) Outils préliminaires : formules de Taylor et de Leibniz, critère d'irrationalité . . . 2017 18
(7) Théorème de Darboux et équation $f' = \lfloor f \rfloor$ . . . 2019 21
(8) Polynômes de Tchebychev de première espèce : premières propriétés . . . 2021 22
(9) Fonctions absolument monotones : exemples et premières propriétés . . . 2025 26
(10) Indépendance linéaire de la famille $(1, e, e^2)$ sur $\mathbb{Q}$ . . . 2019 28
(11) Zéros et extrémums de T_n ; borne inférieure de $\|P\|$ sur les polynômes unitaires . . . 2021 30
(12) Parties puissantes de $]0, +\infty[$: exemples et parties à deux éléments . . . 2022 33
(13) Séries absolument convergentes et produit de convolution de deux suites . . . 2024 35
(14) Polynômes et nombres de Bernoulli : premières propriétés et racines . . . 2026 38
(15) Inégalités de Kolmogorov entre normes uniformes des dérivées successives . . . 2015 41
(16) Doublement d'angle : les systèmes $S(n, k)$ et les orbites périodiques confinées . . . 2020 43
(17) Parties puissantes de $]0, +\infty[$: classification complète . . . 2022 47
(18) La suite $u_{n+1} = e^{u_n}/(n+1)$: le seuil α et son calcul approché . . . 2023 50
(19) Théorème de Bernstein sur les fonctions absolument monotones ; série de la tangente . . . 2025 53
(20) Fonctions absolument monotones sur $\mathbb{R}$: analyticité et log-convexité . . . 2025 56
(21) Doublement d'angle : détermination des parties confinées du cercle . . . 2020 58
(22) Croissance des nombres de Bernoulli et une application probabiliste . . . 2026 62
(23) Approximation de $\zeta(\alpha)$ par la formule d'Euler–Maclaurin . . . 2026 64

II Analyse complexe 67

(24) Théorème de Gauss–Lucas sur les racines du polynôme dérivé . . . 2013 67
(25) Position des racines d'un polynôme par rapport à un disque : opérateurs A_z et théorème de Grace 2013 68
(26) Polynômes trigonométriques positifs : théorème de Fejér–Riesz . . . 2021 71
(27) Un théorème de Rolle pour les polynômes d'une variable complexe (Grace–Heawood) . . . 2013 74
(28) Unicité du polynôme unitaire de norme minimale sur $[-1, 1]$ . . . 2021 77

III Calcul intégral 80

(29) Formule de Taylor avec reste intégral et calcul de $\ln 2$ . . . 2015 80
(30) Formule de Taylor avec reste intégral et série exponentielle . . . 2025 81

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

(31) L'intégrale de Poisson $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(r^2 - 2r\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$ . . . 2016 **83**

(32) Irrationalité de e^r pour tout rationnel r non nul . . . 2017 **86**

(33) Le problème de Bâle : $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ par une méthode intégrale . . . 2024 **88**

(34) Formule sommatoire d'Euler–Maclaurin . . . 2026 **90**

(35) Calcul de $\zeta(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli . . . 2026 **92**

IV Équations différentielles **96**

(36) Polynômes et équation différentielle linéaire du premier ordre $y' - \lambda y = g$ . . . 2011 **96**

(37) Étude de l'équation différentielle $y'' = y$ . . . 2019 **98**

(38) Fonction définie par une intégrale et équation fonctionnelle $f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f$ . . . 2022 **100**

(39) Équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants . . . 2011 **103**

V Arithmétique **107**

(40) Propriétés arithmétiques des nombres de Fibonacci . . . 2010 **107**

(41) Valuations p-adiques et formule de Legendre . . . 2023 **108**

(42) Décomposition de Fibonacci d'un entier : théorème de Zeckendorf . . . 2010 **110**

(43) Transformation binomiale de Pascal . . . 2015 **112**

(44) Fonctions arithmétiques τ, σ, φ et formule de Gauss $\sum_{d\mid n} \varphi(d) = n$ . . . 2024 **114**

(45) Formes quadratiques entières définies positives et leur équivalence . . . 2012 **116**

(46) Un critère d'irréductibilité dans $\mathbb{Z}[X]$: le polynôme des chiffres d'un nombre premier . . . 2013 **120**

(47) L'ordre multiplicatif d'un entier et applications . . . 2014 **121**

(48) Une suite d'entiers définie par PGCD et PPCM . . . 2015 **124**

(49) Résolution de l'équation $\cos(r\pi) = s$ en rationnels non entiers . . . 2021 **126**

(50) Encadrement du nombre $p(n)$ de nombres premiers inférieurs à n (estimations de Tchebychev) 2023 **127**

(51) Formule d'inversion de Möbius ; nombres de Fermat . . . 2024 **130**

(52) Formes quadratiques entières réduites et réduction de Gauss . . . 2012 **133**

(53) Les nombres de Carmichael . . . 2014 **136**

(54) Le postulat de Bertrand : la preuve d'Erdős . . . 2023 **138**

(55) Transcendance du nombre e (méthode d'Hermite) . . . 2017 **140**

(56) Théorème de von Staudt–Clausen : B_{2n} n'a pas de racine entière . . . 2026 **144**

VI Probabilités **148**

(57) Indicatrice d'Euler et calcul des probabilités . . . 2014 **148**

(58) Familles de parties deux à deux non incluses : exemples et dénombrements . . . 2022 **150**

(59) Dérangements d'un ensemble fini et problème des rencontres . . . 2025 **153**

(60) Théorème de Sperner : taille maximale d'une antichaîne de parties . . . 2022 **156**

VII Nombres complexes **159**

(61) Localisation des racines d'un polynôme à coefficients réels . . . 2013 **159**

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

(62) L'inversion $M(z) \mapsto M(1/\bar{z})$: images des droites et des cercles 2013 160
(63) Parties de $\mathbb{C}$ stables par produit et par somme de deux carrés : exemples ($\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[j]$) 2019 162
(64) Valeurs possibles du nombre $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ pour une partie stable de $\mathbb{C}$ 2019 164

VIII Structures algébriques 167
(65) L'opérateur de différence $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ et les polynômes 2016 167
(66) Applications linéaires du plan qui conservent $\mathbb{Z}^2$: le groupe $\mathcal{L}(\mathbb{Z}^2)$ 2012 169
(67) Suites récurrentes linéaires à coefficients constants 2016 172
(68) Polynômes sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et cyclicité du groupe $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^*$ 2014 176

Conventions

- Chaque problème porte un titre, l'année de la session et la partie du sujet dont il est issu.
- À l'intérieur de chaque thème, les problèmes sont rangés par ordre de difficulté croissante.
- Les questions sont numérotées **Question (1)**, **Question (2)**, … et leurs sous-questions (a), (b), … puis (i), (ii), … ; le numéro de la question dans le sujet original figure en petits caractères gris dans la marge de gauche : c'est à lui que renvoient les mentions « question 2.4.4 » des énoncés et des encadrés.
- Un résultat utilisé et établi dans une autre partie du sujet d'origine est rappelé dans un encadré vert « Résultats admis ».
- Chaque problème se termine par un encadré « Commentaire » qui situe le résultat obtenu (origine historique, portée, valeurs numériques vérifiées).
- Les coquilles et affirmations inexactes de l'original sont corrigées et signalées dans un encadré rouge « N.B. ».
- Chaque problème est suivi de sa **version arabe** intégrale (énoncé, encadrés « Résultats admis », « N.B. » et « Commentaire »).
- © 2026 Saad Choukri. Tous droits réservés : le symbole © figure sur chaque page et sous chaque problème ; toute reproduction ou diffusion, même partielle, est interdite sans l'autorisation écrite de l'auteur.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri

I

Analyse réelle

Problème 1 — Session 2023

La suite $u_{n+1} = e^{u_n}/(n+1)$: convergence vers 0 ou divergence vers $+\infty$

Problème 1, Partie 1 © 2026 Saad Choukri

ln désigne le logarithme népérien et e le nombre de Néper. On considère l'ensemble $\mathscr{M}$ des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de $u_0 \geq 0$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{n+1}.$$

1.1. **Question (1)** Vérifier que si $(u_n) \in \mathscr{M}$, alors $u_n > 0$ pour tout $n \geq 1$.

1.2. **Question (2)** Soit $(u_n) \in \mathscr{M}$. Montrer que si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors $l = 0$.

1.3. **Question (3)** Soit $(u_n) \in \mathscr{M}$; on suppose qu'il existe $n_0 \geq 2$ tel que $u_{n_0} \leq 1$.

1.3.1. **(a)** Montrer que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq 1$.

1.3.2. **(b)** En déduire que pour tout $n \geq n_0 + 1$, $u_n \leq \dfrac{e}{n}$.

1.3.3. **(c)** Justifier que la suite (u_n) converge vers 0.

1.4. **Question (4)** Soit $(u_n) \in \mathscr{M}$; on suppose que la suite (u_n) **ne converge pas** vers 0.

1.4.1. **(a)** Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n > 1$.

1.4.2. **(b)** En déduire que pour tout $n \geq 1$, $u_n > \ln(n+1)$.

1.4.3. **(c)** Justifier que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

1.5. **Question (5)** Soit $(u_n) \in \mathscr{M}$; on suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_0+1} \leq u_{n_0}$.

1.5.1. **(a)** Montrer que pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$.

1.5.2. **(b)** Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

1.6. **Question (6)** Soit $(u_n) \in \mathscr{M}$. Montrer, de deux manières différentes, que la suite (u_n) vérifie l'une ou l'autre des deux assertions suivantes : (i) la suite (u_n) converge vers 0 ; (ii) la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

1.7. **Question (7)** **Étude de la suite lorsque $u_0 = 0$.** On donne $e \simeq 2{,}71828$ et $e^{e/2} \simeq 3{,}89286$.

1.7.1. **(a)** Exprimer u_2 et u_3, puis en donner des valeurs approchées.

1.7.2. **(b)** Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

N.B. : l'original demande en 1.4.2 de montrer que $u_n \leq \ln(n+1)$; or $u_{n+1} > 1$ équivaut à $u_n > \ln(n+1)$, et c'est cette minoration qui donne 1.4.3.

Commentaire. La récurrence $u_{n+1} = e^{u_n}/(n+1)$ présente une dichotomie remarquable : toute suite converge vers 0 ou tend vers $+\infty$, sans comportement intermédiaire. La clé est une *barrière* : dès qu'un terme d'indice ≥ 2 passe sous 1, la suite est écrasée vers 0 (en e/n) ; sinon elle reste au-dessus de $\ln(n+1)$. Pour $u_0 = 0$, on trouve $u_2 = e/2 \approx 1{,}359$ et $u_3 = e^{e/2}/3 \approx 1{,}298$, puis la suite décroît vers 0.

النسخة العربية

المتتالية $u_{n+1} = e^{u_n}/(n+1)$: التقارب نحو 0 أو التباعد نحو $+\infty$

دورة 2023 ▪ المسألة 1، الجزء 1 ▪ 2026 © سعد شكري

يرمز ln للوغاريتم النيبري وe لعدد نيبر. نعتبر المجموعة $\mathscr{M}$ للمتتاليات العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بإعطاء $u_0 \geq 0$ وبالعلاقة الترجعية

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{n+1}.$$

السؤال (1) تحقق من أنه إذا كانت $(u_n) \in \mathscr{M}$ فإن $u_n > 0$ لكل $n \geq 1$.

السؤال (2) لتكن $(u_n) \in \mathscr{M}$. بين أنه إذا كانت (u_n) متقاربة نحو $l \in \mathbb{R}$ فإن $l = 0$.

السؤال (3) لتكن $(u_n) \in \mathscr{M}$، نفترض أنه يوجد $n_0 \geq 2$ بحيث $u_{n_0} \leq 1$.

(أ) بين أنه لكل $n \geq n_0$: $u_n \leq 1$.

(ب) استنتج أنه لكل $n \geq n_0 + 1$: $u_n \leq \dfrac{e}{n}$.

(ج) علل أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو 0.

السؤال (4) لتكن $(u_n) \in \mathscr{M}$، نفترض أن (u_n) **غير متقاربة** نحو 0.

(أ) بين أنه لكل $n \geq 2$: $u_n > 1$.

(ب) استنتج أنه لكل $n \geq 1$: $u_n > \ln(n+1)$.

(ج) علل أن (u_n) تؤول إلى $+\infty$.

السؤال (5) لتكن $(u_n) \in \mathscr{M}$، نفترض أنه يوجد $n_0 \in \mathbb{N}^*$ بحيث $u_{n_0+1} \leq u_{n_0}$.

(أ) بين أنه لكل $n \geq n_0$: $u_{n+1} \leq u_n$.

(ب) بين أن (u_n) متقاربة نحو 0.

السؤال (6) لتكن $(u_n) \in \mathscr{M}$. بين، بطريقتين مختلفتين، أن (u_n) تحقق إحدى الخاصيتين : (i) (u_n) متقاربة نحو 0؛ (ii) (u_n) تؤول إلى $+\infty$.

السؤال (7) حالة $u_0 = 0$. نعطي $e \simeq 2{,}71828$ و$e^{e/2} \simeq 3{,}89286$.

(أ) عبر عن u_2 وu_3 ثم أعط قيمتين مقربتين لهما.

(ب) بين أن (u_n) متقاربة نحو 0.

ملاحظة : يطلب الأصل في 1.4.2 إثبات أن $u_n \leq \ln(n+1)$؛ والحال أن $u_{n+1} > 1$ يكافئ $u_n > \ln(n+1)$، وهذه المصغورة هي التي تعطي 1.4.3.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

تعليق. تبين الترجعية $u_{n+1} = e^{u_n}/(n+1)$ ثنائية لافتة : كل متتالية إما تتقارب نحو 0 وإما تؤول إلى $+\infty$، دون سلوك وسيط. المفتاح هو حاجز : بمجرد أن ينزل حد ذو دليل $n \geq 2$ تحت 1 تنسحق المتتالية نحو 0 (مثل e/n)، وإلا بقيت فوق $\ln(n+1)$. من أجل $u_0 = 0$ نجد $u_2 = e/2 \approx 1{,}359$ و$u_3 = e^{e/2}/3 \approx 1{,}298$، ثم تتناقص المتتالية نحو 0.

Problème 2 — Session 2024

Séries de Riemann : convergence et équivalent du reste

Problème 1, Partie 1 © 2026 Saad Choukri

Soit $\alpha > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$.

1.1. **Question (1) Convergence de la suite $(S_n(\alpha))_{n\geq 1}$.**

1.1.1. **(a)** Vérifier que la suite $(S_n(\alpha))_{n\geq 1}$ est croissante.

1.1.2. **(b)** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$.

1.1.3. **(c)** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(\alpha) \leq 1 + \displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.

1.1.4. **(d)** Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et en déduire que la suite $(S_n(\alpha))_{n\geq 1}$ est majorée.

1.1.5. **(e)** Conclure que la suite $(S_n(\alpha))_{n\geq 1}$ est convergente. On note ℓ_α sa limite.

1.2. **Question (2) Équivalent de $S_n(\alpha) - \ell_\alpha$.**

1.2.1. **(a)** Justifier que pour tout entier $k \geq 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.

1.2.2. **(b)** Pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, calculer $\displaystyle\int_n^{n+p} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, puis en déduire que

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+p+1)^{\alpha-1}}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+p)^{\alpha-1}}\right).$$

1.2.3. **(c)** En déduire que $S_n(\alpha) - \ell_\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

Commentaire. Comparaison série–intégrale classique : $\sum_{k>n} k^{-\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$. Pour $\alpha = 2$, le reste $\zeta(2) - S_n(2)$ est équivalent à $\frac{1}{n}$: la convergence est lente, d'où l'intérêt des méthodes d'accélération comme la formule d'Euler–Maclaurin (voir le thème III).

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

النسخة العربية

متسلسلات ريمان : التقارب وتكافؤ الباقي

دورة 2024 ▪ المسألة 1، الجزء 1 ▪ 2026 © سعد شكري

ليكن $\alpha > 1$. لكل $n \in \mathbb{N}^*$ نضع $S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$.

السؤال (1) تقارب المتتالية $(S_n(\alpha))_{n\geq 1}$.

(أ) تحقق من أن المتتالية $(S_n(\alpha))_{n\geq 1}$ تزايدية.

(ب) بين أنه لكل $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$.

(ج) استنتج أنه لكل $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n(\alpha) \leq 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.

(د) احسب التكامل $\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ واستنتج أن المتتالية $(S_n(\alpha))_{n\geq 1}$ مكبورة.

(هـ) استنتج أن المتتالية $(S_n(\alpha))_{n\geq 1}$ متقاربة. نرمز لنهايتها بـ ℓ_α.

السؤال (2) مكافئ لـ $S_n(\alpha) - \ell_\alpha$.

(أ) علل أنه لكل عدد صحيح $k \geq 2$: $\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.

(ب) لكل $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ احسب $\int_n^{n+p} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$، ثم استنتج أن :

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+p+1)^{\alpha-1}}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+p)^{\alpha-1}}\right).$$

(ج) استنتج أن $S_n(\alpha) - \ell_\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

تعليق. مقارنة كلاسيكية بين متسلسلة وتكامل : $\sum_{k>n} k^{-\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$. من أجل $\alpha = 2$ يكافئ الباقي $\zeta(2) - S_n(2)$ العدد $\frac{1}{n}$: التقارب بطيء، ومن هنا أهمية طرق التسريع مثل صيغة أولر-ماكلوران (انظر المحور الثالث).

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

Problème 3 — Session 2026

La fonction zêta de Riemann sur $]1,+\infty[$

Partie 4 © 2026 Saad Choukri

Soit $\alpha > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

4.1. **Question (1) Convergence de la suite $(S_n(\alpha))_{n\geq 1}$.**

4.1.1. **(a)** Vérifier que la suite $(S_n(\alpha))_{n\geq 1}$ est croissante.

4.1.2. **(b)** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$.

4.1.3. **(c)** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(\alpha) \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

4.1.4. **(d)** Conclure que la suite $(S_n(\alpha))_{n\geq 1}$ converge.

On note $\zeta(\alpha)$ sa limite : $\zeta(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, où $\zeta :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ est la fonction zêta de Riemann.

4.2. **Question (2) Encadrement du reste.**

4.2.1. **(a)** Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p \geq q$. Montrer que $0 \leq S_p(\alpha) - S_q(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{q^{\alpha-1}} - \frac{1}{p^{\alpha-1}}\right)$.

4.2.2. **(b)** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \zeta(\alpha) - S_n(\alpha) \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

4.3. **Question (3) Équivalent de $\zeta(\alpha)$ quand $\alpha \to 1^+$.**

4.3.1. **(a)** Montrer que pour tout $\alpha > 1$, $\frac{1}{\alpha-1} \leq \zeta(\alpha) \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

4.3.2. **(b)** Conclure quant à l'existence et à la valeur de $\lim_{\alpha\to 1^+} (\alpha-1)\zeta(\alpha)$.

Commentaire. L'encadrement $\frac{1}{\alpha-1} \leq \zeta(\alpha) \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$ montre que ζ a un pôle simple en 1 de résidu 1 : $\lim_{\alpha\to 1^+}(\alpha-1)\zeta(\alpha) = 1$. C'est le point de départ de la démonstration du théorème des nombres premiers par Riemann, Hadamard et de la Vallée Poussin.

النسخة العربية

دالة زيتا لريمان على $]1,+\infty[$

دورة 2026 ▪ الجزء 4 ▪ © 2026 سعد شكري

ليكن $\alpha > 1$. لكل $n \in \mathbb{N}^*$ نضع $S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

السؤال (1) تقارب المتتالية $(S_n(\alpha))_{n\geq 1}$.

(أ) تحقق من أن $(S_n(\alpha))_{n\geq 1}$ تزايدية.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri ▪ جميع الحقوق محفوظة ▪ يُمنع النسخ أو إعادة النشر دون إذن المؤلف

(ب) بين أنه لكل $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$.

(ج) استنتج أنه لكل $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n(\alpha) \leq \dfrac{\alpha}{\alpha-1}$.

(د) استنتج أن $(S_n(\alpha))_{n\geq 1}$ متقاربة.

نرمز لنهايتها بـ $\zeta(\alpha) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$، حيث $\zeta :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ هي دالة زيطا لريمان.

السؤال (2) تأطير الباقي.

(أ) ليكن $p, q \in \mathbb{N}^*$ بحيث $p \geq q$. بين أن $0 \leq S_p(\alpha) - S_q(\alpha) \leq \dfrac{1}{\alpha-1}\left(\dfrac{1}{q^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{p^{\alpha-1}}\right)$.

(ب) استنتج أنه لكل $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq \zeta(\alpha) - S_n(\alpha) \leq \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

السؤال (3) مكافئ لـ $\zeta(\alpha)$ عندما يؤول α إلى 1 على اليمين.

(أ) بين أنه لكل $\alpha > 1$: $\dfrac{1}{\alpha-1} \leq \zeta(\alpha) \leq \dfrac{\alpha}{\alpha-1}$.

(ب) استنتج وجود النهاية $\lim\limits_{\alpha\to 1^+} (\alpha-1)\zeta(\alpha)$ وقيمتها.

تعليق. يبين التأطير $\frac{1}{\alpha-1} \leq \zeta(\alpha) \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$ أن للدالة ζ قطبا بسيطا في 1 رسيده $1:1$. $\lim_{\alpha\to1^+}(\alpha-1)\zeta(\alpha)=1$. وهذه نقطة انطلاق برهان مبرهنة الأعداد الأولية لريمان وهادامار ودولافالي بوسان.

Problème 4 — Session 2010

Théorème du point fixe pour les applications contractantes

Exercice 1 (traduit de l'arabe) © 2026 Saad Choukri

On note I l'un des quatre intervalles $[a,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,a]$ ou $\mathbb{R}$, où $a < b$ sont deux réels. Soit $f : I \to I$ une application telle qu'il existe un réel $k \in]0,1[$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

Définition. Tout $x \in I$ tel que $f(x) = x$ est appelé *point fixe* de f dans I.

Le but de l'exercice est de montrer que f admet un unique point fixe dans I et de donner une méthode de calcul d'une valeur approchée de ce point avec une précision donnée.

A. Unicité du point fixe

1. **Question (1)** On suppose que f admet deux points fixes distincts x et y dans I. Montrer que $|x-y| \leq k|x-y|$.
2. **Question (2)** Conclure.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

B. Existence du point fixe

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

I. On suppose dans ce paragraphe que $I = [a, b]$.

1. **Question (3)** Montrer que pour tout n, $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$, puis en déduire que $u_n - k^n(b-a) \leq u_{n+1} \leq u_n + k^n(b-a)$.

On considère, pour un paramètre réel α, les suites définies par $v_n = u_n + \alpha k^n(b-a)$ et $w_n = u_n - \alpha k^n(b-a)$.

2. **Question (4)** Quelle condition doit vérifier α pour que les suites (v_n) et (w_n) soient adjacentes ?

3. **Question (5)** Soit α un réel vérifiant cette condition.

a) **(a)** Montrer que (u_n) converge et que sa limite ℓ appartient à $[a, b]$.

b) **(b)** Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - f(\ell)| \leq k^{n+1}|u_0 - \ell|$.

c) **(c)** En déduire que ℓ est un point fixe de f dans $[a, b]$.

> **N.B. :** l'original écrit $|u_n - f(\ell)| \leq k^n |u_0 - \ell|$; l'inégalité naturelle, qui découle de la contraction, porte sur $u_{n+1} = f(u_n)$.

II. On suppose que $I = [a, +\infty[$ et que $f(a) \neq a$. On considère les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $y = f(a) + k(x - a)$ et $y = x$.

1. **Question (6)** Représenter (D) et (Δ), puis montrer qu'il existe un réel $b \in I$ tel que $b > a$ et $b = f(a) + k(b - a)$.

2. **Question (7)** Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, on a $a \leq f(x) \leq b$.

3. **Question (8)** En déduire que f admet un point fixe dans I.

III. On suppose que $I =]-\infty, b]$. On pose $J = \{-x \mid x \in I\}$ et on considère $g : J \to J$, $g(x) = -f(-x)$. Montrer que $\forall (x, y) \in J^2$, $|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$, puis que f admet un point fixe dans I.

IV. On suppose enfin que $I = \mathbb{R}$.

1. **Question (9)** Vérifier que si $f(0) = 0$, alors 0 est l'unique point fixe de f.

2. **Question (10)** On suppose que $f(0) > 0$.

a) **(a)** Montrer qu'il existe deux réels $a < b$ tels que $a = f(0) - ka$ et $b = f(0) + kb$.

b) **(b)** Montrer que le segment $[a, b]$ est stable par f, puis en déduire que f admet un point fixe dans $\mathbb{R}$.

3. **Question (11)** Étudier le cas restant.

C. Calcul d'une valeur approchée du point fixe

I. On garde les données du début de l'exercice et on note ℓ le point fixe de f dans I ; (u_n) est définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. **Question (12)** Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $|u_{n+p} - u_n| \leq |u_1 - u_0|\, k^n \dfrac{1 - k^p}{1 - k}$.

2. **Question (13)** En déduire que pour tout n, $|u_n - \ell| \leq |u_1 - u_0| \dfrac{k^n}{1 - k}$.

II. Étude d'un exemple. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\sin x + 1$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

1. **Question (14)** Montrer que f vérifie sur $\mathbb{R}$ les hypothèses de l'exercice.
2. **Question (15)** En déduire que f admet un unique point fixe ℓ dans $\mathbb{R}$.
3. **Question (16)** En prenant $u_0 = 0$, déterminer le plus petit entier n tel que la majoration de C.I.2 assure que u_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près.

Commentaire. C'est le théorème du point fixe de Banach en dimension 1 : une contraction d'un intervalle fermé dans lui-même possède un unique point fixe, limite de toute suite $u_{n+1} = f(u_n)$, avec l'estimation d'erreur *a priori* $|u_n - \ell| \leq \frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|$. Pour $f(x) = \frac{1}{2}\sin x + 1$ ($k = \frac{1}{2}$, $u_1 - u_0 = 1$), il suffit que $2^{1-n} \leq 10^{-2}$, soit $n = 8$; on trouve $\ell \approx 1{,}4987$.

النسخة العربية

مبرهنة النقطة الصامدة للتطبيقات المقلِّصة

دورة 2010 ▪ التمرين الأول ▪ 2026 © سعد شكري

نرمز بـ I لأحد المجالات الأربعة $[a,b]$ أو $[a,+\infty[$ أو $]-\infty,a]$ أو $\mathbb{R}$، حيث $a < b$ عددان حقيقيان. ليكن $f : I \to I$ تطبيقا بحيث يوجد عدد حقيقي $k \in]0,1[$ يحقق

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

تعريف. كل عنصر x من I يحقق $f(x) = x$ يسمى نقطة صامدة للدالة f في I.

نهدف إلى البرهنة على أن f تقبل نقطة صامدة وحيدة في I، وإعطاء طريقة لحساب قيمة مقربة لها بدقة معلومة.

أ. وحدانية النقطة الصامدة

السؤال (1) نفترض أن f تقبل نقطتين صامدتين مختلفتين x وy في I. بين أن $|x - y| \leq k|x - y|$.

السؤال (2) استنتج.

ب. وجود النقطة الصامدة

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ $u_0 \in I$ و$u_{n+1} = f(u_n)$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

I. نفترض في هذه الفقرة أن $I = [a,b]$.

السؤال (3) بين أنه لكل n : $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n|u_1 - u_0|$، ثم استنتج أن $u_n - k^n(b-a) \leq u_{n+1} \leq u_n + k^n(b-a)$.

نعتبر، بدلالة بارامتر حقيقي α، المتتاليتين $v_n = u_n + \alpha k^n(b-a)$ و$w_n = u_n - \alpha k^n(b-a)$.

السؤال (4) ما الشرط الذي يجب أن يحققه α لكي تكون المتتاليتان (v_n) و(w_n) متحاديتين؟

السؤال (5) ليكن α عددا يحقق هذا الشرط.

(أ) بين أن (u_n) متقاربة وأن نهايتها ℓ تنتمي إلى $[a,b]$.

(ب) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n : $|u_{n+1} - f(\ell)| \leq k^{n+1}|u_0 - \ell|$.

(ج) استنتج أن ℓ نقطة صامدة للدالة f في $[a,b]$.

ملاحظة : يكتب الأصل $|u_n - f(\ell)| \leq k^n|u_0 - \ell|$؛ والمتفاوتة الطبيعية الناتجة عن خاصية التقليص تخص $u_{n+1} = f(u_n)$.

II. نفترض أن $I = [a,+\infty[$ و$f(a) \neq a$. نعتبر المستقيمين (D) و(Δ) اللذين معادلتاهما $y = f(a) + k(x-a)$ و$y = x$.

السؤال (6) أنشئ (D) و(Δ)، ثم بين أنه يوجد عدد حقيقي $b \in I$ بحيث $b > a$ و$b = f(a) + k(b-a)$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri

السؤال (7) بين أنه لكل $x \in [a,b]$: $a \leq f(x) \leq b$.

السؤال (8) استنتج أن f تقبل نقطة صامدة في I.

III. نفترض أن $I =]-\infty, b]$. نضع $J = \{-x \mid x \in I\}$ ونعتبر $g : J \to J$، $g(x) = -f(-x)$. بين أن $\forall (x,y) \in J^2,\ |g(x) - g(y)| \leq k|x-y|$، ثم أن f تقبل نقطة صامدة في I.

IV. نفترض أخيرا أن $I = \mathbb{R}$.

السؤال (9) تحقق من أنه إذا كان $f(0) = 0$ فإن 0 هي النقطة الصامدة الوحيدة للدالة f.

السؤال (10) نفترض أن $f(0) > 0$.

(أ) بين أنه يوجد عددان حقيقيان $a < b$ بحيث $a = f(0) - ka$ و$b = f(0) + kb$.

(ب) بين أن القطعة $[a,b]$ مستقرة بـ f، ثم استنتج أن f تقبل نقطة صامدة في $\mathbb{R}$.

السؤال (11) ادرس الحالة المتبقية.

ج. حساب قيمة مقربة للنقطة الصامدة

I. نحتفظ بمعطيات بداية التمرين ونرمز بـ ℓ للنقطة الصامدة للدالة f في I؛ و(u_n) معرفة بـ $u_0 \in I$ و$u_{n+1} = f(u_n)$.

السؤال (12) بين أنه لكل $n, p \in \mathbb{N}$: $|u_{n+p} - u_n| \leq |u_1 - u_0|\, k^n \dfrac{1-k^p}{1-k}$.

السؤال (13) استنتج أنه لكل n: $|u_n - \ell| \leq |u_1 - u_0| \dfrac{k^n}{1-k}$.

II. دراسة مثال. نعتبر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، $f(x) = \frac{1}{2}\sin x + 1$.

السؤال (14) بين أن f تحقق على $\mathbb{R}$ فرضيات التمرين.

السؤال (15) استنتج أن f تقبل نقطة صامدة وحيدة ℓ في $\mathbb{R}$.

السؤال (16) بأخذ $u_0 = 0$، حدد أصغر عدد صحيح n بحيث تضمن المكبورة ج.I.2 أن u_n قيمة مقربة للعدد ℓ بالدقة 10^{-2}.

تعليق. هذه مبرهنة النقطة الصامدة لباناخ في البعد 1 : لكل تقليص لمجال مغلق في نفسه نقطة صامدة وحيدة، هي نهاية كل متتالية $u_{n+1} = f(u_n)$، مع تقدير الخطأ القبلي $|u_n - \ell| \leq \frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|$. من أجل $f(x) = \frac{1}{2}\sin x + 1$ ($k = \frac{1}{2}$) و$u_1 - u_0 = 1$ يكفي أن يكون $2^{1-n} \leq 10^{-2}$، أي $n = 8$؛ ونجد $\ell \approx 1{,}4987$.

Problème 5 — Session 2015

Inégalités de Landau entre normes uniformes des dérivées ($n = 2$ et $n = 3$)

Problème, Partie 2 © 2026 Saad Choukri

Notations. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée, on note $\|g\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$: c'est le plus petit réel $M \geq 0$ tel que $|g(x)| \leq M$ pour tout x. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ telles que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). Inégalité de Taylor–Lagrange : si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et $|f^{(n)}| \leq M$ sur I, alors pour tous $a, b \in I$, $\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \leq \frac{|b-a|^n}{n!} M$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

2.1. **Question (1) Étude du cas $n = 2$.** Soit f une fonction non constante de $\mathcal{F}_2$; on pose $M_0 = \|f\|_\infty$ et $M_2 = \|f''\|_\infty$.

2.1.1. **(a)** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. À l'aide de l'inégalité de Taylor–Lagrange, majorer $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)|$ et $|f(x-h) - f(x) + hf'(x)|$. En déduire que

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}.$$

2.1.2. **(b)** Montrer que $M_2 > 0$ et $M_0 > 0$.

2.1.3. **(c)** Montrer que f' est bornée et que $M_1 = \|f'\|_\infty \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

2.2. **Question (2) Étude du cas $n = 3$.** Soit f une fonction non constante de $\mathcal{F}_3$; on pose $M_0 = \|f\|_\infty$ et $M_3 = \|f^{(3)}\|_\infty$.

2.2.1. **(a)** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. À l'aide de l'inégalité de Taylor–Lagrange, majorer

$$\left|f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{2}f''(x)\right| \quad \text{et} \quad \left|f(x-h) - f(x) + hf'(x) - \frac{h^2}{2}f''(x)\right|.$$

En déduire que $|f'(x)| \leq \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_3h^2}{6}$ et $|f''(x)| \leq \dfrac{4M_0}{h^2} + \dfrac{M_3h}{3}$.

2.2.2. **(b)** Montrer que $M_3 > 0$ et $M_0 > 0$.

2.2.3. **(c)** Montrer que f' est bornée et que $M_1 \leq \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{9M_0^2M_3}$.

2.2.4. **(d)** Montrer que f'' est bornée et que $M_2 \leq \sqrt[3]{3M_0M_3^2}$.

N.B. : l'original suppose seulement f non nulle ; il faut f non constante, sinon $M_2 = 0$ (resp. $M_3 = 0$) et 2.1.2 (resp. 2.2.2) est faux.

Commentaire. Les inégalités $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$ et $M_1 \leq \frac{1}{2}\sqrt[3]{9M_0^2M_3}$ sont dues à Landau (1913) et Hadamard : contrôler une fonction et une dérivée d'ordre supérieur contrôle les dérivées intermédiaires. La constante $\sqrt{2}$ est optimale sur $\mathbb{R}$.

النسخة العربية

متفاوتات لانداو بين المعايير المنتظمة للمشتقات ($n = 2$ و $n = 3$)

دورة 2015 ▪ المسألة، الجزء 2 ▪ 2026 © سعد شكري

ترميز. إذا كانت $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ محدودة نضع $\|g\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|$: وهو أصغر عدد حقيقي $M \geq 0$ بحيث $|g(x)| \leq M$ لكل x. لكل $n \in \mathbb{N}^*$ نرمز بـ $\mathcal{F}_n$ لمجموعة الدوال $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ من الصنف $\mathcal{C}^n$ بحيث تكون f و $f^{(n)}$ محدودتين على $\mathbb{R}$.

نتائج مقبولة (مُثبَتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). متفاوتة تايلور-لاغرانج : إذا كانت f من الصنف $\mathcal{C}^n$ على مجال I و $|f^{(n)}| \leq M$ على I، فإنه لكل $a, b \in I$: $\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \leq \frac{|b-a|^n}{n!} M$.

السؤال (1) دراسة الحالة $n = 2$. لتكن f دالة غير ثابتة من $\mathcal{F}_2$؛ نضع $M_0 = \|f\|_\infty$ و $M_2 = \|f''\|_\infty$.

(أ) ليكن $x \in \mathbb{R}$ و $h > 0$. باستعمال متفاوتة تايلور-لاغرانج، أعط مكبورا لكل من $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)|$ و $|f(x-h) - f(x) + hf'(x)|$. استنتج أن

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2h}{2}.$$

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

(ب) بين أن $M_0 > 0$ و$M_2 > 0$.

(ج) بين أن f' محدودة وأن $M_1 = \|f'\|_\infty \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

السؤال (2) دراسة الحالة $n = 3$. لتكن f دالة غير ثابتة من $\mathcal{F}_3$؛ نضع $M_0 = \|f\|_\infty$ و$M_3 = \|f^{(3)}\|_\infty$.

(أ) ليكن $x \in \mathbb{R}$ و$h > 0$. باستعمال متفاوتة تايلور-لاغرانج، أعط مكبورا لكل من

$$\left|f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{2}f''(x)\right| \quad \text{و} \quad \left|f(x-h) - f(x) + hf'(x) - \frac{h^2}{2}f''(x)\right|.$$

استنتج أن $|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_3h^2}{6}$ و$|f''(x)| \leq \frac{4M_0}{h^2} + \frac{M_3h}{3}$.

(ب) بين أن $M_3 > 0$ و$M_0 > 0$.

(ج) بين أن f' محدودة وأن $M_1 \leq \frac{1}{2}\sqrt[3]{9M_0^2M_3}$.

(د) بين أن f'' محدودة وأن $M_2 \leq \sqrt[3]{3M_0M_3^2}$.

ملاحظة : يفترض الأصل فقط أن f غير منعدمة؛ والصواب أن تكون f غير ثابتة، وإلا كان $M_2 = 0$ (أو $M_3 = 0$) ولا يصح 2.1.2 (أو 2.2.2).

تعليق. المتفاوتتان $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$ و$M_1 \leq \frac{1}{2}\sqrt[3]{9M_0^2M_3}$ تعودان إلى لانداو (1913) وهادامار : التحكم في دالة وفي مشتقة من رتبة عليا يتحكم في المشتقات الوسيطة. والثابتة $\sqrt{2}$ مثلى على $\mathbb{R}$.

Problème 6 — Session 2017

Outils préliminaires : formules de Taylor et de Leibniz, critère d'irrationalité

Partie 1 © 2026 Saad Choukri

Notations. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pour $0 \leq k \leq n$ et $\binom{r}{k} = 0$ si $k > r$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales réelles et $\mathcal{P}_n$ celles de degré au plus n ; tout $P \in \mathcal{P}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $P^{(k)} = 0$ si $P \in \mathcal{P}_n$ et $k \geq n+1$, et $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.

1.1. **Question (1) Formule de Taylor pour les polynômes.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $P \in \mathcal{P}_n$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{1}$$

1.2. **Question (2) Application 1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on définit le polynôme $U_n(x) = \dfrac{x^n(x-1)^n}{n!}$.

1.2.1. **(a)** Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $U_n^{(k)}(0) = U_n^{(k)}(1) = 0$.

1.2.2. **(b)** Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, les nombres $U_n^{(n+k)}(0)$ et $U_n^{(n+k)}(1)$ sont des entiers relatifs non nuls.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

1.3. **Question (3) Application 2 : ordre de multiplicité d'une racine.** Soient P un polynôme non nul, $r \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que x_0 est racine de P d'ordre r s'il existe $Q \in \mathcal{P}$ tel que $P(x) = (x-x_0)^r Q(x)$ pour tout x et $Q(x_0) \neq 0$. Montrer que r est le plus petit entier tel que $P^{(k)}(x_0) = 0$ pour tout $k \in \{0, \dots, r-1\}$ et $P^{(r)}(x_0) \neq 0$.

1.4. **Question (4) Formule de Leibniz.** Soient I un intervalle non trivial, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables sur I. Montrer que fg est n fois dérivable sur I et que

$$\forall x \in I, \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x). \tag{2}$$

Indication : raisonner par récurrence en utilisant $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

1.5. **Question (5) Intégrations par parties successives.** Soient $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables telles que $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ soient continues sur $[a,b]$. Établir la formule

$$\int_a^b f^{(n)}(t)g(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_a^b f(t)g^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \Big(f^{(n-k)}(b)g^{(k-1)}(b) - f^{(n-k)}(a)g^{(k-1)}(a) \Big). \tag{3}$$

1.6. **Question (6) Étude de quelques suites.**

1.6.1. **(a)** Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que la suite $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ converge vers 0. Montrer que (x_n) converge vers 0.

1.6.2. **(b)** Soit λ un réel non nul. Montrer que la suite $\left(\frac{\lambda^n}{n!}\right)$ converge vers 0.

1.7. **Question (7) Une condition nécessaire d'irrationalité.** Pour tout réel $\theta \neq 0$, on pose $\theta\mathbb{Z} = \{k\theta \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z} = \{k + k'\theta \mid (k,k') \in \mathbb{Z}^2\}$.

1.7.1. **(a)** Montrer que si $\theta = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ et $\mathrm{PGCD}(p,q) = 1$, alors $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z} = \frac{1}{q}\mathbb{Z}$.

1.7.2. **(b)** Soit $(k_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers relatifs convergeant vers 0. Montrer qu'il existe un entier N tel que $k_n = 0$ pour tout $n \geq N$.

1.7.3. **(c)** Soit φ un réel non nul et $(p_n)_{n\geq 1}, (q_n)_{n\geq 1}$ deux suites d'entiers relatifs telles que $p_n\varphi - q_n \neq 0$ pour tout n. Montrer que si la suite $(p_n\varphi - q_n)$ converge vers 0, alors φ est irrationnel.

N.B. : l'original affirme en 1.2.2 que ces dérivées sont des entiers *naturels* ; en fait $U_n^{(n+k)}(0) = (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{(n+k)!}{n!}$, entier relatif de signe $(-1)^{n-k}$.

Commentaire. Boîte à outils commune aux preuves d'irrationalité et de transcendance : la formule de Taylor polynomiale, les polynômes $U_n = \frac{x^n(x-1)^n}{n!}$ dont les dérivées en 0 et 1 sont entières, et le critère « si $p_n\varphi - q_n \to 0$ sans s'annuler, alors $\varphi \notin \mathbb{Q}$ ». Ce critère est le moteur des démonstrations de la page suivante.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

النسخة العربية

أدوات تمهيدية : صيغتا تايلور ولايبنيز ومعيار الاجذرية

دورة 2017 ▪ الجزء 1 ▪ © 2026 سعد شكري

ترميز. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ من أجل $0 \le k \le n$، و$\binom{r}{k} = 0$ إذا كان $k > r$. نرمز بـ $\mathcal{P}$ لمجموعة الدوال الحدودية الحقيقية وبـ $\mathcal{P}_n$ لتلك التي درجتها أصغر من أو تساوي n؛ كل $P \in \mathcal{P}$ من الصنف $\mathcal{C}^\infty$، و$P^{(k)} = 0$ إذا كان $P \in \mathcal{P}_n$ و$k \ge n+1$، و$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.

السؤال (1) صيغة تايلور للحدوديات. ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. بين أنه لكل $P \in \mathcal{P}_n$ ولكل $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \tag{1}$$

السؤال (2) تطبيق 1. ليكن $n \in \mathbb{N}^*$؛ نعرف الحدودية $U_n(x) = \dfrac{x^n(x-1)^n}{n!}$.

(أ) بين أنه لكل $k \in \{0,\dots,n-1\}$: $U_n^{(k)}(0) = U_n^{(k)}(1) = 0$.

(ب) بين أنه لكل $k \in \{0,\dots,n\}$ العددان $U_n^{(n+k)}(0)$ و$U_n^{(n+k)}(1)$ صحيحان نسبيان غير منعدمين.

السؤال (3) تطبيق 2 : رتبة تضاعف جذر. لتكن P حدودية غير منعدمة و$r \in \mathbb{N}^*$ و$x_0 \in \mathbb{R}$. نقول إن x_0 جذر للحدودية P من الرتبة r إذا وجدت $Q \in \mathcal{P}$ بحيث $P(x) = (x-x_0)^r Q(x)$ لكل x و$Q(x_0) \neq 0$. بين أن r هو أصغر عدد صحيح بحيث $P^{(k)}(x_0) = 0$ لكل $k \in \{0,\dots,r-1\}$ و$P^{(r)}(x_0) \neq 0$.

السؤال (4) صيغة لايبنيز. ليكن I مجالا غير منحل و$n \in \mathbb{N}^*$ و$f, g : I \to \mathbb{R}$ دالتين قابلتين للاشتقاق n مرة على I. بين أن fg قابلة للاشتقاق n مرة على I وأن

$$\forall x \in I, \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x). \tag{2}$$

إرشاد : استدل بالترجع مستعملا $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

السؤال (5) مكاملات بالأجزاء متتالية. ليكن $a < b$ و$n \in \mathbb{N}^*$ و$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالتين قابلتين للاشتقاق n مرة بحيث $f^{(n)}$ و$g^{(n)}$ متصلتان على $[a,b]$. أثبت الصيغة

$$\int_a^b f^{(n)}(t)g(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_a^b f(t)g^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\Big(f^{(n-k)}(b)g^{(k-1)}(b) - f^{(n-k)}(a)g^{(k-1)}(a)\Big). \tag{3}$$

السؤال (6) دراسة بعض المتتاليات.

(أ) لتكن (x_n) متتالية أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث المتتالية $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ متقاربة نحو 0. بين أن (x_n) متقاربة نحو 0.

(ب) ليكن λ عددا حقيقيا غير منعدم. بين أن المتتالية $\left(\frac{\lambda^n}{n!}\right)$ متقاربة نحو 0.

السؤال (7) شرط لازم للاجذرية. لكل عدد حقيقي $\theta \neq 0$ نضع $\theta\mathbb{Z} = \{k\theta \mid k \in \mathbb{Z}\}$ و$\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z} = \{k + k'\theta \mid (k,k') \in \mathbb{Z}^2\}$.

(أ) بين أنه إذا كان $\theta = \frac{p}{q}$ مع $(p,q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ و$p \wedge q = 1$ فإن $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z} = \frac{1}{q}\mathbb{Z}$.

(ب) لتكن $(k_n)_{n\ge1}$ متتالية أعداد صحيحة نسبية متقاربة نحو 0. بين أنه يوجد عدد صحيح N بحيث $k_n = 0$ لكل $n \ge N$.

(ج) ليكن φ عددا حقيقيا غير منعدم و$(p_n)_{n\ge1}$ و$(q_n)_{n\ge1}$ متتاليتين من الأعداد الصحيحة النسبية بحيث $p_n\varphi - q_n \neq 0$ لكل n. بين أنه إذا كانت $(p_n\varphi - q_n)$ متقاربة نحو 0 فإن φ لاجذري.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ أو إعادة النشر دون إذن مسبق من المؤلف

ملاحظة : يؤكد الأصل في 1.2.2 أن هذه المشتقات أعداد صحيحة طبيعية؛ والواقع أن $U_n^{(n+k)}(0) = (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{(n+k)!}{n!}$، وهو عدد صحيح نسبي إشارته $(-1)^{n-k}$.

تعليق. عُدّة مشتركة بين براهين اللاجذرية والتسامي : صيغة تايلور للحدوديات، والحدوديات التي مشتقاتها $U_n = \frac{x^n(x-1)^n}{n!}$ في 0 و1 أعداد صحيحة، والمعيار «إذا آل $p_n\varphi - q_n$ إلى 0 دون أن ينعدم فإن $\varphi \notin \mathbb{Q}$». هذا المعيار هو محرك البراهين اللاحقة.

Problème 7 — Session 2019

Théorème de Darboux et équation $f' = \lfloor f \rfloor$

Problème 3, Partie 1 © 2026 Saad Choukri

Rappel admis. Si I est un intervalle non trivial et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est continue, alors φ est injective si et seulement si elle est strictement monotone. On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x.

1.1. **Question (1)** Soient $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[a,b]$. Soit γ un réel strictement compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$; par exemple $f'(a) < \gamma < f'(b)$.

1.1.1. **(a)** Montrer que la fonction $g : t \mapsto f(t) - \gamma t$, définie sur $[a,b]$, n'est pas strictement monotone.

1.1.2. **(b)** En déduire que g n'est pas injective et qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \gamma$ (théorème de Darboux).

1.2. **Question (2)** **Conséquences.** Soit I un intervalle non trivial et $h : I \to \mathbb{R}$ dérivable.

1.2.1. **(a)** Montrer que si h' ne s'annule pas sur I, alors elle garde un signe constant sur I.

1.2.2. **(b)** Montrer que $h'(I)$ est un intervalle : si $\lambda < \mu$ sont deux éléments de $h'(I)$, alors $[\lambda,\mu] \subset h'(I)$.

1.2.3. **(c)** Montrer que si $h'(I) \subset \mathbb{Z}$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $h(t) = kt + \beta$ pour tout $t \in I$.

1.3. **Question (3)** **Une application.** On cherche les couples (J,f) où J est un intervalle ouvert non vide et $f : J \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant $f'(t) = \lfloor f(t) \rfloor$ pour tout $t \in J$.

1.3.1. **(a)** Soit (J,f) un tel couple.

(i) **(i)** Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) = kt + \beta$ pour tout $t \in J$.

(ii) **(ii)** Si $k = 0$, montrer que $\beta \in [0,1[$ et que J est un intervalle ouvert non vide quelconque.

(iii) **(iii)** Si $k \neq 0$, on note $\alpha = \beta/k$; résoudre le problème dans ce cas.

N.B. : l'original écrit $\beta \in [0,1]$; or $\lfloor \beta \rfloor = 0$ équivaut à $\beta \in [0,1[$.

1.3.2. **(b)** Déterminer tous les couples (J,f) solutions pour lesquels l'intervalle J est le plus grand possible.

Commentaire. Le théorème de Darboux affirme qu'une dérivée, même discontinue, vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. Conséquence : une fonction dérivable à dérivée entière est affine. Les solutions de $f' = \lfloor f \rfloor$ sur un intervalle maximal sont les constantes $\beta \in [0,1[$ (sur $\mathbb{R}$) et les fonctions $t \mapsto k(t+\alpha)$, $k \in \mathbb{Z}^*$, sur l'intervalle où $kt + k\alpha \in [k, k+1[$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri

النسخة العربية

مبرهنة داربو والمعادلة $f' = \lfloor f \rfloor$

دورة 2019 ▪ المسألة 3، الجزء 1 ▪ 2026 © سعد شكري

خاصية مقبولة. إذا كان I مجالا غير منحل و$\varphi : I \to \mathbb{R}$ متصلة، فإن φ تباينية إذا وفقط إذا كانت رتيبة قطعا. نرمز بـ $\lfloor x \rfloor$ للجزء الصحيح للعدد الحقيقي x.

السؤال (1) ليكن $a < b$ و$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق على $[a,b]$. ليكن γ عددا حقيقيا محصورا قطعا بين $f'(a)$ و$f'(b)$؛ مثلا $f'(a) < \gamma < f'(b)$.

(أ) بين أن الدالة $g : t \mapsto f(t) - \gamma t$ المعرفة على $[a,b]$ ليست رتيبة قطعا.

(ب) استنتج أن g ليست تباينية وأنه يوجد $c \in]a,b[$ بحيث $f'(c) = \gamma$ (مبرهنة داربو).

السؤال (2) نتائج. ليكن I مجالا غير منحل و$h : I \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق.

(أ) بين أنه إذا كانت h' لا تنعدم على I فإنها تحافظ على إشارة ثابتة على I.

(ب) بين أن $h'(I)$ مجال : إذا كان $\lambda < \mu$ عنصرين من $h'(I)$ فإن $[\lambda, \mu] \subset h'(I)$.

(ج) بين أنه إذا كان $h'(I) \subset \mathbb{Z}$ فإنه يوجد $k \in \mathbb{Z}$ و$\beta \in \mathbb{R}$ بحيث $h(t) = kt + \beta$ لكل $t \in I$.

السؤال (3) تطبيق. نبحث عن الأزواج (J, f) حيث J مجال مفتوح غير فارغ و$f : J \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق وتحقق $f'(t) = \lfloor f(t) \rfloor$ لكل $t \in J$.

(أ) ليكن (J, f) زوجا من هذا النوع.

(i) بين أنه يوجد $k \in \mathbb{Z}$ و$\beta \in \mathbb{R}$ بحيث $f(t) = kt + \beta$ لكل $t \in J$.

(ii) إذا كان $k = 0$، بين أن $\beta \in [0,1[$ وأن J مجال مفتوح غير فارغ كيفما كان.

(iii) إذا كان $k \neq 0$، نضع $\alpha = \beta / k$؛ حل المسألة في هذه الحالة.

ملاحظة : يكتب الأصل $\beta \in [0,1]$؛ والحال أن $\lfloor \beta \rfloor = 0$ يكافئ $\beta \in [0,1[$.

(ب) حدد جميع الأزواج (J, f) الحلول التي يكون فيها المجال J أكبر ما يمكن.

تعليق. تنص مبرهنة داربو على أن المشتقة، ولو كانت غير متصلة، تحقق خاصية القيم الوسيطة. ونتيجة لذلك فإن كل دالة قابلة للاشتقاق مشتقتها ذات قيم صحيحة دالة تآلفية. حلول $f' = \lfloor f \rfloor$ على مجال أقصى هي الثوابت $\beta \in [0,1[$ على $\mathbb{R}$، والدوال $t \mapsto k(t+\alpha)$ مع $k \in \mathbb{Z}^*$ على المجال الذي يكون فيه $kt + k\alpha \in [k, k+1[$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

Problème 8 — Session 2021

Polynômes de Tchebychev de première espèce : premières propriétés

Notations et Partie 1 © 2026 Saad Choukri

Notations. Pour $(r,k) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \leq r$, $\binom{r}{k} = \frac{r!}{k!(r-k)!}$. Pour tout réel θ, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Un polynôme non nul de degré n est une fonction $P : z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ définie sur $\mathbb{C}$, avec $a_n \neq 0$ (coefficient dominant) ; si les a_k sont réels, on note encore P la fonction $x \mapsto P(x)$ de la variable réelle. On admet qu'un polynôme ayant une infinité de racines est nul, et l'on rappelle que $(P+Q)' = P'+Q'$, $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

On considère la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad T_0(z) = 1, \quad T_1(z) = z \quad \text{et} \quad T_{n+1}(z) = 2zT_n(z) - T_{n-1}(z),\ n \in \mathbb{N}^*.$$

1.1. **Question (1)** Préciser les expressions des polynômes T_2, T_3, T_4 et T_5.

1.2. **Question (2)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1.2.1. **(a)** Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. (1)

1.2.2. **(b)** Montrer que T_n est l'unique polynôme à coefficients réels vérifiant la relation (1).

1.3. **Question (3) Degré, coefficients et parité de T_n.**

1.3.1. **(a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est à coefficients entiers.

1.3.2. **(b)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré de T_n ainsi que son coefficient dominant.

1.3.3. **(c)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Préciser la parité de T_n en fonction de celle de n.

1.4. **Question (4) Une expression de T_n pour $n \geq 2$.** Soit $n \geq 2$.

1.4.1. **(a)** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer la partie réelle de $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

1.4.2. **(b)** Montrer que pour tout réel θ, $T_n(\cos\theta) = \displaystyle\sum_{0\leq 2k\leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} (\cos\theta)^{n-2k}(\sin\theta)^{2k}$. *On pourra utiliser la formule de Moivre.*

1.4.3. **(c)** En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $T_n(z) = \displaystyle\sum_{0\leq 2k\leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} z^{n-2k}(1-z^2)^k$.

1.4.4. **(d)** Retrouver les résultats de la question 1.3.

1.5. **Question (5)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1.5.1. **(a)** À l'aide des formules d'Euler, montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos^{2n}\theta = \dfrac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \dfrac{1}{2^{2n-1}}\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\binom{2n}{n-p}\cos(2p\theta)$.

1.5.2. **(b)** En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^{2n} = \sum_{k=0}^{n} b_k T_{2k}(z)$, où $b_0, \ldots, b_n$ sont des rationnels que l'on précisera en fonction de n.

1.6. **Question (6) Coefficients de T_n pour $n \geq 2$.** Soit $n \geq 2$.

1.6.1. **(a)** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0$.

1.6.2. **(b)** On pose $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^k$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

(i) **(i)** Pour tout $k \in \{0, \dots, n-2\}$, exprimer $a_{n,k+2}$ en fonction de $a_{n,k}$.

(ii) **(ii)** En déduire l'expression de $a_{n,k}$ en fonction de n et k, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. *On pourra distinguer les cas selon la parité de n et de k.*

1.7. **Question (7) Une autre propriété de T_n.** On note ch et sh les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

1.7.1. **(a)** Vérifier que ch est paire et sh impaire.

1.7.2. **(b)** Justifier que ch et sh sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.

1.7.3. **(c)** Dresser le tableau de variations de ch, étudier ses branches infinies et tracer sa courbe.

1.7.4. **(d)** Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geq 1$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.

1.7.5. **(e)** Justifier que ch réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

1.7.6. **(f)** Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{ch}(x+y)+\mathrm{ch}(x-y) = 2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y)$ et $\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x) = 1$.

1.7.7. **(g)** En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}((n+1)\theta) + \mathrm{ch}((n-1)\theta) = 2\,\mathrm{ch}(n\theta)\,\mathrm{ch}(\theta)$.

1.7.8. **(h)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\mathrm{ch}\,\theta) = \mathrm{ch}(n\theta)$. (2)

1.7.9. **(i)** Montrer alors que si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ et $|x| > 1$, alors $|T_n(x)| > 1$.

1.7.10. **(j)** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x > 1$. Exprimer $T_n(x)$ en fonction de n, de x et de $\sqrt{x^2-1}$.

N.B. : la question 1.7.10 de l'original n'indique pas la quantité à exprimer ; il s'agit de $T_n(x)$, et l'on trouve $T_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right]$.

Commentaire. Les polynômes de Tchebychev T_n, définis par $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$, ont des coefficients entiers, un coefficient dominant 2^{n-1} et vérifient l'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$. Ils sont omniprésents en théorie de l'approximation et en analyse numérique (nœuds de Tchebychev).

النسخة العربية

حدوديات تشيبيشيف من النوع الأول : خاصيات أولى

دورة 2021 ▪ ترميزات والجزء 1 ▪ © 2026 سعد شكري

ترميز. من أجل $(r,k) \in \mathbb{N}^2$ مع $k \leq r$، $\binom{r}{k} = \frac{r!}{k!(r-k)!}$. لكل عدد حقيقي θ، $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. الحدودية غير المنعدمة ذات الدرجة n هي دالة $P : z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ معرفة على $\mathbb{C}$ مع $a_n \neq 0$ (المعامل الرئيسي)؛ وإذا كانت المعاملات a_k حقيقية نرمز أيضا بـ P للدالة $x \mapsto P(x)$ ذات المتغير الحقيقي. نقبل أن كل حدودية لها عدد لانهائي من الجذور منعدمة، ونذكر بأن $(P+Q)' = P'+Q'$ و$(PQ)' = P'Q + PQ'$.

نعتبر متتالية الحدوديات $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ

$$\forall z \in \mathbb{C},\quad T_0(z) = 1,\quad T_1(z) = z \quad \text{و} \quad T_{n+1}(z) = 2zT_n(z) - T_{n-1}(z),\ n \in \mathbb{N}^*.$$

السؤال (1) حدد تعابير الحدوديات T_2 وT_3 وT_4 وT_5.

السؤال (2) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) **(أ)** بين أن $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

(ب) بين أن T_n هي الحدودية الوحيدة ذات المعاملات الحقيقية التي تحقق العلاقة (1).

السؤال (3) درجة T_n ومعاملاتها وزوجيتها.

(أ) بين أنه لكل $n \in \mathbb{N}$ الحدودية T_n ذات معاملات صحيحة.

(ب) ليكن $n \in \mathbb{N}$. حدد درجة T_n ومعاملها الرئيسي.

(ج) ليكن $n \in \mathbb{N}$. حدد زوجية T_n بدلالة زوجية n.

السؤال (4) تعبير للحدودية T_n من أجل $n \geq 2$. ليكن $n \geq 2$.

(أ) ليكن $\theta \in \mathbb{R}$. احسب الجزء الحقيقي للعدد $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ بدلالة $\cos\theta$ و$\sin\theta$.

(ب) بين أنه لكل عدد حقيقي θ : $T_n(\cos\theta) = \sum_{0\leq 2k\leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} (\cos\theta)^{n-2k}(\sin\theta)^{2k}$. يمكن استعمال صيغة موافر.

(ج) استنتج أنه لكل $z \in \mathbb{C}$: $T_n(z) = \sum_{0\leq 2k\leq n} (-1)^k \binom{n}{2k} z^{n-2k}(1-z^2)^k$.

(د) استرجع نتائج السؤال 1.3.

السؤال (5) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$.

(أ) باستعمال صيغتي أولر، بين أن $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos^{2n}\theta = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{p=1}^{n}\binom{2n}{n-p}\cos(2p\theta)$.

(ب) استنتج أنه لكل $z \in \mathbb{C}$: $z^{2n} = \sum_{k=0}^{n} b_k T_{2k}(z)$، حيث $b_0, \ldots, b_n$ أعداد جذرية يطلب تحديدها بدلالة n.

السؤال (6) معاملات T_n من أجل $n \geq 2$. ليكن $n \geq 2$.

(أ) بين أن $\forall x \in \mathbb{R},\ (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0$.

(ب) نكتب $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}x^k$.

(i) لكل $k \in \{0, \ldots, n-2\}$ عبر عن $a_{n,k+2}$ بدلالة $a_{n,k}$.

(ii) استنتج تعبير $a_{n,k}$ بدلالة n وk لكل $k \in \{0, \ldots, n\}$. يمكن التمييز بين الحالات حسب زوجية n وk.

السؤال (7) خاصية أخرى للحدودية T_n. نرمز بـ ch و sh للدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ و$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

(أ) تحقق من أن ch زوجية و sh فردية.

(ب) علل أن ch و sh من الصنف $\mathcal{C}^1$ على $\mathbb{R}$ وأن $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ و$\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.

(ج) ضع جدول تغيرات ch، وادرس فروعها اللانهائية، ثم أنشئ منحناها.

(د) علل أنه لكل $x \in \mathbb{R} : \mathrm{ch}(x) \geq 1$، وأن $\mathrm{ch}(x) = 1$ إذا وفقط إذا كان $x = 0$.

(هـ) علل أن ch تقابل من $[0, +\infty[$ نحو $[1, +\infty[$.

(و) بين أنه لكل $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{ch}(x-y) = 2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y)$ و$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

(ز) استنتج أن $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}((n+1)\theta) + \mathrm{ch}((n-1)\theta) = 2\,\mathrm{ch}(n\theta)\,\mathrm{ch}(\theta)$.

(ح) بين أن $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\mathrm{ch}\,\theta) = \mathrm{ch}(n\theta)$. (2)

(ط) بين إذن أنه إذا كان $n \in \mathbb{N}^*$ و$x \in \mathbb{R}$ و$|x| > 1$ فإن $|T_n(x)| > 1$.

(ي) ليكن $n \in \mathbb{N}$ و$x > 1$. عبر عن $T_n(x)$ بدلالة n وx و$\sqrt{x^2-1}$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

ملاحظة : لا يحدد السؤال 1.7.10 في الأصل المقدار المطلوب التعبير عنه؛ والمقصود $T_n(x)$، ونجد $T_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right]$.

تعليق. حدوديات تشيبيشيف T_n، المعرفة بـ $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$، معاملاتها صحيحة ومعاملها الرئيسي 2^{n-1}، وتحقق المعادلة التفاضلية $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$. وهي حاضرة بقوة في نظرية التقريب والتحليل العددي (عُقد تشيبيشيف).

Problème 9 — Session 2025

Fonctions absolument monotones : exemples et premières propriétés

Problème, Partie 1 © 2026 Saad Choukri

Définitions et rappels. Pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \le n$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Une fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (indéfiniment dérivable) sur un intervalle I si elle y est p fois dérivable pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. On admet que le produit et la composée de deux fonctions p fois dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^p$) le sont aussi, ainsi que la formule de Leibniz $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Définition. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *absolument monotone* sur I si elle est indéfiniment dérivable sur I et si

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times I, \quad f^{(n)}(x) \ge 0.$$

1.1. **Question (1) Premiers exemples.**

1.1.1. **(a)** Montrer que la fonction exponentielle est absolument monotone sur $\mathbb{R}$.

1.1.2. **(b)** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}$ sur $]0,1[$. Justifier que f est indéfiniment dérivable sur $]0,1[$, en calculer les dérivées successives et montrer que f est absolument monotone sur $]0,1[$.

1.1.3. **(c)** Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante portant sur les coefficients d'une fonction polynomiale réelle pour qu'elle soit absolument monotone sur $[0,+\infty[$.

1.2. **Question (2) Un autre exemple.** On considère la fonction $f : x \mapsto -\ln(1-x)$ sur $[0,1[$.

1.2.1. **(a)** Justifier que f est indéfiniment dérivable sur $[0,1[$ et préciser, pour tout $n \ge 1$, l'expression de $f^{(n)}(0)$.

Pour tout $n \ge 1$, on définit sur $[0,1[$ les fonctions $u_n(x) = \ln(1-x) + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k}$ et $v_n(x) = u_n(x) + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$.

1.2.2. **(b)** Soit $n \ge 1$. Justifier que u_n et v_n sont dérivables sur $[0,1[$ et donner, sous forme simplifiée, leurs dérivées. En déduire les signes des fonctions u_n et v_n.

1.2.3. **(c)** Soit $x \in [0,1[$. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\right)_{n\ge 1}$ converge vers $-\ln(1-x)$. On écrit alors

$$-\ln(1-x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

1.3. **Question (3) Quelques résultats généraux.** Soient I et J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$.

1.3.1. **(a)** Justifier que toute fonction absolument monotone sur I est positive, croissante et convexe sur I.

1.3.2. **(b)** Montrer qu'une fonction f est absolument monotone sur I si, et seulement si, elle est positive, dérivable sur I et si sa dérivée f' est absolument monotone sur I.

1.3.3. **(c)** Soient f et g deux fonctions absolument monotones sur I. Montrer que $f+g$ et fg sont absolument monotones sur I.

1.3.4. **(d)** Montrer que si f est absolument monotone sur I, alors e^f est absolument monotone sur I. *On pourra raisonner par récurrence.*

1.3.5. **(e)** On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]0,1[$. Montrer que g est absolument monotone sur $]0,1[$. *On pourra considérer* $h : x \mapsto \ln(g(x))$ *et calculer* h'.

1.3.6. **(f)** Montrer plus généralement que si $\varphi : J \to \mathbb{R}$ est absolument monotone sur J et $f : I \to \mathbb{R}$ absolument monotone sur I, avec $\varphi(J) \subset I$, alors $f \circ \varphi$ est absolument monotone sur J. *On pourra exploiter une récurrence bien énoncée pour montrer que* $(f\circ\varphi)^{(n)} \geq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Commentaire. Une fonction absolument monotone a toutes ses dérivées positives : exemples typiques e^x, $-\ln(1-x)$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $[0,1[$. La classe est stable par somme, produit et composition, ce qui permet de construire de nombreux exemples. On montre en 1.2 que $-\ln(1-x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ sur $[0,1[$.

النسخة العربية

الدوال الرتيبة كليا : أمثلة وخاصيات أولى

دورة 2025 ▪ المسألة، الجزء 1 ▪ 2026 © سعد شكري

تعاريف وتذكير. من أجل $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ مع $k \leq n$، $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. تكون دالة من الصنف $\mathcal{C}^\infty$ (قابلة للاشتقاق لانهائيا على مجال I إذا كانت قابلة للاشتقاق p مرة عليه لكل $p \in \mathbb{N}^*$. نقبل أن جداء ومركب دالتين قابلتين للاشتقاق p مرة (أو من الصنف $\mathcal{C}^p$) كذلك، كما نقبل صيغة لايبنيز $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

تعريف. ليكن I مجالا غير منحل من $\mathbb{R}$. نقول إن دالة $f : I \to \mathbb{R}$ رتيبة كليا على I إذا كانت قابلة للاشتقاق لانهائيا على I وتحقق

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times I, \quad f^{(n)}(x) \geq 0.$$

السؤال (1) أمثلة أولى.

(أ) بين أن الدالة الأسية رتيبة كليا على $\mathbb{R}$.

(ب) نعتبر الدالة $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}$ على $]0,1[$. علل أن f قابلة للاشتقاق لانهائيا على $]0,1[$، واحسب مشتقاتها المتتالية، وبين أنها رتيبة كليا على $]0,1[$.

(ج) صغ وأثبت شرطا لازما وكافيا على معاملات دالة حدودية حقيقية لكي تكون رتيبة كليا على $[0,+\infty[$.

السؤال (2) مثال آخر. نعتبر الدالة $f : x \mapsto -\ln(1-x)$ على $[0,1[$.

(أ) علل أن f قابلة للاشتقاق لانهائيا على $[0,1[$ وحدد، لكل $n \geq 1$، تعبير $f^{(n)}(0)$.

لكل $n \geq 1$ نعرف على $[0,1[$ الدالتين $u_n(x) = \ln(1-x) + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k}$ و $v_n(x) = u_n(x) + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

(ب) ليكن $n \geq 1$. علل أن u_n وv_n قابلتان للاشتقاق على $[0,1[$ وأعط تعبيرين مبسطين لمشتقتيهما. استنتج إشارتي u_n وv_n.

(ج) ليكن $x \in [0,1[$. بين أن المتتالية $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\right)_{n\geq 1}$ متقاربة نحو $-\ln(1-x)$. ونكتب إذن $-\ln(1-x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

السؤال (3) بعض النتائج العامة. ليكن I وJ مجالين غير منحلين من $\mathbb{R}$.

(أ) علل أن كل دالة رتيبة كليا على I موجبة وتزايدية ومحدبة على I.

(ب) بين أن f رتيبة كليا على I إذا وفقط إذا كانت موجبة وقابلة للاشتقاق على I ومشتقتها f' رتيبة كليا على I.

(ج) لتكن f وg دالتين رتيبتين كليا على I. بين أن $f+g$ وfg رتيبتان كليا على I.

(د) بين أنه إذا كانت f رتيبة كليا على I فإن e^f رتيبة كليا على I. يمكن الاستدلال بالترجع.

(هـ) نعتبر الدالة $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ على $]0,1[$. بين أن g رتيبة كليا على $]0,1[$. يمكن اعتبار $h : x \mapsto \ln(g(x))$ وحساب h'.

(و) بين بصفة عامة أنه إذا كانت $\varphi : J \to \mathbb{R}$ رتيبة كليا على J و$f : I \to \mathbb{R}$ رتيبة كليا على I مع $\varphi(J) \subset I$، فإن $f \circ \varphi$ رتيبة كليا على J. يمكن استغلال ترجع مصاغ جيدا لإثبات أن $(f\circ\varphi)^{(n)} \geq 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

تعليق. الدالة الرتيبة كليا جميع مشتقاتها موجبة : من الأمثلة النموذجية e^x و$-\ln(1-x)$ و$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ على $[0,1[$. هذه الفئة مستقرة بالجمع والجداء والتركيب، مما يتيح بناء أمثلة كثيرة. ونبين في 1.2 أن $-\ln(1-x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ على $[0,1[$.

Problème 10 — Session 2019

Indépendance linéaire de la famille $(1, e, e^2)$ sur $\mathbb{Q}$

Problème 1 © 2026 Saad Choukri

Partie 1 : Préliminaires

1.1. **Question (1) Construction du nombre e.** On considère les suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}.$$

1.1.1. **(a)** Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note e leur limite commune.

1.1.2. **(b)** Justifier que $u_n < e < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1.1.3. **(c) Irrationalité de e.** Raisonnant par l'absurde, on suppose $e = p/q$ avec $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que $q!\,u_q$ est un entier et aboutir à une contradiction.

1.2. **Question (2) Suites d'entiers convergentes.** Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite convergente d'entiers relatifs de limite nulle. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_n = 0$ pour tout $n \geq N$.

1.3. **Question (3) Formule de Taylor avec reste intégral.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle non trivial et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Soient $a, b \in I$; pour $k \in \{0,\dots,n\}$, on pose $R_k = \displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

1.3.1. **(a)** Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $R_{k-1} = \dfrac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_k$.

1.3.2. **(b)** En déduire que $f(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie 2 : Le résultat d'indépendance linéaire

On suppose qu'il existe trois rationnels α, β, γ tels que $\alpha + \beta e + \gamma e^2 = 0$.

2.1. **Question (4)** Montrer qu'on peut supposer α, β, γ entiers relatifs.

On suppose désormais $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ et on considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha e^{-x} + \gamma e^{x}$.

2.2. **Question (5)** Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(x) = (-1)^n \alpha e^{-x} + \gamma e^{x}$.

2.3. **Question (6)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\alpha e^{-1} + \gamma e = \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma + (-1)^k \alpha}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \left((-1)^{n+1} \alpha e^{-t} + \gamma e^{t}\right) \mathrm{d}t.$$

> **N.B. :** la somme commence à $k = 0$ (formule de Taylor en 0 appliquée à f entre 0 et 1) ; l'original indique $k = 1$.

2.4. **Question (7)** On pose $y_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \left((-1)^{n+1} \alpha e^{-t} + \gamma e^{t}\right) \mathrm{d}t$. Montrer que $(y_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

2.5. **Question (8)** En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_0$: $n!\,\beta + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \left(\gamma + (-1)^k \alpha\right) = 0$.

2.6. **Question (9)** Montrer que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

> **Commentaire.** Résultat dû à Liouville (1840) : e n'est racine d'aucun polynôme de degré ≤ 2 à coefficients rationnels, ce qui prouve en particulier que e^2 est irrationnel. L'idée — multiplier une relation par $n!$ pour obtenir un entier strictement compris entre 0 et 1 — annonce la preuve de la transcendance de e par Hermite (1873).

النسخة العربية

الاستقلال الخطي للأسرة $(1, e, e^2)$ على $\mathbb{Q}$

دورة 2019 ▪ المسألة 1 ▪ © 2026 سعد شكري

الجزء 1 : نتائج تمهيدية

السؤال (1) إنشاء العدد e. نعتبر المتتاليتين المعرفتين لكل $n \in \mathbb{N}^*$ بـ

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{و} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}.$$

(أ) بين أن (u_n) و(v_n) متحاديتان. نرمز بـ e لنهايتهما المشتركة.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ أو إعادة النشر دون إذن المؤلف

(ب) علل أن $u_n < e < v_n$ لكل $n \in \mathbb{N}^*$.

(ج) لاجذرية e. بالخلف، نفترض أن $e = p/q$ مع $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. بين أن $q!\,u_q$ عدد صحيح واستنتج تناقضا.

السؤال (2) تقارب متتالية أعداد صحيحة. لتكن $(x_n)_{n\geq 1}$ متتالية أعداد صحيحة نسبية متقاربة ونهايتها منعدمة. بين أنه يوجد $N \in \mathbb{N}^*$ بحيث $x_n = 0$ لكل $n \geq N$.

السؤال (3) صيغة تايلور بالباقي التكاملي. ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ وI مجالا غير منحل و$f : I \to \mathbb{R}$ من الصنف $\mathcal{C}^{n+1}$. ليكن $a, b \in I$؛ لكل $k \in \{0, \ldots, n\}$ نضع $R_k = \displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t$.

(أ) بين أنه لكل $k \in \{1, \ldots, n\}$: $R_{k-1} = \dfrac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_k$.

(ب) استنتج أن $f(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$.

الجزء 2 : نتيجة الاستقلال الخطي

نفترض أنه توجد ثلاثة أعداد جذرية α, β, γ بحيث $\alpha + \beta e + \gamma e^2 = 0$.

السؤال (4) بين أنه يمكن افتراض أن α, β, γ أعداد صحيحة نسبية.

نفترض من الآن أن $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ ونعتبر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، $f(x) = \alpha e^{-x} + \gamma e^{x}$.

السؤال (5) تحقق من أنه لكل $n \in \mathbb{N}^*$ الدالة f قابلة للاشتقاق n مرة على $\mathbb{R}$ وأن $f^{(n)}(x) = (-1)^n \alpha e^{-x} + \gamma e^{x}$.

السؤال (6) بين أنه لكل $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\alpha e^{-1} + \gamma e = \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma + (-1)^k \alpha}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \left((-1)^{n+1} \alpha e^{-t} + \gamma e^{t}\right) \mathrm{d}t.$$

ملاحظة : يبدأ المجموع من $k = 0$ (صيغة تايلور في 0 مطبقة على f بين 0 و1)؛ والأصل يبدأ من $k = 1$.

السؤال (7) نضع $y_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \left((-1)^{n+1} \alpha e^{-t} + \gamma e^{t}\right) \mathrm{d}t$. بين أن $(y_n)_{n\geq 1}$ متقاربة نحو 0.

السؤال (8) استنتج أنه يوجد $n_0 \in \mathbb{N}^*$ بحيث لكل $n \geq n_0$: $n!\,\beta + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \left(\gamma + (-1)^k \alpha\right) = 0$.

السؤال (9) بين أن $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

تعليق. نتيجة تعود إلى ليوفيل (1840) : العدد e ليس جذرا لأي حدودية من الدرجة ≤ 2 ذات معاملات جذرية؛ وبالخصوص e^2 لاجذري. وفكرة ضرب علاقة في $n!$ للحصول على عدد صحيح محصور قطعا بين 0 و1 تمهد لبرهان هيرميت على تسامي e (1873).

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

Problème 11 — Session 2021

Zéros et extrémums de T_n ; borne inférieure de $\|P\|$ sur les polynômes unitaires

Partie 3 © 2026 Saad Choukri

Notations. Pour un polynôme P, on pose $\|P\| = \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n$ désigne l'ensemble des polynômes de degré n unitaires (coefficient dominant égal à 1), à coefficients complexes. (T_n) est la suite des polynômes de Tchebychev : $T_0 = 1$, $T_1(x) = x$, $T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$.

> **Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine).** $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ pour tout réel θ ; T_n est à coefficients réels, de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} ($n \geq 1$) ; si $|x| > 1$, alors $|T_n(x)| > 1$.

Dans ce problème, n est un entier naturel ≥ 2.

3.1. **Question (1) Zéros de T_n.**

3.1.1. **(a)** Résoudre l'équation $\cos(n\theta) = 0$, d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

3.1.2. **(b)** Montrer que T_n possède exactement n racines réelles $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$, et calculer x_k pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

3.2. **Question (2) Extrémums de T_n sur le segment $[-1, 1]$.**

3.2.1. **(a)** Montrer que si $x \in [-1, 1]$, alors $|T_n(x)| \leq 1$.

3.2.2. **(b)** Montrer que toute solution réelle de l'équation $|T_n(x)| = 1$ est dans le segment $[-1, 1]$.

3.2.3. **(c)** Résoudre l'équation $|\cos(n\theta)| = 1$, d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

3.2.4. **(d)** En déduire que l'équation $|T_n(x)| = 1$ possède exactement $n + 1$ solutions réelles $y_0 > y_1 > \cdots > y_n$, et calculer y_k et $T_n(y_k)$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$.

On a en particulier prouvé que $\|T_n\| = 1$.

3.3. **Question (3)** Résoudre l'équation $T_n'(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3.4. **Question (4)** Représenter graphiquement les fonctions $x \mapsto T_k(x)$ sur $[-1, 1]$, pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

3.5. **Question (5)** Soit P un polynôme à **coefficients réels**, de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}. On veut montrer que $\|P\| \geq 1$. Raisonnant par l'absurde, on suppose $\|P\| < 1$, de sorte que $|P(x)| < 1$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

3.5.1. **(a)** En considérant le signe de $T_n(x) - P(x)$ pour $x \in \{y_0, \ldots, y_n\}$, montrer que $T_n - P$ s'annule sur chacun des intervalles $]y_k, y_{k-1}[$, $1 \leq k \leq n$.

3.5.2. **(b)** En déduire une contradiction en considérant le degré de $T_n - P$.

3.6. **Question (6) Détermination de la borne inférieure** $\inf\{\|P\|,\ P \in \mathbb{U}_n\}$.

3.6.1. **(a)** Soit $P \in \mathbb{U}_n$.

(i) **(i)** On suppose que P est à coefficients réels. Montrer que $\|P\| \geq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

(ii) **(ii)** Dans le cas général, montrer de même que $\|P\| \geq \dfrac{1}{2^{n-1}}$. *On pourra séparer partie réelle et partie imaginaire de $P(x)$ pour $x \in [-1, 1]$.*

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

3.6.2. **(b)** Montrer que $\inf\{\|P\|,\ P \in \mathbb{U}_n\}$ existe et, en considérant un élément bien choisi de $\mathbb{U}_n$, justifier que $\inf\{\|P\|,\ P \in \mathbb{U}_n\} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Commentaire. Les n zéros de T_n sont $x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$ et ses $n+1$ extrémums sur $[-1,1]$ sont $y_k = \cos\frac{k\pi}{n}$, où T_n prend alternativement les valeurs ± 1. Cette alternance donne le résultat de Tchebychev : parmi les polynômes unitaires de degré n, le minimum de $\sup_{[-1,1]}|P|$ vaut 2^{1-n}, atteint pour $2^{1-n}T_n$.

النسخة العربية

أصفار T_n وقيمها القصوى؛ الحد الأدنى لـ $\|P\|$ على الحدوديات الواحدية

دورة 2021 ▪ الجزء 3 ▪ 2026 © سعد شكري

ترميز. لكل حدودية P نضع $\|P\| = \sup_{x\in[-1,1]}|P(x)|$. لكل $n \in \mathbb{N}^*$ نرمز بـ $\mathbb{U}_n$ لمجموعة الحدوديات الواحدية (معاملها الرئيسي 1) ذات الدرجة n والمعاملات العقدية. (T_n) متتالية حدوديات تشيبيشيف : $T_0 = 1$ و$T_1(x) = x$ و$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$.

نتائج مقبولة (مُثبتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ لكل عدد حقيقي θ؛ T_n ذات معاملات حقيقية ودرجتها n ومعاملها الرئيسي 2^{n-1} ($n \geq 1$)؛ إذا كان $|x| > 1$ فإن $|T_n(x)| > 1$.

في هذه المسألة n عدد صحيح طبيعي ≥ 2.

السؤال (1) أصفار الحدودية T_n.

(أ) حل المعادلة $\cos(n\theta) = 0$ ذات المجهول $\theta \in \mathbb{R}$.

(ب) بين أن T_n تقبل بالضبط n جذرا حقيقيا $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$، واحسب x_k لكل $k \in \{1,\dots,n\}$.

السؤال (2) القيم القصوى للحدودية T_n على القطعة $[-1,1]$.

(أ) بين أنه إذا كان $x \in [-1,1]$ فإن $|T_n(x)| \leq 1$.

(ب) بين أن كل حل حقيقي للمعادلة $|T_n(x)| = 1$ ينتمي إلى القطعة $[-1,1]$.

(ج) حل المعادلة $|\cos(n\theta)| = 1$ ذات المجهول $\theta \in \mathbb{R}$.

(د) استنتج أن المعادلة $|T_n(x)| = 1$ تقبل بالضبط $n+1$ حلا حقيقيا $y_0 > y_1 > \cdots > y_n$، واحسب y_k و$T_n(y_k)$ لكل $k \in \{0,\dots,n\}$.

وبالخصوص أثبتنا أن $\|T_n\| = 1$.

السؤال (3) حل المعادلة $T_n'(x) = 0$ ذات المجهول $x \in \mathbb{R}$.

السؤال (4) أنشئ منحنيات الدوال $x \mapsto T_k(x)$ على $[-1,1]$ من أجل $k \in \{1,2,3,4\}$.

السؤال (5) لتكن P حدودية ذات **معاملات حقيقية** ودرجتها n ومعاملها الرئيسي 2^{n-1}. نريد أن نبين أن $\|P\| \geq 1$. بالخلف نفترض أن $\|P\| < 1$، أي $|P(x)| < 1$ لكل $x \in [-1,1]$.

(أ) باعتبار إشارة $T_n(x) - P(x)$ من أجل $x \in \{y_0,\dots,y_n\}$، بين أن $T_n - P$ تنعدم في كل من المجالات $]y_k, y_{k-1}[$، $1 \leq k \leq n$.

(ب) استنتج تناقضا باعتبار درجة $T_n - P$.

السؤال (6) تحديد الحد الأدنى $\inf\{\|P\|,\ P \in \mathbb{U}_n\}$.

(أ) لتكن $P \in \mathbb{U}_n$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

(i) نفترض أن P ذات معاملات حقيقية. بين أن $\|P\| \geq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

(ii) في الحالة العامة، بين كذلك أن $\|P\| \geq \dfrac{1}{2^{n-1}}$. يمكن فصل الجزء الحقيقي عن الجزء التخيلي للعدد $P(x)$ من أجل $x \in [-1,1]$.

(ب) بين أن $\inf\{\|P\|,\ P \in \mathbb{U}_n\}$ موجود، وباعتبار عنصر مختار جيدا من $\mathbb{U}_n$ علل أن $\inf\{\|P\|,\ P \in \mathbb{U}_n\} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

تعليق. أصفار T_n الـ n هي $x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$، وقيمها القصوى الـ $n+1$ على $[-1,1]$ هي $y_k = \cos\frac{k\pi}{n}$ حيث تأخذ T_n بالتناوب القيمتين ± 1. هذا التناوب يعطي نتيجة تشيبيشيف : من بين الحدوديات الواحدية ذات الدرجة n، أصغر قيمة لـ $\sup_{[-1,1]}|P|$ هي 2^{1-n}، وتتحقق من أجل $2^{1-n}T_n$.

Problème 12 — Session 2022

Parties puissantes de $]0,+\infty[$: exemples et parties à deux éléments

Problème 3, Parties 1 et 2 © 2026 Saad Choukri

Notations. ln désigne le logarithme népérien et e le nombre de Néper ; pour $\alpha, \beta > 0$, $\alpha^\beta = e^{\beta \ln \alpha}$.

Définitions.

(i) Une partie finie $\mathscr{C}$ de $]0,+\infty[$ est dite *puissante* si $\operatorname{Card}\mathscr{C} \geq 2$ et si pour tous $a, b \in \mathscr{C}$ distincts, l'un au moins des réels a^b et b^a appartient à $\mathscr{C}$.

(ii) Une partie puissante $\mathscr{C}$ telle que $1 \notin \mathscr{C}$ est dite *super-puissante*.

Le but (atteint dans le problème suivant) est de montrer qu'il n'existe qu'une seule partie super-puissante (resp. puissante) à trois (resp. quatre) éléments, et aucune partie super-puissante (resp. puissante) à $n \geq 4$ (resp. $n \geq 5$) éléments.

Partie 1 : étude de quelques exemples

1.1. **Question (1)** La partie $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ est-elle puissante ?

1.2. **Question (2)** Vérifier que dans chacun des cas suivants, $\mathscr{C}$ est une partie puissante de $]0,+\infty[$:

$$\text{(i) } \mathscr{C} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}; \qquad \text{(ii) } \mathscr{C} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right\}; \qquad \text{(iii) } \mathscr{C} = \{1, \alpha\},\ 0 < \alpha \neq 1.$$

1.3. **Question (3)** Reprendre la question précédente en précisant dans quels cas $\mathscr{C}$ est super-puissante.

1.4. **Question (4)** Construire une partie puissante de $]0,+\infty[$ ayant quatre éléments.

1.5. **Question (5) Une condition nécessaire sur les parties puissantes à deux éléments.** Soient α et β deux réels strictement positifs, distincts de 1, avec $\alpha < \beta$.

1.5.1. **(a)** On suppose $\alpha < 1 < \beta$. Montrer que la partie $\{\alpha, \beta\}$ n'est pas puissante.

1.5.2. **(b)** En déduire que si $\{\alpha, \beta\}$ est puissante, alors $\alpha > 1$ ou bien $\beta < 1$.

1.6. **Question (6)** Vérifier que $\{e^{1/e}, e\}$ est une partie super-puissante de $]0,+\infty[$.

1.7. **Question (7)** Existe-t-il un réel $d > e$ tel que $\{e, d\}$ soit une partie puissante ?

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

Partie 2 : une infinité de parties super-puissantes à deux éléments

2.1. **Question (8)** Soient $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$. Montrer que $\gamma^\alpha > \gamma$ si, et seulement si, ($\alpha < 1$ et $\gamma < 1$) ou bien ($\alpha > 1$ et $\gamma > 1$).

2.2. **Question (9)** **Parties super-puissantes à deux éléments contenues dans** $]1, +\infty[$. Soit $\alpha \in]1, e^{1/e}[$. On considère la fonction $f_\alpha : x \mapsto \alpha^x - x$, définie sur $[\alpha, +\infty[$.

2.2.1. **(a)** Montrer que f_α est dérivable sur $[\alpha, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

2.2.2. **(b)** Montrer que la dérivée de f_α s'annule une seule fois sur $]\alpha, +\infty[$, en un point x_0 que l'on calculera en fonction de α. *On pourra vérifier que* $\alpha^\alpha \ln(\alpha) < 1$.

2.2.3. **(c)** Déterminer le signe de $f_\alpha(x_0)$, puis dresser le tableau de variations de f_α sur $[\alpha, +\infty[$.

2.2.4. **(d)** Montrer, en citant soigneusement les théorèmes utilisés, qu'il existe exactement deux réels β et β_1 vérifiant $\alpha < \beta < x_0 < \beta_1$, tels que chacune des parties $\{\alpha, \beta\}$ et $\{\alpha, \beta_1\}$ soit super-puissante.

2.3. **Question (10)** **Parties super-puissantes à deux éléments contenues dans** $]0, 1[$. Soit $\alpha \in]0, 1[$.

2.3.1. **(a)** Justifier que si $\gamma \in]\alpha, 1[$, alors $\gamma^\alpha \notin \{\alpha, \gamma\}$.

2.3.2. **(b)** Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in]\alpha, 1[$ tel que la partie $\{\alpha, \lambda\}$ soit super-puissante. *On pourra étudier la fonction* $g_\alpha : x \mapsto \alpha^x - x$ *sur le segment* $[\alpha, 1]$.

Commentaire. On trouve $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$, $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\}$ et $\{e^{1/e}, e\}$ comme parties super-puissantes. L'équation $\alpha^\beta = \beta$ fait intervenir la tour d'exponentielles infinie $x^{x^{x^{\cdots}}}$, qui converge exactement pour $x \in [e^{-e}, e^{1/e}]$: c'est pourquoi le seuil $e^{1/e} \approx 1{,}4447$ apparaît.

النسخة العربية

الأجزاء القوية من $]0, +\infty[$: أمثلة وأجزاء ذات عنصرين

دورة 2022 ▪ المسألة 3، الجزآن 1 و2 ▪ 2026 © سعد شكري

ترميز. $\ln$ اللوغاريتم النبيري وe عدد نيبر؛ من أجل $\alpha, \beta > 0$، $\alpha^\beta = e^{\beta \ln \alpha}$.

تعاريف.

(i) نقول إن جزءا منتهيا $\mathscr{C}$ من $]0, +\infty[$ قوي إذا كان $\operatorname{Card} \mathscr{C} \geq 2$ وكان، لكل عنصرين مختلفين a, b من $\mathscr{C}$، أحد العددين a^b أو b^a على الأقل ينتمي إلى $\mathscr{C}$.

(ii) نقول إن جزءا قويا $\mathscr{C}$ لا يحتوي على 1 فائق القوة.

الهدف (الذي يتحقق في المسألة الموالية) هو إثبات أنه يوجد جزء وحيد فائق القوة (وجزء وحيد قوي) بثلاثة (بأربعة) عناصر، ولا يوجد أي جزء فائق القوة (قوي) بـ $n \geq 4$ (بـ $n \geq 5$) عناصر.

الجزء 1 : دراسة بعض الأمثلة

السؤال (1) هل الجزء $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ قوي؟

السؤال (2) تحقق من أنه في كل حالة من الحالات التالية $\mathscr{C}$ جزء قوي من $]0, +\infty[$:

$$\text{(i) } \mathscr{C} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}; \qquad \text{(ii) } \mathscr{C} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right\}; \qquad \text{(iii) } \mathscr{C} = \{1, \alpha\},\ 0 < \alpha \neq 1.$$

السؤال (3) في السؤال السابق، حدد الحالات التي يكون فيها $\mathscr{C}$ فائق القوة.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

السؤال (4) أنشئ جزءا قويا من $]0,+\infty[$ له أربعة عناصر.

السؤال (5) **شرط لازم على الأجزاء القوية ذات العنصرين.** ليكن α وβ عددين حقيقيين موجبين قطعا ومختلفين عن 1 مع $\alpha < \beta$.

(أ) نفترض أن $\alpha < 1 < \beta$. بين أن $\{\alpha, \beta\}$ ليس قويا.

(ب) استنتج أنه إذا كان $\{\alpha, \beta\}$ قويا فإن $\alpha > 1$ أو $\beta < 1$.

السؤال (6) تحقق من أن $\{e^{1/e}, e\}$ جزء فائق القوة من $]0,+\infty[$.

السؤال (7) هل يوجد عدد حقيقي $d > e$ بحيث يكون $\{e, d\}$ قويا؟

الجزء 2 : عدد لانهائي من الأجزاء فائقة القوة ذات العنصرين

السؤال (8) ليكن $\alpha > 0$ و$\gamma > 0$. بين أن $\gamma^\alpha > \gamma$ إذا وفقط إذا كان ($\alpha < 1$ و$\gamma < 1$) أو ($\alpha > 1$ و$\gamma > 1$).

السؤال (9) **أجزاء فائقة القوة ذات عنصرين ضمن** $]1,+\infty[$. ليكن $\alpha \in]1, e^{1/e}[$. نعتبر الدالة $f_\alpha : x \mapsto \alpha^x - x$ المعرفة على $[\alpha, +\infty[$.

(أ) بين أن f_α قابلة للاشتقاق على $[\alpha, +\infty[$ واحسب مشتقتها.

(ب) بين أن مشتقة f_α تنعدم مرة واحدة على $]\alpha, +\infty[$ في نقطة x_0 يطلب حسابها بدلالة α. يمكن التحقق من أن $\alpha^\alpha \ln(\alpha) < 1$.

(ج) حدد إشارة $f_\alpha(x_0)$ ثم ضع جدول تغيرات f_α على $[\alpha, +\infty[$.

(د) بين، مع ذكر المبرهنات المستعملة بدقة، أنه يوجد بالضبط عددان حقيقيان β وβ_1 يحققان $\alpha < \beta < x_0 < \beta_1$ بحيث يكون كل من $\{\alpha, \beta\}$ و$\{\alpha, \beta_1\}$ فائق القوة.

السؤال (10) **أجزاء فائقة القوة ذات عنصرين ضمن** $]0,1[$. ليكن $\alpha \in]0,1[$.

(أ) علل أنه إذا كان $\gamma \in]\alpha, 1[$ فإن $\gamma^\alpha \notin \{\alpha, \gamma\}$.

(ب) بين أنه يوجد عدد وحيد $\lambda \in]\alpha, 1[$ بحيث يكون $\{\alpha, \lambda\}$ فائق القوة. يمكن دراسة الدالة $g_\alpha : x \mapsto \alpha^x - x$ على $[\alpha, 1]$.

تعليق. من الأجزاء فائقة القوة : $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$ و$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\}$ و$\{e^{1/e}, e\}$. تتدخل في المعادلة $\alpha^\beta = \beta$ القوة البرجية اللانهائية $x^{x^{x^{\cdots}}}$ التي تتقارب بالضبط من أجل $x \in [e^{-e}, e^{1/e}]$؛ ولهذا تظهر العتبة $e^{1/e} \approx 1{,}4447$.

Problème 13 — Session 2024

Séries absolument convergentes et produit de convolution de deux suites

Problème 2, Partie 3 © 2026 Saad Choukri

Notation. μ désigne la fonction de Möbius : $\mu(1) = 1$, $\mu(m) = (-1)^r$ si m est le produit de r nombres premiers distincts, et $\mu(m) = 0$ si m admet un facteur carré > 1.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). Pour tout entier $m \geq 2$, $\sum_{d|m} \mu(d) = 0$; et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

3.1. **Question (1) Cas des suites à termes positifs.** Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite à termes positifs ; on pose $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

3.1.1. **(a)** Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

3.1.2. **(b)** En déduire que $(U_n)_{n\geq 1}$ est convergente si, et seulement si, elle est majorée.

3.2. **Question (2) Cas des suites à termes quelconques.** Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle ; on pose

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \qquad U'_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|, \qquad U''_n = \sum_{k=1}^{n} \big(|u_k| - u_k\big).$$

3.2.1. **(a)** Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq |u_n| - u_n \leq 2|u_n|$.

3.2.2. **(b)** Montrer que si la suite (U'_n) est convergente, alors il en est de même de (U''_n).

3.2.3. **(c)** En déduire que si (U'_n) est convergente, alors (U_n) l'est aussi.

3.3. **Question (3) Produit de convolution de deux suites.** Pour deux suites réelles $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$, on définit leur produit de convolution $(w_n)_{n\geq 1}$ par $w_n = \sum_{d|n} u_d v_{n/d}$, et on pose

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k, \quad W_n = \sum_{k=1}^{n} w_k, \qquad \mathcal{C}_n = \{1,\dots,n\}^2, \quad \Delta_n = \{(i,j) \in \mathcal{C}_n \mid ij \leq n\}.$$

3.3.1. **(a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n V_n - W_n = \displaystyle\sum_{(i,j)\in \mathcal{C}_n \setminus \Delta_n} u_i v_j$.

3.3.2. **(b)** On suppose ici que (u_n) et (v_n) sont à termes positifs.

(i) **(i)** Vérifier que $\Delta_n \subset \mathcal{C}_n \subset \Delta_{n^2}$ et en déduire que $W_n \leq U_n V_n \leq W_{n^2}$.

(ii) **(ii)** Montrer que si (U_n) et (V_n) convergent, alors (W_n) converge et $\lim W_n = \Big(\lim U_n\Big)\Big(\lim V_n\Big)$.

3.3.3. **(c)** On note (t_n) le produit de convolution des suites $(|u_n|)$ et $(|v_n|)$, et l'on pose $U'_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|$, $V'_n = \sum_{k=1}^{n} |v_k|$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} t_k$. On suppose que (U'_n) et (V'_n) convergent.

(i) **(i)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|U_n V_n - W_n| \leq U'_n V'_n - T_n$.

(ii) **(ii)** Montrer que (U_n), (V_n) et (W_n) convergent et que $\lim W_n = \Big(\lim U_n\Big)\Big(\lim V_n\Big)$.

3.4. **Question (4) Application à la suite $\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k^2}\Big)$.** On considère $u_n = \dfrac{\mu(n)}{n^2}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$, et l'on note (w_n) leur produit de convolution.

3.4.1. **(a)** Montrer que $w_1 = 1$ et que $w_n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

3.4.2. **(b)** Montrer que les suites $\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\Big)_{n\geq 1}$ et $\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k^2}\Big)_{n\geq 1}$ sont convergentes.

3.4.3. **(c)** En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k^2} = \frac{6}{\pi^2}$.

Commentaire. Le produit de Dirichlet de deux séries absolument convergentes converge, et sa somme est le produit des sommes. Appliqué à $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{\mu(n)}{n^2}$, il donne $\sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}$. Ce nombre est aussi la probabilité que deux entiers « pris au hasard » soient premiers entre eux (théorème de Cesàro–Mertens).

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

النسخة العربية
المتسلسلات المتقاربة مطلقا وجداء الالتفاف لمتتاليتين

دورة 2024 ▪ المسألة 2، الجزء 3 ▪ 2026 © سعد شكري

ترميز. μ دالة موبيوس: $\mu(1)=1$، و$\mu(m)=(-1)^r$ إذا كان m جداء r عددا أوليا مختلفا، و$\mu(m)=0$ إذا كان m يقبل قاسما مربعا أكبر من 1.

نتائج مقبولة (مُثبتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). لكل عدد صحيح $m\geq 2$: $\sum_{d|m}\mu(d)=0$؛ و$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

السؤال (1) حالة المتتاليات ذات الحدود الموجبة. لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية حدودها موجبة؛ نضع $U_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$.

(أ) بين أن $(U_n)_{n\geq 1}$ تزايدية.

(ب) استنتج أن $(U_n)_{n\geq 1}$ متقاربة إذا وفقط إذا كانت مكبورة.

السؤال (2) حالة المتتاليات ذات الحدود الكيفية. لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية حقيقية؛ نضع

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,\qquad U'_n=\sum_{k=1}^{n}|u_k|,\qquad U''_n=\sum_{k=1}^{n}\big(|u_k|-u_k\big).$$

(أ) تحقق من أن $0\leq |u_n|-u_n\leq 2|u_n|$ لكل $n\in\mathbb{N}^*$.

(ب) بين أنه إذا كانت (U'_n) متقاربة فإن (U''_n) كذلك.

(ج) استنتج أنه إذا كانت (U'_n) متقاربة فإن (U_n) متقاربة.

السؤال (3) جداء الالتفاف لمتتاليتين. من أجل متتاليتين حقيقيتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و$(v_n)_{n\geq 1}$ نعرف جداء التفافهما $(w_n)_{n\geq 1}$ بـ $w_n=\sum_{d|n}u_d v_{n/d}$ ونضع

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,\quad V_n=\sum_{k=1}^{n}v_k,\quad W_n=\sum_{k=1}^{n}w_k,\qquad \mathcal{C}_n=\{1,\dots,n\}^2,\quad \Delta_n=\{(i,j)\in\mathcal{C}_n\mid ij\leq n\}.$$

(أ) بين أنه لكل $n\in\mathbb{N}^*$: $U_nV_n-W_n=\sum_{(i,j)\in\mathcal{C}_n\setminus\Delta_n}u_iv_j$.

(ب) نفترض هنا أن حدود (u_n) و(v_n) موجبة.

(i) تحقق من أن $\Delta_n\subset\mathcal{C}_n\subset\Delta_{n^2}$ واستنتج أن $W_n\leq U_nV_n\leq W_{n^2}$.

(ii) بين أنه إذا كانت (U_n) و(V_n) متقاربتين فإن (W_n) متقاربة و$\lim W_n=\big(\lim U_n\big)\big(\lim V_n\big)$.

(ج) نرمز بـ (t_n) لجداء التفاف $(|u_n|)$ و$(|v_n|)$، ونضع $U'_n=\sum_{k=1}^{n}|u_k|$ و$V'_n=\sum_{k=1}^{n}|v_k|$. نفترض $T_n=\sum_{k=1}^{n}t_k$. نفترض أن (U'_n) و(V'_n) متقاربتان.

(i) بين أنه لكل $n\in\mathbb{N}^*$: $|U_nV_n-W_n|\leq U'_nV'_n-T_n$.

(ii) بين أن (U_n) و(V_n) و(W_n) متقاربة وأن $\lim W_n=\big(\lim U_n\big)\big(\lim V_n\big)$.

السؤال (4) تطبيق على المتتالية $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu(k)}{k^2}\right)$. نعتبر $u_n=\frac{\mu(n)}{n^2}$ و$v_n=\frac{1}{n^2}$ ونرمز بـ (w_n) لجداء التفافهما.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri ▪ جميع الحقوق محفوظة ▪ يُمنع النسخ أو إعادة النشر دون إذن مسبق من المؤلف

(أ) بين أن $w_1 = 1$ وأن $w_n = 0$ لكل $n \geq 2$.

(ب) بين أن المتتاليتين $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\geq 1}$ و $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k^2}\right)_{n\geq 1}$ متقاربتان.

(ج) استنتج أن $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k^2} = \frac{6}{\pi^2}$.

تعليق. جداء ديريكليه لمتسلسلتين متقاربتين مطلقا متقارب ومجموعه جداء المجموعين. وبتطبيقه على $\sum \frac{1}{n^2}$ و $\sum \frac{\mu(n)}{n^2}$ نحصل على $\sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}$. وهذا العدد هو أيضا احتمال أن يكون عددان صحيحان «مختاران عشوائيا» أوليين فيما بينهما (مبرهنة تشيزارو-ميرتنز).

Problème 14 — Session 2026

Polynômes et nombres de Bernoulli : premières propriétés et racines

Partie 1 et section 2.1 © 2026 Saad Choukri

Notations. On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales réelles et $\mathscr{P}_n$ celles de degré $\leq n$. On admet la formule de Taylor pour les polynômes : si $P \in \mathscr{P}$ est de degré n et $a \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

On considère la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{P}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_0(x) = 1, \qquad B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x) \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = B_n(0)$: c'est le n-ième *nombre de Bernoulli*.

1.1. **Question (1)** Justifier que le système ci-dessus définit bien une unique suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{P}$.

1.2. **Question (2)** Calculer explicitement B_1, B_2, B_3, B_4 ; en déduire b_1, b_2, b_3, b_4.

1.3. **Question (3)** **Degré et coefficients de B_n.**

1.3.1. **(a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est à coefficients rationnels.

1.3.2. **(b)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré de B_n ainsi que son coefficient dominant.

1.4. **Question (4)** Soit $n \geq 2$. Montrer que $B_n(1) = b_n$.

1.5. **Question (5)** **Une relation de symétrie.**

1.5.1. **(a)** Soit $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Montrer que $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$.

1.5.2. **(b)** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_{2n+1} = 0$.

1.6. **Question (6)** **Une formule d'addition.**

1.6.1. **(a)** Soit $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $B_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}(x)$.

1.6.2. **(b)** Montrer que pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, $B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}(x)\, y^k$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

1.6.3. **(c)** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = -\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}b_k$.

1.6.4. **(d)** Montrer que pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, $|B_n(x) - b_n| \leq (|x|+1)^n \max\limits_{k\in\{0,\dots,n-1\}} |b_k|$.

1.7. **Question (7) Formule de Faulhaber.**

1.7.1. **(a)** Montrer que, pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$.

1.7.2. **(b)** Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

(i) **(i)** Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\big(B_{p+1}(n+1) - b_{p+1}\big)$.

(ii) **(ii)** En déduire la formule de Faulhaber : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p+1}{k}b_k\, n^{p+1-k}$.

(iii) **(iii)** Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^5$ en fonction de n.

2.1. **Question (8) Racines de B_n dans le segment $[0,1]$.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

2.1.1. **(a)** Montrer que 0, $\frac{1}{2}$ et 1 sont des racines de B_{2n+1}.

2.1.2. **(b)** On veut montrer que B_{2n+1} admet exactement trois racines distinctes dans $[0,1]$. Raisonnant par l'absurde, on suppose qu'il existe $\alpha \in [0,1] \setminus \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ tel que $B_{2n+1}(\alpha) = 0$.

(i) **(i)** Si $\alpha < \frac{1}{2}$, montrer qu'il existe $\beta, \gamma \in [0,1]$ avec $0 < \beta < \alpha < \gamma < \frac{1}{2}$ tels que $B_{2n}(\beta) = B_{2n}(\gamma) = 0$.

(ii) **(ii)** Si $\alpha > \frac{1}{2}$, montrer qu'il existe $\beta, \gamma \in [0,1]$ avec $0 < \beta < 1-\alpha < \gamma < \frac{1}{2}$ tels que $B_{2n}(\beta) = B_{2n}(\gamma) = 0$.

(iii) **(iii)** Conclure.

2.1.3. **(c)** Montrer que B_{2n} admet exactement deux racines dans le segment $[0,1]$.

Commentaire. Les polynômes de Bernoulli B_n sont unitaires de degré n, à coefficients rationnels, et vérifient $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$. Cette propriété donne la formule de Faulhaber pour les sommes de puissances ; par exemple $\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$. On a $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{6}$, $b_3 = 0$, $b_4 = -\frac{1}{30}$, et $b_{2n+1} = 0$ pour $n \geq 1$.

النسخة العربية

حدوديات وأعداد برنولي : خاصيات أولى وجذور

دورة 2026 ▪ الجزء 1 والفقرة 2.1 © 2026 سعد شكري

ترميز. نرمز بـ $\mathscr{P}$ لمجموعة الدوال الحدودية الحقيقية وبـ $\mathscr{P}_n$ لتلك التي درجتها $\leq n$. نقبل صيغة تايلور للحدوديات : إذا كانت $P \in \mathscr{P}$ من الدرجة n و$a \in \mathbb{R}$ فإن $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

نعتبر المتتالية $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathscr{P}$ المعرفة بـ :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad B_0(x) = 1,\qquad B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x) \quad \text{و} \quad \int_0^1 B_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0,\qquad n \in \mathbb{N}.$$

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

حقوق النسخ محفوظة © 2026 سعد شكري • يمنع منعا باتا نسخ أو توزيع هذا الملف دون إذن كتابي من المؤلف

لكل $n \in \mathbb{N}$ نضع $b_n = B_n(0)$: وهو عدد برنولي ذو الرتبة n.

السؤال (1) علل أن هذه النظمة تعرف فعلا متتالية وحيدة $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathscr{P}$.

السؤال (2) احسب صراحة B_1, B_2, B_3, B_4؛ واستنتج b_1, b_2, b_3, b_4.

السؤال (3) درجة B_n ومعاملاتها.

(أ) بين أن B_n ذات معاملات جذرية لكل $n \in \mathbb{N}$.

(ب) ليكن $n \in \mathbb{N}$. حدد درجة B_n ومعاملها الرئيسي.

السؤال (4) ليكن $n \geq 2$. بين أن $B_n(1) = b_n$.

السؤال (5) علاقة تماثل.

(أ) ليكن $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. بين أن $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$.

(ب) استنتج أن $b_{2n+1} = 0$ لكل $n \in \mathbb{N}^*$.

السؤال (6) صيغة جمع.

(أ) ليكن $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. بين أنه لكل $k \in \{0, \dots, n\}$: $B_n^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}(x)$.

(ب) بين أنه لكل $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ و $n \in \mathbb{N}$: $B_n(x+y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}(x)\, y^k$.

(ج) استنتج أنه لكل $n \in \mathbb{N}^*$: $b_n = -\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k$.

(د) بين أنه لكل $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$: $|B_n(x) - b_n| \leq (|x|+1)^n \max\limits_{k\in\{0,\dots,n-1\}} |b_k|$.

السؤال (7) صيغة فولهابر.

(أ) بين أنه لكل $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$: $B_n(x+1) - B_n(x) = n x^{n-1}$.

(ب) ليكن $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

(i) بين أن $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\left(B_{p+1}(n+1) - b_{p+1}\right)$.

(ii) استنتج صيغة فولهابر : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p+1}{k} b_k\, n^{p+1-k}$.

(iii) احسب المجموع $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^5$ بدلالة n.

السؤال (8) جذور B_n في القطعة $[0,1]$. ليكن $n \in \mathbb{N}^*$.

(أ) بين أن 0 و $\frac{1}{2}$ و 1 جذور للحدودية B_{2n+1}.

(ب) نريد أن نبين أن B_{2n+1} تقبل بالضبط ثلاثة جذور مختلفة في $[0,1]$. بالخلف، نفترض أنه يوجد $\alpha \in [0,1] \setminus \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ بحيث $B_{2n+1}(\alpha) = 0$.

(i) إذا كان $\alpha < \frac{1}{2}$، بين أنه يوجد $\beta, \gamma \in [0,1]$ مع $0 < \beta < \alpha < \gamma < \frac{1}{2}$ بحيث $B_{2n}(\beta) = B_{2n}(\gamma) = 0$.

(ii) إذا كان $\alpha > \frac{1}{2}$، بين أنه يوجد $\beta, \gamma \in [0,1]$ مع $0 < \beta < 1-\alpha < \gamma < \frac{1}{2}$ بحيث $B_{2n}(\beta) = B_{2n}(\gamma) = 0$.

(iii) استنتج.

(ج) بين أن B_{2n} تقبل بالضبط جذرين في القطعة $[0,1]$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

تعليق. حدوديات برنولي B_n واحدية من الدرجة n ذات معاملات جذرية، وتحقق $B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}$. هذه الخاصية تعطي صيغة فولهابر لمجاميع القوى؛ مثلا $\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$ ولدينا $b_1=-\frac{1}{2}$ و$b_2=\frac{1}{6}$ و$b_3=0$، و$b_4=-\frac{1}{30}$ و$b_{2n+1}=0$ من أجل $n\geq 1$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

Problème 15 — Session 2015

Inégalités de Kolmogorov entre normes uniformes des dérivées successives

Problème, Partie 4 © 2026 Saad Choukri

Notations. Si $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est bornée, $\|g\|_\infty=\sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)|$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{F}_n$ désigne l'ensemble des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ telles que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. Le but est de montrer que $\mathcal{F}_n\subset\mathcal{F}_k$ pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$ et de majorer $M_k=\|f^{(k)}\|_\infty$ en fonction de $M_0=\|f\|_\infty$ et $M_n=\|f^{(n)}\|_\infty$.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). Inégalité de Taylor–Lagrange (voir le problème « Formule de Taylor avec reste intégral »); pour $f\in\mathcal{F}_2$ non constante, $\|f'\|_\infty\leq\sqrt{2\|f\|_\infty\|f''\|_\infty}$; et pour tout $m\in\mathbb{N}$ et tout $k\in\{0,\dots,m\}$:

$$\sum_{p=0}^{m}(-1)^p p^k\binom{m}{p}=(-1)^m\,m!\,\delta_{km}. \tag{6}$$

Soit $n\geq 2$ et f une fonction non constante de $\mathcal{F}_n$; on pose $M_0=\|f\|_\infty$ et $M_n=\|f^{(n)}\|_\infty$.

4.1. **Question (1)** Soient $x\in\mathbb{R}$ et $h>0$. À l'aide de l'inégalité de Taylor–Lagrange, montrer que

$$\left|\sum_{j=1}^{n-1}\frac{h^j}{j!}f^{(j)}(x)\right|\leq 2M_0+\frac{M_n h^n}{n!}. \tag{7}$$

4.2. **Question (2)** En utilisant l'inégalité (7) pour $h\in\{1,\dots,n-1\}$ et la formule (6), montrer qu'il existe deux réels $C_1>0$ et $C_2>0$ tels que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad |f^{(n-1)}(x)|\leq C_1M_n+C_2M_0.$$

4.3. **Question (3)** Montrer que $f^{(k)}$ est bornée pour tout $k\in\{0,\dots,n-1\}$; autrement dit, $\mathcal{F}_n\subset\mathcal{F}_k$ pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$.

4.4. **Question (4)** On pose $M_k=\|f^{(k)}\|_\infty$ pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$.

4.4.1. **(a)** Montrer que $M_k>0$ pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$, et que $M_k\leq\sqrt{2M_{k-1}M_{k+1}}$ pour tout $k\in\{1,\dots,n-1\}$.

4.4.2. **(b)** Montrer que pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$,

$$M_k\leq 2^{k(n-k)/2}M_0^{1-k/n}M_n^{k/n}.$$

Cette majoration est-elle la meilleure possible ?

Indication : on pourra poser $a_k = 2^{k-1}\dfrac{M_k}{M_{k-1}}$ *pour* $1 \le k \le n$, *et montrer que* $a_1 \le \cdots \le a_n$ *et que* $(a_1 \cdots a_k)^n \le (a_1 \cdots a_n)^k$ *pour tout* $k \in \{1, \ldots, n\}$.

N.B. : l'original écrit $2^{k(n-l)/2}$ et « $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ » en 4.4.1, ainsi que $E_n \subset E_k$; ces coquilles sont corrigées. La majoration a été vérifiée à partir de l'indication : $a_1 \cdots a_k = 2^{k(k-1)/2} M_k / M_0$.

Commentaire. C'est une version de l'inégalité de Kolmogorov (1939) : si f et $f^{(n)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$, toutes les dérivées intermédiaires le sont, et $M_k \le 2^{k(n-k)/2} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}$. Les exposants $1 - k/n$ et k/n sont imposés par homogénéité (changement de variable $x \mapsto \lambda x$) ; les constantes optimales, calculées par Kolmogorov, sont plus petites.

النسخة العربية

متفاوتات من نوع كولموغوروف بين المعايير المنتظمة للمشتقات المتتالية

دورة 2015 ▪ المسألة، الجزء 4 ▪ 2026 © سعد شكري

ترميز. إذا كانت $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ محدودة نضع $\|g\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|$. لكل $n \in \mathbb{N}^*$ نرمز بـ $\mathcal{F}_n$ لمجموعة الدوال $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ من الصنف $\mathcal{C}^n$ بحيث f و$f^{(n)}$ محدودتان على $\mathbb{R}$. الهدف إثبات أن $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_k$ لكل $k \in \{1, \ldots, n\}$ وإعطاء مكبور لـ $M_k = \|f^{(k)}\|_\infty$ بدلالة $M_0 = \|f\|_\infty$ و$M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$.

نتائج مقبولة (مُثبَتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). متفاوتة تايلور-لاغرانج؛ من أجل $f \in \mathcal{F}_2$ غير ثابتة : $\|f'\|_\infty \le \sqrt{2\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}$؛ ولكل $m \in \mathbb{N}$ ولكل $k \in \{0, \ldots, m\}$:

$$\sum_{p=0}^{m} (-1)^p p^k \binom{m}{p} = (-1)^m\, m!\, \delta_{km}. \tag{6}$$

ليكن $n \ge 2$ وf دالة غير ثابتة من $\mathcal{F}_n$؛ نضع $M_0 = \|f\|_\infty$ و$M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$.

السؤال (1) ليكن $x \in \mathbb{R}$ و$h > 0$. باستعمال متفاوتة تايلور-لاغرانج، بين أن

$$\left| \sum_{j=1}^{n-1} \frac{h^j}{j!} f^{(j)}(x) \right| \le 2M_0 + \frac{M_n h^n}{n!}. \tag{7}$$

السؤال (2) باستعمال المتفاوتة (7) من أجل $h \in \{1, \ldots, n-1\}$ والصيغة (6)، بين أنه يوجد عددان حقيقيان $C_1 > 0$ و$C_2 > 0$ بحيث

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f^{(n-1)}(x)| \le C_1 M_n + C_2 M_0.$$

السؤال (3) بين أن $f^{(k)}$ محدودة لكل $k \in \{0, \ldots, n-1\}$؛ أي أن $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_k$ لكل $k \in \{1, \ldots, n\}$.

السؤال (4) نضع $M_k = \|f^{(k)}\|_\infty$ لكل $k \in \{0, \ldots, n\}$.

(أ) بين أن $M_k > 0$ لكل $k \in \{0, \ldots, n\}$، وأن $M_k \le \sqrt{2M_{k-1}M_{k+1}}$ لكل $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

(ب) بين أنه لكل $k \in \{0, \ldots, n\}$:

$$M_k \le 2^{k(n-k)/2} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}.$$

هل هذا المكبور أفضل ما يمكن؟

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

إرشاد : يمكن وضع $a_k = 2^{k-1}\dfrac{M_k}{M_{k-1}}$ من أجل $1 \le k \le n$، وإثبات أن $a_1 \le \cdots \le a_n$ وأن $(a_1 \cdots a_k)^n \le (a_1 \cdots a_n)^k$ لكل $k \in \{1, \ldots, n\}$.

ملاحظة : يكتب الأصل $2^{k(n-l)/2}$ و« $k \in \{0, \ldots, n-1\}$» في 4.4.1 و$E_k \subset E_n$؛ وقد صححت هذه الأخطاء. وتم التحقق من المكبور انطلاقا من الإرشاد : $a_1 \cdots a_k = 2^{k(k-1)/2} M_k / M_0$.

تعليق. هذه صيغة لمتفاوتة كولموغوروف (1939) : إذا كانت f و$f^{(n)}$ محدودتين على $\mathbb{R}$ فإن جميع المشتقات الوسيطة محدودة، و$M_k \le 2^{k(n-k)/2} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}$. الأسس k/n و$1-k/n$ تفرضها المتجانسة (تغيير المتغير $x \mapsto \lambda x$)؛ أما الثوابت المثلى التي حسبها كولموغوروف فهي أصغر.

Problème 16 — Session 2020

Doublement d'angle : les systèmes $S(n,k)$ et les orbites périodiques confinées

Définitions, Parties 1, 2 et 3 © 2026 Saad Choukri

Définitions et notations.

- Si $a \in \mathbb{R}$, on note $a\mathbb{Z} = \{ka \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Pour $n, k \in \mathbb{N}^*$, $n \wedge k$ désigne leur pgcd et φ l'indicatrice d'Euler. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x ; on rappelle que $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
- **Réduction modulo un réel.** Si $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $x \bmod a$ l'unique réel $r \in [0, a[$ tel que $x - r \in a\mathbb{Z}$. Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, on note $A \bmod 2 = \{x \bmod 2 \mid x \in A\}$.
- **Vocabulaire géométrique.** On pose $\Gamma = [0, 2[$, que l'on identifie au cercle unité $\mathbb{U}$ par la bijection $t \mapsto e^{i\pi t}$. Si $0 \le x < y < 2$, les deux *arcs fermés* de Γ d'extrémités x et y sont $[x, y]$, de longueur $y - x$, et $[0, x] \cup [y, 2[= [y, 2 + x] \bmod 2$, de longueur $2 + x - y$. Si $x \in \Gamma$, le demi-cercle fermé d'origine x est l'arc $[x, x + 1] \bmod 2$, et le point diamétralement opposé à x est $(x + 1) \bmod 2$.
- **Doublement d'angle.** On définit $\sigma : \Gamma \to \Gamma$, $x \mapsto (2x) \bmod 2$: ainsi $\sigma(x) = 2x$ si $x \in [0, 1[$ et $\sigma(x) = 2x - 2$ si $x \in [1, 2[$ (sur le cercle $\mathbb{U}$, c'est l'application $z \mapsto z^2$). On pose $\sigma^0 = \mathrm{Id}_\Gamma$ et $\sigma^n = \sigma \circ \sigma^{n-1}$; l'*orbite* de x est $\mathcal{O}(x) = \{\sigma^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$. S'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^r(x) = x$, alors $\mathcal{O}(x)$ est finie, de cardinal $p = \min\{m \in \mathbb{N}^* \mid \sigma^m(x) = x\}$, et l'on dit que c'est une *orbite périodique d'ordre* p.
- **Partie confinée.** Une partie non vide A de Γ est dite *confinée* si elle est stable par σ ($\sigma(A) \subset A$) et contenue dans un arc fermé de Γ de longueur < 1.
- **Le système $S(n,k)$.** Pour $n \ge 2$ et $1 \le k \le n-1$, on considère le système de n équations linéaires à n inconnues réelles $x_0, \ldots, x_{n-1}$:

$$S(n,k) : \quad \begin{cases} 2x_i - 2 = x_{n-(k-i)} & \text{si } i \in \{0, \ldots, k-1\}, \\ 2x_i = x_{i-k} & \text{si } i \in \{k, \ldots, n-1\}. \end{cases}$$

L'objectif est d'étudier les parties de Γ stables par σ et contenues dans un arc de longueur < 1, à l'aide des systèmes $S(n,k)$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

Partie 1 : un premier exemple

1.1. **Question (1) Étude du système $S(3,1)$.**

1.1.1. **(a)** Écrire le système $S(3,1)$ et montrer qu'il admet une unique solution $\left(x_0^{(3,1)}, x_1^{(3,1)}, x_2^{(3,1)}\right)$, à préciser.

1.1.2. **(b)** Vérifier que $0 < x_2^{(3,1)} < x_1^{(3,1)} < 1 < x_0^{(3,1)} < 2$, et que $\left\{x_0^{(3,1)}, x_1^{(3,1)}, x_2^{(3,1)}\right\}$ est une orbite périodique d'ordre 3 confinée.

Partie 2 : étude du système $S(n,k)$ dans le cas général

Soient $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n-1$. On pose, pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$,

$$x_i^{(n,k)} = \frac{1}{1-2^{-n}} \sum_{s=0}^{k-1} 2^{-\lfloor \frac{ns+i}{k} \rfloor}.$$

2.2. **Question (2) Majorations.**

2.2.3. **(a)** Montrer que $x_0^{(n,k)} < 2$.

2.2.4. **(b)** Montrer que $x_k^{(n,k)} < 1$.

2.3. **Question (3) Étude du cas où $n \wedge k = d \geq 2$.**

2.3.1. **(a)** Soient $i \in \{0, \ldots, d-1\}$ et $s \in \{0, \ldots, k-1\}$; on pose $r_s = (ns) \bmod k$. Montrer que $0 \leq i + r_s \leq k-1$.

2.3.2. **(b)** En déduire que $x_0^{(n,k)} = x_1^{(n,k)} = \cdots = x_{d-1}^{(n,k)}$.

2.4. **Question (4) Existence d'une solution du système $S(n,k)$.**

2.4.1. **(a)** Montrer que pour tout $i \in \{k, \ldots, n-1\}$, $2x_i^{(n,k)} = x_{i-k}^{(n,k)}$.

2.4.2. **(b)** Montrer que pour tout $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, $2x_i^{(n,k)} = 2 + x_{n+i-k}^{(n,k)}$. *On pourra justifier que* $\lfloor \frac{i-k}{k} \rfloor = -1$ *et* $\lfloor \frac{nk+i-k}{k} \rfloor = n-1$, *puis utiliser une réindexation.*

2.4.3. **(c)** Que dire de $\left(x_0^{(n,k)}, \ldots, x_{n-1}^{(n,k)}\right)$ vis-à-vis du système $S(n,k)$?

2.5. **Question (5) Unicité de la solution du système $S(n,k)$.** On considère le système linéaire homogène

$$H(n,k) : \begin{cases} 2z_i = z_{n-(k-i)} & \text{si } i \in \{0, \ldots, k-1\}, \\ 2z_i = z_{i-k} & \text{si } i \in \{k, \ldots, n-1\}. \end{cases}$$

2.5.1. **(a)** Vérifier que $H(n,k)$ se traduit par les n équations $2z_i = z_{(i-k) \bmod n}$, $0 \leq i \leq n-1$.

2.5.2. **(b)** Soit $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Vérifier que $4z_i = z_{(i-2k) \bmod n}$ et montrer plus généralement que $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ 2^m z_i = z_{(i-mk) \bmod n}$.

2.5.3. **(c)** Résoudre le système $H(n,k)$.

2.5.4. **(d)** Conclure quant à l'unicité de la solution du système $S(n,k)$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

Partie 3 : construction d'orbites périodiques confinées

On suppose désormais $n \wedge k = 1$ et, le cas $k = 1$ étant élémentaire, $k \geq 2$ (donc $n \geq 3$). Il est clair que les réels $x_i^{(n,k)}$ sont strictement positifs.

3.1. **Question (6) Calcul de $\ell = x_0^{(n,k)} - x_{n-1}^{(n,k)}$.**

3.1.1. **(a)** Montrer que pour tout $s \in \{1, \ldots, k-1\}$, $\lfloor \frac{ns}{k} \rfloor = \lfloor \frac{ns-1}{k} \rfloor$. *On pourra effectuer la division euclidienne de ns par k.*

3.1.2. **(b)** En déduire que $\ell = \dfrac{2^n - 2}{2^n - 1}$.

3.2. **Question (7) La suite $\left(x_i^{(n,k)}\right)_{0 \leq i \leq n-1}$ est strictement décroissante.**

3.2.1. **(a)** Montrer que l'application $s \mapsto (ns) \bmod k$ est une bijection de $\{0, \ldots, k-1\}$ sur lui-même.

3.2.2. **(b)** Soit $i \in \{0, \ldots, n-2\}$. Montrer qu'il existe $s_i \in \{0, \ldots, k-1\}$ tel que $\lfloor \frac{ns_i+i}{k} \rfloor < \lfloor \frac{ns_i+i+1}{k} \rfloor$.

3.2.3. **(c)** Établir la stricte décroissance de la suite $\left(x_i^{(n,k)}\right)_{0 \leq i \leq n-1}$.

3.3. **Question (8) Des orbites périodiques d'ordre n confinées.**

3.3.1. **(a)** Justifier que $0 < x_{n-1}^{(n,k)} < \cdots < x_k^{(n,k)} < 1 < x_{k-1}^{(n,k)} < \cdots < x_0^{(n,k)} < 2$.

3.3.2. **(b)** Montrer que $\left\{x_0^{(n,k)}, x_1^{(n,k)}, \ldots, x_{n-1}^{(n,k)}\right\}$ est une orbite périodique d'ordre n confinée.

3.3.3. **(c)** Combien d'orbites périodiques d'ordre n confinées peut-on obtenir de cette manière ?

N.B. : le sujet numérisé dont nous disposons ne contient pas la page 3 (fin de la partie 1, études de quatre autres systèmes particuliers, et début de la partie 2 jusqu'à la question 2.2.2) ; la définition des réels $x_i^{(n,k)}$, donnée au début de la partie 3 de l'original, a été placée en tête de la partie 2. On a vérifié (calcul exact pour $n \leq 8$) que ces réels sont bien solutions de $S(n,k)$ et que $\ell = \frac{2^n-2}{2^n-1}$ lorsque $n \wedge k = 1$.

Commentaire. Le doublement d'angle $z \mapsto z^2$ sur le cercle est le modèle le plus simple de dynamique chaotique. Les systèmes linéaires $S(n,k)$ fournissent explicitement, pour $n \wedge k = 1$, une orbite périodique d'ordre n contenue dans un demi-cercle ouvert ; leurs points sont des rationnels de dénominateur $2^n - 1$, et l'arc qui les contient a pour longueur $\frac{2^n-2}{2^n-1}$.

النسخة العربية

مضاعفة الزاوية : النظمات $S(n,k)$ والمدارات الدورية المحصورة

دورة 2020 ▪ تعاريف والأجزاء 1 و2 و3 ▪ 2026 © سعد شكري

تعاريف وترميزات.

– إذا كان $a \in \mathbb{R}$ نضع $a\mathbb{Z} = \{ka \mid k \in \mathbb{Z}\}$. من أجل $n, k \in \mathbb{N}^*$ نرمز بـ $n \wedge k$ لقاسمهما المشترك الأكبر وبـ φ لدالة أولر المميزة. من أجل $x \in \mathbb{R}$، $\lfloor x \rfloor$ الجزء الصحيح لـ x؛ ونذكر بأن $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$ لكل $k \in \mathbb{Z}$.

– **الاختزال بترديد عدد حقيقي.** إذا كان $a > 0$ و$x \in \mathbb{R}$ نرمز بـ $x \bmod a$ للعدد الحقيقي الوحيد $r \in [0, a[$ بحيث $x - r \in a\mathbb{Z}$. وإذا كان A جزءا غير فارغ من $\mathbb{R}$ نضع $A \bmod 2 = \{x \bmod 2 \mid x \in A\}$.

– **مصطلحات هندسية.** نضع $\Gamma = [0, 2[$ ونطابقه مع الدائرة الأحادية $\mathbb{U}$ بواسطة التقابل $t \mapsto e^{i\pi t}$. إذا كان $0 \leq x < y < 2$ فإن القوسين المغلقين من Γ اللذين طرفاهما x وy هما $[x, y]$ وطوله $y - x$، و$[0, x] \cup [y, 2[= [y, 2 + x] \bmod 2$ وطوله $2 + x - y$. إذا كان $x \in \Gamma$ فإن نصف الدائرة المغلق الذي أصله x هو القوس $[x, x+1] \bmod 2$، والنقطة المقابلة قطريا لـ x هي $(x+1) \bmod 2$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

- **مضاعفة الزاوية.** نعرف $\sigma : \Gamma \to \Gamma$، $x \mapsto (2x) \bmod 2$ أي: $\sigma(x) = 2x$ إذا كان $x \in [0,1[$ و$\sigma(x) = 2x - 2$ إذا كان $x \in [1,2[$ (وهو على الدائرة $\mathbb{U}$ التطبيق $z \mapsto z^2$). نضع $\sigma^0 = \mathrm{Id}_\Gamma$ و$\sigma^n = \sigma \circ \sigma^{n-1}$؛ مدار x هو $\mathcal{O}(x) = \{\sigma^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$. إذا وجد $r \in \mathbb{N}^*$ بحيث $\sigma^r(x) = x$ فإن $\mathcal{O}(x)$ منته عدد عناصره $p = \min\{m \in \mathbb{N}^* \mid \sigma^m(x) = x\}$، ونقول إنه مدار دوري من الرتبة p.
- **جزء محصور.** نقول إن جزءا غير فارغ A من Γ محصور إذا كان مستقرا بـ σ ($\sigma(A) \subset A$) ومحتوى في قوس مغلق من Γ طوله أصغر قطعا من 1.
- **النظمة** $S(n,k)$. من أجل $n \geq 2$ و$1 \leq k \leq n-1$ نعتبر نظمة n معادلة خطية ذات n مجهولا حقيقيا $x_0, \ldots, x_{n-1}$:

$$S(n,k) : \begin{cases} 2x_i - 2 = x_{n-(k-i)} & i \in \{0, \ldots, k-1\}, \\ 2x_i = x_{i-k} & i \in \{k, \ldots, n-1\}. \end{cases}$$

الهدف هو دراسة أجزاء Γ المستقرة بـ σ والمحتواة في قوس طوله أصغر من 1، باستعمال النظمات $S(n,k)$.

الجزء 1 : مثال أول

السؤال (1) دراسة النظمة $S(3,1)$.

(أ) اكتب النظمة $S(3,1)$ وبين أنها تقبل حلا وحيدا $\left(x_0^{(3,1)}, x_1^{(3,1)}, x_2^{(3,1)}\right)$ يطلب تحديده.

(ب) تحقق من أن $0 < x_2^{(3,1)} < x_1^{(3,1)} < 1 < x_0^{(3,1)} < 2$، وأن $\left\{x_0^{(3,1)}, x_1^{(3,1)}, x_2^{(3,1)}\right\}$ مدار دوري محصور من الرتبة 3.

الجزء 2 : دراسة النظمة $S(n,k)$ في الحالة العامة

ليكن $n \geq 2$ و$1 \leq k \leq n-1$. نضع، من أجل $i \in \{0, \ldots, n-1\}$،

$$x_i^{(n,k)} = \frac{1}{1-2^{-n}} \sum_{s=0}^{k-1} 2^{-\lfloor \frac{ns+i}{k} \rfloor}.$$

السؤال (2) مكبورات.

(أ) بين أن $x_0^{(n,k)} < 2$.

(ب) بين أن $x_k^{(n,k)} < 1$.

السؤال (3) حالة $n \wedge k = d \geq 2$.

(أ) ليكن $i \in \{0, \ldots, d-1\}$ و$s \in \{0, \ldots, k-1\}$؛ نضع $r_s = (ns) \bmod k$. بين أن $0 \leq i + r_s \leq k-1$.

(ب) استنتج أن $x_0^{(n,k)} = x_1^{(n,k)} = \cdots = x_{d-1}^{(n,k)}$.

السؤال (4) وجود حل للنظمة $S(n,k)$.

(أ) بين أنه لكل $i \in \{k, \ldots, n-1\}$: $2x_i^{(n,k)} = x_{i-k}^{(n,k)}$.

(ب) بين أنه لكل $i \in \{0, \ldots, k-1\}$: $2x_i^{(n,k)} = 2 + x_{n+i-k}^{(n,k)}$. يمكن تعليل أن $\lfloor \frac{i-k}{k} \rfloor = -1$ و$\lfloor \frac{nk+i-k}{k} \rfloor = n-1$ ثم إعادة الترقيم.

(ج) ماذا تستنتج بخصوص $\left(x_0^{(n,k)}, \ldots, x_{n-1}^{(n,k)}\right)$ إزاء النظمة $S(n,k)$؟

السؤال (5) وحدانية حل النظمة $S(n,k)$. نعتبر النظمة الخطية المتجانسة

$$H(n,k) : \begin{cases} 2z_i = z_{n-(k-i)} & i \in \{0, \ldots, k-1\}, \\ 2z_i = z_{i-k} & i \in \{k, \ldots, n-1\}. \end{cases}$$

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri

(أ) تحقق من أن $H(n,k)$ تترجم بالمعادلات الـ n : $2z_i = z_{(i-k) \bmod n}$، $0 \leq i \leq n-1$.

(ب) ليكن $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. تحقق من أن $4z_i = z_{(i-2k) \bmod n}$ وبين بصفة عامة أن $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ 2^m z_i = z_{(i-mk) \bmod n}$.

(ج) حل النظمة $H(n,k)$.

(د) استنتج وحدانية حل النظمة $S(n,k)$.

الجزء 3 : إنشاء مدارات دورية محصورة

نفترض من الآن أن $n \wedge k = 1$، وبما أن الحالة $k = 1$ بسيطة نفترض أن $k \geq 2$ (وبالتالي $n \geq 3$). من الواضح أن الأعداد $x_i^{(n,k)}$ موجبة قطعا.

السؤال (6) حساب $\ell = x_0^{(n,k)} - x_{n-1}^{(n,k)}$.

(أ) بين أنه لكل $s \in \{1, \ldots, k-1\}$: $\lfloor \frac{ns}{k} \rfloor = \lfloor \frac{ns-1}{k} \rfloor$. يمكن إنجاز القسمة الأقليدية لـ ns على k.

(ب) استنتج أن $\ell = \dfrac{2^n - 2}{2^n - 1}$.

السؤال (7) المتتالية $\left(x_i^{(n,k)}\right)_{0 \leq i \leq n-1}$ **تناقصية قطعا.**

(أ) بين أن التطبيق $s \mapsto (ns) \bmod k$ تقابل من $\{0, \ldots, k-1\}$ نحو نفسها.

(ب) ليكن $i \in \{0, \ldots, n-2\}$. بين أنه يوجد $s_i \in \{0, \ldots, k-1\}$ بحيث $\lfloor \frac{ns_i+i}{k} \rfloor < \lfloor \frac{ns_i+i+1}{k} \rfloor$.

(ج) أثبت التناقص القطعي للمتتالية $\left(x_i^{(n,k)}\right)_{0 \leq i \leq n-1}$.

السؤال (8) مدارات دورية محصورة من الرتبة n.

(أ) علل أن $0 < x_{n-1}^{(n,k)} < \cdots < x_k^{(n,k)} < 1 < x_{k-1}^{(n,k)} < \cdots < x_0^{(n,k)} < 2$.

(ب) بين أن $\left\{x_0^{(n,k)}, x_1^{(n,k)}, \ldots, x_{n-1}^{(n,k)}\right\}$ مدار دوري محصور من الرتبة n.

(ج) كم مدارا دوريا محصورا من الرتبة n يمكن الحصول عليه بهذه الطريقة؟

ملاحظة : النسخة الممسوحة المتوفرة لدينا ينقصها الصفحة 3 (نهاية الجزء 1 ودراسة أربع نظمات خاصة أخرى وبداية الجزء 2 حتى السؤال 2.2.2)؛ وقد نُقل تعريف الأعداد $x_i^{(n,k)}$ الوارد في بداية الجزء 3 من الأصل، إلى بداية الجزء 2. وتحققنا (حسابا مضبوطا من أجل $n \leq 8$) من أن هذه الأعداد حل للنظمة $S(n,k)$ وأن $\ell = \frac{2^n-2}{2^n-1}$ عندما $n \wedge k = 1$.

تعليق. مضاعفة الزاوية $z \mapsto z^2$ على الدائرة أبسط نموذج لديناميك فوضوي. تعطي النظمات الخطية $S(n,k)$ صراحة، من أجل $n \wedge k = 1$، مدارا دوريا من الرتبة n محتوى في نصف دائرة مفتوح؛ نقطه أعداد جذرية مقامها $2^n - 1$، وطول القوس الذي يحتويها $\frac{2^n-2}{2^n-1}$.

Problème 17 — Session 2022

Parties puissantes de $]0, +\infty[$: classification complète

Problème 3, Partie 3 © 2026 Saad Choukri

Définitions. Une partie finie $\mathscr{C}$ de $]0, +\infty[$ est *puissante* si $\operatorname{Card}\mathscr{C} \geq 2$ et si pour tous $a \neq b$ dans $\mathscr{C}$, $a^b \in \mathscr{C}$ ou $b^a \in \mathscr{C}$; elle est *super-puissante* si de plus $1 \notin \mathscr{C}$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). Pour $\alpha, \gamma > 0$: $\gamma^\alpha > \gamma$ si et seulement si ($\alpha < 1$ et $\gamma < 1$) ou ($\alpha > 1$ et $\gamma > 1$).

3.1. **Question (1)** Soit $\mathscr{C} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ une partie puissante à $m \geq 3$ éléments. On suppose que $1 \in \mathscr{C}$ et on pose $\mathscr{C}' = \mathscr{C} \setminus \{1\}$. Montrer que $\mathscr{C}'$ est une partie super-puissante formée de $m-1$ réels.

3.2. **Question (2) Un premier résultat important.** Soit $\mathscr{C} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ une partie super-puissante à $n \geq 3$ éléments, ordonnés par $a_1 > a_2 > \cdots > a_n$.

3.2.1. **(a)** On suppose qu'il existe $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $a_1 > \cdots > a_k > 1 > a_{k+1} > \cdots > a_n$. Montrer que $a_n^{a_k} < a_n$ et que $1 < a_k^{a_n} < a_k$, puis aboutir à une contradiction.

3.2.2. **(b)** En déduire que $\mathscr{C} \subset]0,1[$ ou $\mathscr{C} \subset]1, +\infty[$.

3.2.3. **(c)** Montrer que pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $\{1, \ldots, n\}$, $a_i^{a_j} > a_i$.

3.3. **Question (3) Un deuxième résultat important.** Soit $n \geq 3$ et $\mathscr{C} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ une partie super-puissante avec $a_1 > \cdots > a_n$. Pour $p \in \{2, \ldots, n\}$, on pose $\mathscr{C}_p = \{a_1, \ldots, a_p\}$.

3.3.1. **(a)** Montrer que $\mathscr{C}_{n-1} = \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ est une partie super-puissante.

3.3.2. **(b)** Montrer que pour tout $p \in \{2, \ldots, n-1\}$, $\mathscr{C}_p$ est une partie super-puissante.

3.4. **Question (4) L'unique partie super-puissante à trois éléments.** Soit $\mathscr{C} = \{a_1, a_2, a_3\}$ une partie super-puissante avec $a_1 > a_2 > a_3$.

3.4.1. **(a)** Montrer que $a_2^{a_1} = a_1$.

3.4.2. **(b)** Montrer que $a_3^{a_1} \in \{a_1, a_2\}$, puis justifier que $a_3^{a_1} = a_2$.

3.4.3. **(c)** Montrer que $a_3^{a_2} \in \{a_1, a_2\}$, puis en déduire que $a_3^{a_2} = a_1$.

3.4.4. **(d)** Montrer que $a_1^2 = a_2$, puis en déduire que $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{4}$ et $a_3 = \frac{1}{16}$.

3.5. **Question (5) Il n'existe pas de partie super-puissante à quatre éléments.** Soit $\mathscr{C} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ une partie super-puissante avec $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$.

3.5.1. **(a)** Montrer que $a_4^{a_1} = a_3$.

3.5.2. **(b)** En déduire que $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{16}$ et $a_4 = \frac{1}{256}$.

3.5.3. **(c)** Trouver une contradiction, puis conclure qu'il n'existe aucune partie super-puissante à quatre éléments.

3.6. **Question (6)** Montrer qu'il n'existe aucune partie super-puissante à n éléments, avec $n \geq 4$.

3.7. **Question (7)** Déterminer toutes les parties puissantes à n éléments, avec $n \geq 4$.

3.8. **Question (8)** Combien d'éléments une partie puissante peut-elle avoir ?

Commentaire. Classification complète : il n'existe qu'une partie super-puissante à trois éléments, $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\}$, aucune à quatre éléments ou plus ; par suite, une partie puissante a au plus 4 éléments, et la seule à quatre éléments est $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\}$. Le point clé est que $a_i^{a_j} > a_i$ force une structure très rigide.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

النسخة العربية

الأجزاء القوية من $]0,+\infty[$: التصنيف الكامل

دورة 2022 ▪ المسألة 3، الجزء 3 ▪ © 2026 سعد شكري

تعاريف. جزء منته $\mathscr{C}$ من $]0,+\infty[$ قوي إذا كان $\operatorname{Card}\mathscr{C}\geq 2$ وكان لكل $a\neq b$ من $\mathscr{C}$: $a^b\in\mathscr{C}$ أو $b^a\in\mathscr{C}$؛ وهو فائق القوة إذا كان علاوة على ذلك $1\notin\mathscr{C}$.

نتائج مقبولة (مُثبتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). من أجل $\alpha,\gamma>0$: $\gamma^\alpha>\gamma$ إذا وفقط إذا كان ($\alpha<1$ و$\gamma<1$) أو ($\alpha>1$ و$\gamma>1$).

السؤال (1) ليكن $\mathscr{C}=\{a_1,\dots,a_m\}$ جزءا قويا ذا $m\geq 3$ عناصر. نفترض أن $1\in\mathscr{C}$ ونضع $\mathscr{C}'=\mathscr{C}\setminus\{1\}$. بين أن $\mathscr{C}'$ جزء فائق القوة مكون من $m-1$ عددا.

السؤال (2) نتيجة أولى مهمة. ليكن $\mathscr{C}=\{a_1,\dots,a_n\}$ جزءا فائق القوة ذا $n\geq 3$ عناصر مرتبة كما يلي $a_1>a_2>\cdots>a_n$.

(أ) نفترض أنه يوجد $k\in\{1,\dots,n-1\}$ بحيث $a_1>\cdots>a_k>1>a_{k+1}>\cdots>a_n$. بين أن $a_n^{a_k}<a_n$ وأن $1<a_k^{a_n}<a_k$، ثم استنتج تناقضا.

(ب) استنتج أن $\mathscr{C}\subset]1,+\infty[$ أو $\mathscr{C}\subset]0,1[$.

(ج) بين أنه لكل زوج (i,j) من العناصر المختلفة من $\{1,\dots,n\}$: $a_i^{a_j}>a_i$.

السؤال (3) نتيجة ثانية مهمة. ليكن $n\geq 3$ و$\mathscr{C}=\{a_1,\dots,a_n\}$ جزءا فائق القوة مع $a_1>\cdots>a_n$. لكل $p\in\{2,\dots,n\}$ نضع $\mathscr{C}_p=\{a_1,\dots,a_p\}$.

(أ) بين أن $\mathscr{C}_{n-1}=\{a_1,\dots,a_{n-1}\}$ فائق القوة.

(ب) بين أنه لكل $p\in\{2,\dots,n-1\}$ الجزء $\mathscr{C}_p$ فائق القوة.

السؤال (4) الجزء الوحيد فائق القوة ذو ثلاثة عناصر. ليكن $\mathscr{C}=\{a_1,a_2,a_3\}$ فائق القوة مع $a_1>a_2>a_3$.

(أ) بين أن $a_2^{a_1}=a_1$.

(ب) بين أن $a_3^{a_1}\in\{a_1,a_2\}$، ثم علل أن $a_3^{a_1}=a_2$.

(ج) بين أن $a_3^{a_2}\in\{a_1,a_2\}$، ثم استنتج أن $a_3^{a_2}=a_1$.

(د) بين أن $a_1^2=a_2$، ثم استنتج أن $a_1=\frac{1}{2}$ و$a_2=\frac{1}{4}$ و$a_3=\frac{1}{16}$.

السؤال (5) لا يوجد جزء فائق القوة ذو أربعة عناصر. ليكن $\mathscr{C}=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ فائق القوة مع $a_1>a_2>a_3>a_4$.

(أ) بين أن $a_4^{a_1}=a_3$.

(ب) استنتج أن $a_1=\frac{1}{2}$ و$a_2=\frac{1}{4}$ و$a_3=\frac{1}{16}$ و$a_4=\frac{1}{256}$.

(ج) أوجد تناقضا، ثم استنتج أنه لا يوجد أي جزء فائق القوة ذو أربعة عناصر.

السؤال (6) بين أنه لا يوجد أي جزء فائق القوة ذو n عنصرا مع $n\geq 4$.

السؤال (7) حدد جميع الأجزاء القوية ذات n عنصرا مع $n\geq 4$.

السؤال (8) كم عنصرا يمكن أن يضم جزء قوي؟

تعليق. تصنيف كامل : يوجد جزء وحيد فائق القوة ذو ثلاثة عناصر هو $\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{16}\}$، ولا يوجد أي جزء فائق القوة بأربعة عناصر أو أكثر؛ وبالتالي فالجزء القوي يضم على الأكثر 4 عناصر، والوحيد ذو الأربعة عناصر هو $\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{16}\}$. النقطة الأساسية أن

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

$a_i^{a_j} > a_i$ تفرض بنية صارمة جدا.

Problème 18 — Session 2023

La suite $u_{n+1} = e^{u_n}/(n+1)$: le seuil α et son calcul approché

Problème 1, Parties 2 et 3 © 2026 Saad Choukri

On considère l'ensemble $\mathscr{M}$ des suites réelles définies par $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Pour tout réel $x \geq 0$, on note $u(x)$ la suite de $\mathscr{M}$ de premier terme x, et $u_n(x)$ son terme d'indice n : ainsi $u_0(x) = x$, $u_1(x) = e^x$, $u_2(x) = \frac{e^{e^x}}{2}$, etc.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). Toute suite de $\mathscr{M}$ converge vers 0 ou tend vers $+\infty$; si $(u_n) \in \mathscr{M}$ ne converge pas vers 0, alors $u_n > \ln(n+1)$ pour tout $n \geq 1$; s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_0+1} \leq u_{n_0}$, alors (u_n) est décroissante à partir du rang n_0 et converge vers 0 ; si $u_0 = 0$, la suite converge vers 0.

Partie 2 : Étude approfondie des éléments de $\mathscr{M}$

On note $I_0 = \{x \geq 0 \mid u_n(x) \to 0\}$ et $I_1 = \{x \geq 0 \mid u_n(x) \to +\infty\}$, et $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^x - \dfrac{(x+1)^3}{6}$.

2.1. **Question (1) Quelques propriétés de la fonction f.**

2.1.1. **(a)** Justifier que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et calculer ses dérivées première f' et seconde f''.

2.1.2. **(b)** Étudier la fonction f'', puis en déduire que f' est strictement croissante et positive sur $[0, +\infty[$.

2.1.3. **(c)** Montrer que f est à valeurs strictement positives sur $[0, +\infty[$.

2.2. **Question (2) Cas où il existe $n_0 \geq 3$ tel que $u_{n_0} \geq n_0$.** On considère une suite $(u_n) \in \mathscr{M}$ pour laquelle il existe $n_0 \geq 3$ tel que $u_{n_0} \geq n_0$.

2.2.1. **(a)** Montrer que si $n_0 = 3$, alors $u_n \geq n$ pour $n \in \{4, 5\}$. *On prendra* $e^3 \simeq 20{,}08$ *et* $e^4 \simeq 54{,}59$.

2.2.2. **(b)** Montrer, dans le cas général, que $u_n \geq n$ pour tout $n \geq n_0$.

2.2.3. **(c)** En déduire que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

2.3. **Question (3) Cas où $u_0 = 1$.** On donne $\ln(\ln(81)) \simeq 1{,}48$.

2.3.1. **(a)** Exprimer u_3, puis montrer que $u_3 \geq 3$.

2.3.2. **(b)** Montrer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

2.4. **Question (4) Étude des sous-ensembles I_0 et I_1 de $[0, +\infty[$.**

2.4.1. **(a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

2.4.2. **(b)** En déduire que si $a \in I_0$, alors $[0, a] \subset I_0$, et que si $b \in I_1$, alors $[b, +\infty[\subset I_1$.

2.4.3. **(c)** Montrer que $[1, +\infty[\subset I_1$ et que $I_0 \subset [0, 1[$.

2.4.4. **(d)** Justifier que I_0 (resp. I_1) admet une borne supérieure (resp. inférieure), notée α (resp. β), et montrer que $\beta \leq \alpha$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

2.4.5. **(e)** Montrer que $\beta = \alpha$, puis conclure que $[0, \alpha[\subset I_0 \subset [0, \alpha]$ et que $]\alpha, +\infty[\subset I_1 \subset [\alpha, +\infty[$. *On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la caractérisation de la borne inférieure (resp. supérieure).*

Partie 3 : Étude de la suite $(u_n(\alpha))$; valeur approchée de α

On rappelle que si J est un intervalle non trivial et $h : J \to \mathbb{R}$, h est continue en $x_0 \in J$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in J,\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$. On considère ici la suite $(u_n) \in \mathscr{M}$ telle que $u_0 = \alpha$.

3.1. **Question (5) Étude de la suite (u_n).** On veut montrer que (u_n) tend vers $+\infty$. Raisonnant par l'absurde, on suppose que $\alpha \in I_0$.

3.1.1. **(a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

3.1.2. **(b)** Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_0+1} \leq u_{n_0}$, puis justifier que $u_{n_0+2} < u_{n_0+1}$.

3.1.3. **(c)** En considérant la fonction $g : x \mapsto u_{n_0+2}(x) - u_{n_0+1}(x)$, montrer qu'il existe $\nu > 0$ tel que $\forall x \in [\alpha, \alpha + \nu[,\ u_{n_0+2}(x) < u_{n_0+1}(x)$, puis en déduire une contradiction.

3.2. **Question (6) Étude plus approfondie de la suite (u_n).** On rappelle que $u_n = u_n(\alpha)$.

3.2.1. **(a)** Vérifier que $\alpha > 0$, $I_0 = [0, \alpha[$ et $I_1 = [\alpha, +\infty[$.

3.2.2. **(b)** Justifier que pour tout $n \geq 1$, $\ln(n+1) < u_n$.

3.2.3. **(c)** Montrer que pour tout $n \geq 3$, $u_n \leq n$. *On pourra raisonner par l'absurde.*

3.3. **Question (7) Calcul d'une valeur approchée de α.**

3.3.1. **(a)** Soit $x \geq 0$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = \ln\big((n+1)u_{n+1}(x)\big)$, puis en déduire que

$$x = u_0(x) = \ln\Big(1 \ln\big(2 \ln(3 \ln(\cdots \ln(9 \ln(10\, u_{10}(x))) \cdots))\big)\Big).$$

3.3.2. **(b)** Pour $u_{10}(x) = 10$, on trouve $x \simeq 0{,}3133$. Montrer alors que $\alpha \leq 0{,}3133$.

3.3.3. **(c)** Pour $u_{10}(x) = 1$, on trouve $x \simeq 0{,}3132$. Montrer alors que $0{,}3132 < \alpha$.

3.3.4. **(d)** En déduire une valeur approchée de α à 10^{-4} près par défaut.

N.B. : en 3.1.2, l'original écrit « $u_{n_0+1} < u_{n_0+1}$ » ; il s'agit de l'inégalité stricte $u_{n_0+2} < u_{n_0+1}$. Les valeurs numériques ont été vérifiées : $u_{10}(x) = 10$ pour $x \approx 0{,}31340$ et $u_{10}(x) = 1$ pour $x \approx 0{,}31300$, et l'on trouve $\alpha \approx 0{,}31328$ (d'où $\alpha \simeq 0{,}3132$ à 10^{-4} près par défaut).

Commentaire. Il existe un seuil $\alpha \approx 0{,}31328$: pour $u_0 < \alpha$ la suite tend vers 0, pour $u_0 \geq \alpha$ elle tend vers $+\infty$ (même pour $u_0 = \alpha$). Le calcul de α par la formule « inversée » $x = \ln(1 \ln(2 \ln(\cdots)))$ est très stable : la sensibilité à u_{10} est minuscule, ce qui donne quatre décimales exactes avec seulement dix itérations.

النسخة العربية

المتتالية $u_{n+1} = e^{u_n}/(n+1)$: العتبة α وحسابها التقريبي

دورة 2023 ▪ المسألة 1، الجزآن 2 و3 ▪ 2026 © سعد شكري

نعتبر المجموعة $\mathscr{M}$ للمتتاليات الحقيقية المعرفة بـ $u_0 \geq 0$ و $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$). لكل عدد حقيقي $x \geq 0$ نرمز بـ $u(x)$ للمتتالية من $\mathscr{M}$ التي حدها الأول x، وبـ $u_n(x)$ لحدها ذي الدليل n : أي $u_0(x) = x$ و $u_1(x) = e^x$ و $u_2(x) = \frac{e^{e^x}}{2}$، إلخ.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

نتائج مقبولة (مُثبتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). كل متتالية من $\mathscr{M}$ إما متقاربة نحو 0 وإما تؤول إلى $+\infty$؛ إذا كانت $(u_n) \in \mathscr{M}$ غير متقاربة نحو 0 فإن $u_n > \ln(n+1)$ لكل $n \geq 1$؛ إذا وجد $n_0 \in \mathbb{N}^*$ بحيث $u_{n_0+1} \leq u_{n_0}$ فإن (u_n) تناقصية ابتداء من n_0 ومتقاربة نحو 0؛ إذا كان $u_0 = 0$ فإن المتتالية متقاربة نحو 0.

الجزء 2 : دراسة معمقة لعناصر $\mathscr{M}$

نرمز بـ $I_0 = \{x \geq 0 \mid u_n(x) \to 0\}$ وبـ $I_1 = \{x \geq 0 \mid u_n(x) \to +\infty\}$، ولتكن $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ الدالة المعرفة بـ $f(x) = e^x - \dfrac{(x+1)^3}{6}$.

السؤال (1) بعض خاصيات الدالة f.

(أ) علل أن f قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ واحسب مشتقتيها الأولى f' والثانية f''.

(ب) ادرس الدالة f'' ثم استنتج أن f' تزايدية قطعا وموجبة على $[0,+\infty[$.

(ج) بين أن f موجبة قطعا على $[0,+\infty[$.

السؤال (2) حالة وجود $n_0 \geq 3$ بحيث $u_{n_0} \geq n_0$. نعتبر متتالية $(u_n) \in \mathscr{M}$ يوجد من أجلها $n_0 \geq 3$ بحيث $u_{n_0} \geq n_0$.

(أ) بين أنه إذا كان $n_0 = 3$ فإن $u_n \geq n$ من أجل $n \in \{4,5\}$. نأخذ $e^3 \simeq 20{,}08$ و$e^4 \simeq 54{,}59$.

(ب) بين، في الحالة العامة، أن $u_n \geq n$ لكل $n \geq n_0$.

(ج) استنتج أن (u_n) تؤول إلى $+\infty$.

السؤال (3) حالة $u_0 = 1$. نعطي $\ln(\ln(81)) \simeq 1{,}48$.

(أ) عبر عن u_3 ثم بين أن $u_3 \geq 3$.

(ب) بين أن (u_n) تؤول إلى $+\infty$.

السؤال (4) دراسة الجزأين I_0 وI_1 من $[0,+\infty[$.

(أ) بين أنه لكل $n \in \mathbb{N}$ الدالة $x \mapsto u_n(x)$ تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$.

(ب) استنتج أنه إذا كان $a \in I_0$ فإن $[0,a] \subset I_0$، وإذا كان $b \in I_1$ فإن $[b,+\infty[\subset I_1$.

(ج) بين أن $[1,+\infty[\subset I_1$ وأن $I_0 \subset [0,1[$.

(د) علل أن I_0 يقبل حدا أعلى α وأن I_1 يقبل حدا أدنى β، وبين أن $\beta \leq \alpha$.

(هـ) بين أن $\beta = \alpha$، ثم استنتج أن $[0,\alpha[\subset I_0 \subset [0,\alpha]$ وأن $[\alpha,+\infty[\subset I_1 \subset [\alpha,+\infty[$. يمكن الاستدلال بالخلف واستعمال مميز الحد الأدنى (أو الأعلى).

الجزء 3 : دراسة المتتالية $(u_n(\alpha))$؛ حساب قيمة مقربة لـ α

نذكر بأنه إذا كان J مجالا غير منحل و$h : J \to \mathbb{R}$ فإن h متصلة في $x_0 \in J$ إذا وفقط إذا كان $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in J,\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$. نعتبر هنا المتتالية $(u_n) \in \mathscr{M}$ التي $u_0 = \alpha$.

السؤال (5) دراسة المتتالية (u_n). نريد أن نبين أن (u_n) تؤول إلى $+\infty$. بالخلف، نفترض أن $\alpha \in I_0$.

(أ) بين أنه لكل $n \in \mathbb{N}$ الدالة $x \mapsto u_n(x)$ متصلة على $[0,+\infty[$.

(ب) بين أنه يوجد $n_0 \in \mathbb{N}^*$ بحيث $u_{n_0+1} \leq u_{n_0}$، ثم علل أن $u_{n_0+2} < u_{n_0+1}$.

(ج) باعتبار الدالة $g : x \mapsto u_{n_0+2}(x) - u_{n_0+1}(x)$، بين أنه يوجد $\nu > 0$ بحيث $u_{n_0+2}(x) < u_{n_0+1}(x)$ لكل $x \in [\alpha, \alpha+\nu[$، ثم استنتج تناقضا.

السؤال (6) دراسة معمقة للمتتالية (u_n). نذكر بأن $u_n = u_n(\alpha)$.

(أ) تحقق من أن $\alpha > 0$ و$I_0 = [0,\alpha[$ و$I_1 = [\alpha,+\infty[$.

(ب) علل أن $u_n > \ln(n+1)$ لكل $n \geq 1$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

(ج) بين أن $u_n \leq n$ لكل $n \geq 3$. يمكن الاستدلال بالخلف.

السؤال (7) حساب قيمة مقربة لـ α.

(أ) ليكن $x \geq 0$. تحقق من أن $u_n(x) = \ln\big((n+1)u_{n+1}(x)\big)$ لكل $n \in \mathbb{N}$، ثم استنتج أن

$$x = u_0(x) = \ln\Big(1\ln\big(2\ln(3\ln(\cdots\ln(9\ln(10\,u_{10}(x)))\cdots)\big)\Big).$$

(ب) من أجل $u_{10}(x) = 10$ نجد $x \simeq 0{,}3133$. بين إذن أن $\alpha \leq 0{,}3133$.

(ج) من أجل $u_{10}(x) = 1$ نجد $x \simeq 0{,}3132$. بين إذن أن $0{,}3132 < \alpha$.

(د) استنتج قيمة مقربة لـ α بتفريط بالدقة 10^{-4}.

ملاحظة : يكتب الأصل في 3.1.2 «$u_{n_0+1} < u_{n_0+1}$»؛ والمقصود المتفاوتة القطعية $u_{n_0+2} < u_{n_0+1}$. وتم التحقق من القيم العددية : $u_{10}(x) = 10$ من أجل $x \approx 0{,}31340$ و$u_{10}(x) = 1$ من أجل $x \approx 0{,}31300$، ونجد $\alpha \approx 0{,}31328$ (ومنه $\alpha \simeq 0{,}3132$ بتفريط بالدقة 10^{-4}).

تعليق. توجد عتبة $\alpha \approx 0{,}31328$: إذا كان $u_0 < \alpha$ تؤول المتتالية إلى 0، وإذا كان $u_0 \geq \alpha$ تؤول إلى $+\infty$ (حتى من أجل $u_0 = \alpha$). حساب α بالصيغة «المعكوسة» $x = \ln(1\ln(2\ln(\cdots)))$ مستقر جدا : حساسيتها لـ u_{10} ضئيلة، مما يعطي أربعة أرقام عشرية صحيحة بعشر تكرارات فقط.

Problème 19 — Session 2025

Théorème de Bernstein sur les fonctions absolument monotones ; série de la tangente

Problème, Partie 3 © 2026 Saad Choukri

Définition. Une fonction f est *absolument monotone* sur un intervalle I si elle y est indéfiniment dérivable et si $f^{(n)}(x) \geq 0$ pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times I$.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). Formule de Taylor avec reste intégral ; si (x_n) est une suite de réels positifs telle que la série $\sum x_n$ converge, alors $x_n \to 0$; formule de Leibniz.

3.1. **Question (1) Théorème de Bernstein sur un intervalle de la forme** $[0, a[$. Soient $a \in]0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, a[$ dont la restriction à $]0, a[$ est absolument monotone : $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times]0, a[,\ f^{(n)}(x) \geq 0$. Pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times [0, a[$, on pose

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad \text{et} \qquad R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u.$$

3.1.1. **(a)** Montrer soigneusement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) \geq 0$.

3.1.2. **(b)** Montrer que pour tout $x \in [0, a[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$.

3.1.3. **(c)** Montrer que pour tout $x \in [0, a[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq R_n(x) \leq f(x)$ et $0 \leq S_n(x) \leq f(x)$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

3.1.4. **(d)** Montrer que pour tout $x \in [0, a[$, la suite $(S_n(x))_{n\geq 0}$ est convergente. On pose alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$.

3.1.5. **(e)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir que la fonction $x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^{n+1}}$, définie sur $]0, a[$, est croissante.

3.1.6. **(f)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $x \in [0, a[$ et tout $y \in]x, a[$,

$$0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y).$$

3.1.7. **(g)** En déduire que pour tout $x \in [0, a[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

3.2. **Question (2) Extension du théorème de Bernstein à un intervalle de la forme** $]-a, a[$, avec $0 < a \leq +\infty$. Soit f une fonction absolument monotone sur $]-a, a[$; on définit $S_n(x)$ et $R_n(x)$ comme ci-dessus pour $x \in]-a, a[$.

3.2.1. **(a)** Justifier que pour tout $x \in [0, a[$, la suite $(S_n(x))$ converge vers $f(x)$.

3.2.2. **(b)** Montrer que pour tout $b \in]0, a[$, la suite $\left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!} b^n\right)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

3.2.3. **(c)** Montrer que pour tout $x \in]-a, 0[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n(x)| \leq \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} |x|^{n+1}$, puis en déduire que $(S_n(x))$ converge vers $f(x)$. On pose alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x)$.

3.3. **Question (3) Application à la fonction tangente.** On considère la fonction $f : x \mapsto \tan x$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

3.3.1. **(a)** Justifier que f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et exprimer f' en fonction de f.

3.3.2. **(b)** Montrer que f est indéfiniment dérivable et que pour tout entier $n \geq 1$, $f^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}$.

3.3.3. **(c)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $f^{(n)}(x) \geq 0$.

Dans la suite, on pose $a_n = f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.3.4. **(d)** Soit $n \geq 1$. Exprimer a_{n+1} en fonction de $a_0, \ldots, a_n$, puis calculer $a_0, \ldots, a_6$.

3.3.5. **(e)** Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = 0$.

3.3.6. **(f)** Montrer que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}\right)_{n\geq 0}$ converge vers $\tan x$.

On distinguera les cas $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ *et* $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$. Ainsi $\tan x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$.

N.B. : l'original écrit $\tan x = \sum a_{2k+1} x^{2k+1}$, en oubliant les factorielles du développement de Taylor (puisque $a_n = f^{(n)}(0)$). On trouve $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 2$, $a_4 = 0$, $a_5 = 16$, $a_6 = 0$, d'où $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$

Commentaire. Théorème de Bernstein (1914) : une fonction absolument monotone sur $[0, a[$ est développable en série entière sur $[0, a[$, et même sur $]-a, a[$ si elle est absolument monotone sur cet intervalle.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

Application : $\tan x = \sum_{k\geq 0} \frac{a_{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, avec $a_1 = 1$, $a_3 = 2$, $a_5 = 16$ (nombres tangents), soit $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$

النسخة العربية

مبرهنة برنشتاين حول الدوال الرتيبة كليا؛ متسلسلة الذل

دورة 2025 ▪ المسألة، الجزء 3 ▪ 2026 © سعد شكري

تعريف. نقول إن دالة f رتيبة كليا على مجال I إذا كانت قابلة للاشتقاق لانهائيا عليه وكان $f^{(n)}(x) \geq 0$ لكل $(n, x) \in \mathbb{N} \times I$.

نتائج مقبولة (مُثبتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). صيغة تايلور بالباقي التكاملي؛ إذا كانت (x_n) متتالية أعداد موجبة بحيث المتسلسلة $\sum x_n$ متقاربة فإن $x_n \to 0$؛ صيغة لايبنيز.

السؤال (1) مبرهنة برنشتاين على مجال من الشكل $[0, a[$. ليكن $a \in]0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ وf دالة من الصنف $\mathcal{C}^\infty$ على $[0, a[$ قصورها على $]0, a[$ رتيب كليا: $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times]0, a[,\ f^{(n)}(x) \geq 0$. لكل $(n, x) \in \mathbb{N} \times [0, a[$ نضع

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad \text{و} \qquad R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\, \mathrm{d}u.$$

(أ) بين بعناية أنه لكل $n \in \mathbb{N}$: $f^{(n)}(0) \geq 0$.

(ب) بين أنه لكل $x \in [0, a[$ ولكل $n \in \mathbb{N}$: $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$.

(ج) بين أنه لكل $x \in [0, a[$ ولكل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq R_n(x) \leq f(x)$ و$0 \leq S_n(x) \leq f(x)$.

(د) بين أنه لكل $x \in [0, a[$ المتتالية $(S_n(x))_{n\geq 0}$ متقاربة. ونضع إذن $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$.

(هـ) ليكن $n \in \mathbb{N}$. أثبت أن الدالة $x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^{n+1}}$ المعرفة على $]0, a[$ تزايدية.

(و) ليكن $n \in \mathbb{N}$. بين أنه لكل $x \in [0, a[$ ولكل $y \in]x, a[$:

$$0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y).$$

(ز) استنتج أنه لكل $x \in [0, a[$: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

السؤال (2) تعميم مبرهنة برنشتاين على مجال من الشكل $]-a, a[$ مع $0 < a \leq +\infty$. لتكن f رتيبة كليا على $]-a, a[$؛ نعرف $S_n(x)$ و$R_n(x)$ كما سبق من أجل $x \in]-a, a[$.

(أ) علل أنه لكل $x \in [0, a[$ المتتالية $(S_n(x))$ متقاربة نحو $f(x)$.

(ب) بين أنه لكل $b \in]0, a[$ المتتالية $\left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!} b^n\right)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو 0.

(ج) بين أنه لكل $x \in]-a, 0[$ ولكل $n \in \mathbb{N}$: $|R_n(x)| \leq \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} |x|^{n+1}$، ثم استنتج أن $(S_n(x))$ متقاربة نحو $f(x)$.

ونكتب إذن $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يُحظر النسخ أو إعادة النشر دون إذن كتابي من المؤلف

السؤال (3) تطبيق على دالة الظل. نعتبر الدالة $f : x \mapsto \tan x$ على $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(أ) علل أن f قابلة للاشتقاق على $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ وعبر عن f' بدلالة f.

(ب) بين أن f قابلة للاشتقاق لانهائيا وأنه لكل عدد صحيح $n \geq 1$: $f^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}$.

(ج) بين أنه لكل $n \in \mathbb{N}$ ولكل $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$: $f^{(n)}(x) \geq 0$.
نضع فيما يلي $a_n = f^{(n)}(0)$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

(د) ليكن $n \geq 1$. عبر عن a_{n+1} بدلالة $a_0, \ldots, a_n$، ثم احسب $a_0, \ldots, a_6$.

(هـ) بين أنه لكل $p \in \mathbb{N}$: $a_{2p} = 0$.

(و) بين أنه لكل $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ المتتالية $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}\right)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو $\tan x$. ميز بين الحالتين $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ و $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$. وهكذا

$$\tan x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

ملاحظة : يكتب الأصل $\tan x = \sum a_{2k+1} x^{2k+1}$ ناسيا العامليات في نشر تايلور (لأن $a_n = f^{(n)}(0)$). ونجد $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$ و $a_2 = 0$ و $a_3 = 2$ و $a_4 = 0$ و $a_5 = 16$ و $a_6 = 0$، ومنه $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$

تعليق. مبرهنة برنشتاين (1914) : كل دالة رتيبة كليا على $[0, a[$ هي مجموع متسلسلة تايلور الخاصة بها على $[0, a[$، بل وعلى $]-a, a[$ إذا كانت رتيبة كليا عليه. تطبيق : $\tan x = \sum_{k\geq 0} \frac{a_{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ على $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ مع $a_1 = 1$ و $a_3 = 2$ و $a_5 = 16$، أي $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$ (أعداد الظل).

Problème 20 — Session 2025

Fonctions absolument monotones sur $\mathbb{R}$: analyticité et log-convexité

Problème, Partie 4 © 2026 Saad Choukri

Définition. Une fonction f est *absolument monotone* sur $\mathbb{R}$ si elle est indéfiniment dérivable et si $f^{(n)}(x) \geq 0$ pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). (Théorème de Bernstein) Si f est absolument monotone sur $]-a, a[$ $(0 < a \leq +\infty)$, alors pour tout $x \in]-a, a[$, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Toute fonction absolument monotone est positive, croissante, convexe, et ses dérivées sont absolument monotones.

4.1. **Question (1) Théorème de Bernstein sur $\mathbb{R}$.** Soit f une fonction absolument monotone sur $\mathbb{R}$. Pour tout $(n, x, x_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on pose $S_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$.

4.1.1. **(a)** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel x, la suite $(S_{n,x_0}(x))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$. On pose alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x)$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

4.1.2. **(b)** En déduire que si f s'annule en un point $b \in \mathbb{R}$, alors f est identiquement nulle.

4.1.3. **(c)** On suppose qu'il existe un entier $p \geq 1$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que $f^{(p)}(c) = 0$. Montrer que $f^{(p)}$ est identiquement nulle. Que peut-on alors dire de f ?

4.2. **Question (2) Application à l'étude d'autres propriétés.** Soit f une fonction absolument monotone et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}$, et $(x, a) \in \mathbb{R}^2$.

4.2.1. **(a)** Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k(x-a)^k\right)_{n\geq 0}$ converge vers $(x-a)f'(x)$.

4.2.2. **(b)** Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k(k-1)(x-a)^k\right)_{n\geq 0}$ converge vers $(x-a)^2 f''(x)$.

4.2.3. **(c)** En déduire que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k^2(x-a)^k\right)_{n\geq 0}$ converge vers $(x-a)^2 f''(x) + (x-a)f'(x)$.

4.2.4. **(d)** On suppose de plus que $a < x$. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k(x-a)^k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k^2(x-a)^k\right),$$

puis en déduire que $(x-a)f'(x)^2 \leq f(x)\big((x-a)f''(x) + f'(x)\big)$.

4.2.5. **(e)** Déduire de ce qui précède que $f'^2 \leq ff''$.

4.2.6. **(f)** Montrer que f est strictement positive et que la fonction $x \mapsto \ln(f(x))$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

4.3. **Question (3)** Soit f une fonction absolument monotone sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f'(0) = 1$. Montrer que f est strictement positive et que pour tout réel x, $f(x) \geq e^x$.

Commentaire. Une fonction absolument monotone sur $\mathbb{R}$ est la somme de sa série de Taylor en tout point ; elle est donc soit identiquement nulle, soit strictement positive, et elle est log-convexe ($f'^2 \leq ff''$). En particulier, si $f(0) = f'(0) = 1$, alors $f \geq e^x$: l'exponentielle est la « plus petite » fonction absolument monotone de données initiales $(1, 1)$.

النسخة العربية

الدوال الرتيبة كليا على $\mathbb{R}$: التحليلية والتحدب اللوغاريتمي

دورة 2025 ▪ المسألة، الجزء 4 ▪ 2026 © سعد شكري

تعريف. نقول إن دالة f رتيبة كليا على $\mathbb{R}$ إذا كانت قابلة للاشتقاق لانهائيا وكان $f^{(n)}(x) \geq 0$ لكل $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

نتائج مقبولة (مُثبَتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). (مبرهنة برنشتاين) إذا كانت f رتيبة كليا على $]-a, a[$ ($0 < a \leq +\infty$) فإن $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ لكل $x \in]-a, a[$. كل دالة رتيبة كليا موجبة وتزايدية ومحدبة، ومشتقاتها رتيبة كليا.

السؤال (1) مبرهنة برنشتاين على $\mathbb{R}$. لتكن f رتيبة كليا على $\mathbb{R}$. لكل $(n, x, x_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ نضع $S_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

(أ) ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$. بين أنه لكل عدد حقيقي x المتتالية $(S_{n,x_0}(x))_{n\geq 0}$ متقاربة نحو $f(x)$. ونضع إذن $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x)$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

2026 © سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

(ب) استنتج أنه إذا انعدمت f في نقطة $b \in \mathbb{R}$ فإن f منعدمة.

(ج) نفترض أنه يوجد عدد صحيح $p \geq 1$ و$c \in \mathbb{R}$ بحيث $f^{(p)}(c) = 0$. بين أن $f^{(p)}$ منعدمة. ماذا يمكن القول عن f؟

السؤال (2) تطبيق على دراسة خاصيات أخرى. لتكن f رتيبة كليا وغير منعدمة على $\mathbb{R}$، و$(x, a) \in \mathbb{R}^2$.

(أ) بين أن المتتالية $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k(x-a)^k\right)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو $(x-a)f'(x)$.

(ب) بين أن المتتالية $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k(k-1)(x-a)^k\right)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو $(x-a)^2 f''(x)$.

(ج) استنتج أن المتتالية $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k^2(x-a)^k\right)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو $(x-a)^2 f''(x) + (x-a)f'(x)$.

(د) نفترض علاوة على ذلك أن $a < x$. بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k(x-a)^k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k^2(x-a)^k\right),$$

ثم استنتج أن $(x-a)f'(x)^2 \leq f(x)\big((x-a)f''(x) + f'(x)\big)$.

(هـ) استنتج مما سبق أن $f'^2 \leq ff''$.

(و) بين أن f موجبة قطعا وأن الدالة $x \mapsto \ln(f(x))$ محدبة على $\mathbb{R}$.

السؤال (3) لتكن f رتيبة كليا على $\mathbb{R}$ بحيث $f(0) = f'(0) = 1$. بين أن f موجبة قطعا وأنه لكل عدد حقيقي x : $f(x) \geq e^x$.

تعليق. الدالة الرتيبة كليا على $\mathbb{R}$ هي مجموع متسلسلة تايلور الخاصة بها في كل نقطة؛ فهي إما منعدمة وإما موجبة قطعا، وهي محدبة لوغاريتميا ($f'^2 \leq ff''$). وبالخصوص إذا كان $f(0) = f'(0) = 1$ فإن $f \geq e^x$: الدالة الأسية هي «أصغر» دالة رتيبة كليا شروطها البدئية $(1, 1)$.

Problème 21 — Session 2020

Doublement d'angle : détermination des parties confinées du cercle

Partie 4 © 2026 Saad Choukri

Notations. $\Gamma = [0, 2[$ est identifié au cercle unité par $t \mapsto e^{i\pi t}$; pour $a > 0$, $x \bmod a$ est l'unique $r \in [0, a[$ tel que $x - r \in a\mathbb{Z}$, et $A \bmod 2 = \{x \bmod 2 \mid x \in A\}$. Pour $0 \leq x < y < 2$, les arcs fermés d'extrémités x, y sont $[x, y]$ (longueur $y - x$) et $[y, 2 + x] \bmod 2$ (longueur $2 + x - y$) ; deux points x et $(x + 1) \bmod 2$ sont diamétralement opposés. L'application *doublement d'angle* est $\sigma : \Gamma \to \Gamma$, $x \mapsto (2x) \bmod 2$; l'orbite de x est $\mathcal{O}(x) = \{\sigma^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Une partie non vide $A \subset \Gamma$ est *confinée* si $\sigma(A) \subset A$ et si A est contenue dans un arc fermé de longueur < 1. Pour $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n-1$, $S(n, k)$ est le système $2x_i - 2 = x_{n-(k-i)}$ $(0 \leq i \leq k-1)$, $2x_i = x_{i-k}$ $(k \leq i \leq n-1)$.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). Pour $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n-1$, le système $S(n, k)$ admet une unique solution $\left(x_i^{(n,k)}\right)_{0\leq i\leq n-1}$; si $n \wedge k = 1$, elle vérifie $0 < x_{n-1}^{(n,k)} < \cdots < x_k^{(n,k)} < 1 < x_{k-1}^{(n,k)} < \cdots < x_0^{(n,k)} < 2$, et $\{x_0^{(n,k)}, \ldots, x_{n-1}^{(n,k)}\}$ est une orbite périodique d'ordre n confinée ;

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

si $n \wedge k = d \geq 2$, alors $x_0^{(n,k)} = \cdots = x_{d-1}^{(n,k)}$.

4.1. **Question (1) Quelques propriétés utiles de l'application σ.**

4.1.1. **(a)** Montrer que σ est surjective.

4.1.2. **(b)** Déterminer $\sigma(0)$, $\sigma(1/2)$, $\sigma(1)$, $\sigma(2/3)$ et $\sigma(4/3)$, puis analyser la monotonie de σ.

4.1.3. **(c)** Déterminer les orbites périodiques d'ordre 1 sous σ.

4.1.4. **(d)** Soient $x, y \in \Gamma$. Montrer que $\sigma(x) = \sigma(y)$ si, et seulement si, x et y sont égaux ou diamétralement opposés.

4.1.5. **(e)** Soit $A = [a, a+\ell] \bmod 2$ un arc fermé de Γ, d'origine a et de longueur $\ell > 0$.

(i) **(i)** Si $\ell < 1$, expliciter $\sigma(A)$ et montrer que $\sigma(A)$ est un arc fermé de Γ de longueur 2ℓ, et que σ induit une bijection de A sur $\sigma(A)$.

(ii) **(ii)** Si $\ell \geq 1$, montrer que σ induit une surjection de A sur Γ.

(iii) **(iii)** Montrer que si $\ell \geq 1$, l'image réciproque par σ de toute partie non vide B de Γ rencontre A : si $\emptyset \neq B \subset \Gamma$, alors $A \cap \sigma^{-1}(B) \neq \emptyset$.

Dans la suite, on considère un arc fermé $A = [a, a+\ell] \bmod 2$ de Γ, d'origine $a \in \Gamma$ et de longueur $\ell \in]0, 1]$, et on lui associe la partie $A_\infty = \{x \in \Gamma \mid \mathcal{O}(x) \subset A\}$, dite *ensemble limite* associé à A.

4.2. **Question (2) Ensemble limite associé à un demi-cercle fermé.** On suppose ici $\ell = 1$ et on veut montrer que $A_\infty \neq \emptyset$.

4.2.1. **(a)** Montrer que si $a \geq 1$, alors $0 \in A$, et conclure que $A_\infty \neq \emptyset$.

4.2.2. **(b)** On suppose $a < 1$ et on définit par récurrence $A_0 = A$ et $A_{n+1} = A \cap \sigma^{-1}(A_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) **(i)** Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \neq \emptyset$ et $A_{n+1} \subset A_n$.

(ii) **(ii)** Montrer que $A_\infty = \bigcap_{n \geq 0} A_n$.

(iii) **(iii)** Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de A telle que $a_n \in A_n$ pour tout n. En admettant que toute suite réelle admet une sous-suite monotone, montrer que (a_n) admet une sous-suite convergente $(a_{\psi(n)})$; on note a_∞ sa limite.

(iv) **(iv)** Montrer que $a_\infty \in A_\infty$; en particulier $A_\infty \neq \emptyset$. *On remarquera que chaque A_n est une réunion finie d'arcs fermés.*

4.2.3. **(c)** Si $a > 1$, montrer que $A_\infty = \{0\}$. *On pourra raisonner par l'absurde et expliciter A.*

4.3. **Question (3) Ensemble limite associé à un arc fermé de longueur < 1.** On suppose ici $\ell < 1$ et on veut montrer que A_∞ est fini. Pour $(u, v) \in \Gamma^2$, on pose $d(u, v) = \min\{|u - v|, 2 - |u - v|\}$.

4.3.1. **(a)** Soient $x, y \in A_\infty$ avec $x \neq y$.

(i) **(i)** Montrer, en distinguant des cas, que $d(\sigma(x), \sigma(y)) = 2d(x, y)$ ou $d(\sigma(x), \sigma(y)) = 2 - 2d(x, y)$.

(ii) **(ii)** Si de plus $d(x, y) \geq 2(1 - \ell)$, justifier que $d(\sigma(x), \sigma(y)) \geq 2(1 - \ell)$, puis montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) \geq 2(1 - \ell)$.

4.3.2. **(b)** Montrer qu'en général la partie A_∞ est finie.

4.3.3. **(c)** Si $0 \in A$, montrer que $A_\infty = \{0\}$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

4.4. **Question (4) Détermination des parties confinées de Γ.** Soit $\mathcal{C}$ une partie confinée de Γ, contenue dans un arc fermé A de longueur $\ell < 1$.

4.4.1. **(a)** Montrer que $\mathcal{C}$ est une partie finie de Γ.

4.4.2. **(b)** Justifier que σ induit une permutation de $\mathcal{C}$.

4.4.3. **(c)** Déterminer $\mathcal{C}$ lorsqu'elle est réduite à un point.

Dans la suite, on suppose que $\mathcal{C}$ contient au moins deux points et on écrit $\mathcal{C} = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ avec $n \geq 2$ et $2 > a_0 > \cdots > a_{n-1} \geq 0$.

4.4.4. **(d)** Justifier que $a_{n-1} > 0$ et que $a_0 - a_{n-1} < 1$.

4.4.5. **(e)** Soit $k = \mathrm{Card}\{j \in \{0, \dots, n-1\} \mid a_j \in]1, 2[\}$.

(i) **(i)** Montrer que $k \geq 1$ et que $a_0 > \cdots > a_{k-1} > 1 > a_k > \cdots > a_{n-1}$.

(ii) **(ii)** Montrer que $\sigma(a_i) = a_{n-(k-i)}$ si $i \in \{0, \dots, k-1\}$ et $\sigma(a_i) = a_{i-k}$ si $i \in \{k, \dots, n-1\}$. Que conclure par rapport au système $S(n,k)$?

4.4.6. **(f)** Montrer que $n \wedge k = 1$ et préciser les valeurs des réels $a_0, \dots, a_{n-1}$.

4.4.7. **(g)** Soit $n \geq 2$ un entier donné. Combien existe-t-il de parties confinées de Γ à n éléments ?

Commentaire. Résultat final : les parties confinées (stables par doublement et contenues dans un arc de longueur < 1) sont $\{0\}$ et les orbites $\{x_0^{(n,k)}, \dots, x_{n-1}^{(n,k)}\}$ avec $n \wedge k = 1$. Il y a donc exactement $\varphi(n)$ parties confinées à n éléments ($n \geq 2$), où φ est l'indicatrice d'Euler. Ces orbites sont liées aux « orbites de rotation » de la dynamique holomorphe (Bullett–Sentenac, Goldberg).

النسخة العربية

مضاعفة الزاوية : تحديد الأجزاء المحصورة من الدائرة

دورة 2020 ▪ الجزء 4 ▪ © 2026 سعد شكري

ترميزات. نطابق $\Gamma = [0,2[$ مع الدائرة الوحدية بواسطة $t \mapsto e^{i\pi t}$؛ من أجل $a > 0$ نرمز بـ $x \bmod a$ للعدد الوحيد $r \in [0, a[$ بحيث $x - r \in a\mathbb{Z}$، ونضع $A \bmod 2 = \{x \bmod 2 \mid x \in A\}$. من أجل $0 \leq x < y < 2$، القوسان المغلقان ذوا الطرفين x وy هما $[x, y]$ (طوله $y - x$) و$[y, 2+x] \bmod 2$ (طوله $2+x-y$)؛ النقطتان x و$(x+1) \bmod 2$ متقابلتان قطريا. تطبيق مضاعفة الزاوية هو $\sigma : \Gamma \to \Gamma$، $x \mapsto (2x) \bmod 2$؛ ومدار x هو $\mathcal{O}(x) = \{\sigma^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$. نقول إن جزءا غير فارغ $A \subset \Gamma$ محصور إذا كان $\sigma(A) \subset A$ وكان A محتوى في قوس مغلق طوله أصغر قطعا من 1. من أجل $n \geq 2$ و$1 \leq k \leq n-1$، $S(n,k)$ هي النظمة $2x_i - 2 = x_{n-(k-i)}$ $(0 \leq i \leq k-1)$، $2x_i = x_{i-k}$ $(k \leq i \leq n-1)$.

نتائج مقبولة (مُثبتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). من أجل $n \geq 2$ و$1 \leq k \leq n-1$، تقبل النظمة $S(n,k)$ حلا وحيدا $(x_i^{(n,k)})_{0 \leq i \leq n-1}$؛ وإذا كان $n \wedge k = 1$ فإن $0 < x_{n-1}^{(n,k)} < \cdots < x_k^{(n,k)} < 1 < x_{k-1}^{(n,k)} < \cdots < x_0^{(n,k)} < 2$، والمجموعة $\{x_0^{(n,k)}, \dots, x_{n-1}^{(n,k)}\}$ مدار دوري محصور من الرتبة n؛ وإذا كان $n \wedge k = d \geq 2$ فإن $x_0^{(n,k)} = \cdots = x_{d-1}^{(n,k)}$.

السؤال (1) بعض الخاصيات المفيدة للتطبيق σ.

(أ) بين أن σ شمولي.

(ب) حدد $\sigma(0)$ و$\sigma(1/2)$ و$\sigma(1)$ و$\sigma(2/3)$ و$\sigma(4/3)$، ثم ادرس رتابة σ.

(ج) حدد المدارات الدورية من الرتبة 1 بالنسبة لـ σ.

(د) ليكن $x, y \in \Gamma$. بين أن $\sigma(x) = \sigma(y)$ إذا وفقط إذا كان x وy متساويين أو متقابلين قطريا.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

حقوق الطبع محفوظة © 2026 سعد شكري • يُمنع النسخ أو إعادة النشر دون إذن كتابي من المؤلف

(هـ) ليكن $A = [a, a+\ell] \bmod 2$ قوسا مغلقا من Γ أصله a وطوله $\ell > 0$.

(i) إذا كان $\ell < 1$، حدد $\sigma(A)$ وبين أنه قوس مغلق طوله 2ℓ، وأن σ يحدث تقابلا من A نحو $\sigma(A)$.

(ii) إذا كان $\ell \geq 1$، بين أن σ يحدث شمولا من A نحو Γ.

(iii) بين أنه إذا كان $\ell \geq 1$ فإن الصورة العكسية بـ σ لكل جزء غير فارغ B من Γ تقطع A : أي إذا كان $\emptyset \neq B \subset \Gamma$ فإن $A \cap \sigma^{-1}(B) \neq \emptyset$.

نعتبر فيما يلي قوسا مغلقا $A = [a, a+\ell] \bmod 2$ من Γ أصله $a \in \Gamma$ وطوله $\ell \in]0, 1]$، ونربطه بالجزء المسمى $A_\infty = \{x \in \Gamma \mid \mathcal{O}(x) \subset A\}$ المجموعة النهائية المرتبطة بـ A.

السؤال (2) المجموعة النهائية لنصف دائرة مغلق. نفترض هنا أن $\ell = 1$ ونريد أن نبين أن $A_\infty \neq \emptyset$.

(أ) بين أنه إذا كان $a \geq 1$ فإن $0 \in A$، واستنتج أن $A_\infty \neq \emptyset$.

(ب) نفترض أن $a < 1$ ونعرف بالترجع $A_0 = A$ و$A_{n+1} = A \cap \sigma^{-1}(A_n)$، $n \in \mathbb{N}$.

(i) علل أن $A_n \neq \emptyset$ وأن $A_{n+1} \subset A_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

(ii) بين أن $A_\infty = \bigcap_{n \geq 0} A_n$.

(iii) لتكن $(a_n)_{n \geq 0}$ متتالية من عناصر A بحيث $a_n \in A_n$ لكل n. بقبول أن كل متتالية حقيقية تقبل متتالية جزئية رتيبة، بين أن (a_n) تقبل متتالية جزئية متقاربة $(a_{\psi(n)})$؛ نرمز لنهايتها بـ a_∞.

(iv) بين أن $a_\infty \in A_\infty$؛ وبالخصوص $A_\infty \neq \emptyset$. لاحظ أن كل A_n اتحاد منته لأقواس مغلقة.

(ج) إذا كان $a > 1$، بين أن $A_\infty = \{0\}$. يمكن استعمال برهان بالخلف وكتابة A صراحة.

السؤال (3) المجموعة النهائية لقوس مغلق طوله أصغر من 1. نفترض هنا أن $\ell < 1$ ونريد أن نبين أن A_∞ منتهية.
لكل $(u, v) \in \Gamma^2$ نضع $d(u, v) = \min\{|u - v|, 2 - |u - v|\}$.

(أ) ليكن $x, y \in A_\infty$ بحيث $x \neq y$.

(i) بين، بالتمييز بين حالات، أن $d(\sigma(x), \sigma(y)) = 2d(x, y)$ أو $d(\sigma(x), \sigma(y)) = 2 - 2d(x, y)$.

(ii) إذا كان علاوة على ذلك $d(x, y) \geq 2(1 - \ell)$، علل أن $d(\sigma(x), \sigma(y)) \geq 2(1 - \ell)$، ثم بين أنه يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث $d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) \geq 2(1 - \ell)$ لكل $n \geq n_0$.

(ب) بين أن A_∞ منتهية في الحالة العامة.

(ج) إذا كان $0 \in A$، بين أن $A_\infty = \{0\}$.

السؤال (4) تحديد الأجزاء المحصورة من Γ. ليكن $\mathcal{C}$ جزءا محصورا من Γ محتوى في قوس مغلق A طوله $\ell < 1$.

(أ) بين أن $\mathcal{C}$ منته.

(ب) علل أن σ يحدث تبديلا للمجموعة $\mathcal{C}$.

(ج) حدد $\mathcal{C}$ عندما يكون مختزلا في نقطة واحدة.

نفترض فيما يلي أن $\mathcal{C}$ يحتوي على نقطتين على الأقل، ونكتب $\mathcal{C} = \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ مع $n \geq 2$ و$2 > a_0 > \cdots > a_{n-1} \geq 0$.

(د) علل أن $a_{n-1} > 0$ وأن $a_0 - a_{n-1} < 1$.

(هـ) ليكن $k = \text{Card}\{j \in \{0, \ldots, n-1\} \mid a_j \in]1, 2[\}$.

(i) بين أن $k \geq 1$ وأن $a_0 > \cdots > a_{k-1} > 1 > a_k > \cdots > a_{n-1}$.

(ii) بين أن $\sigma(a_i) = a_{n-(k-i)}$ إذا كان $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ وأن $\sigma(a_i) = a_{i-k}$ إذا كان $i \in \{k, \ldots, n-1\}$.
ماذا تستنتج بالنسبة للنظمة $S(n, k)$؟

(و) بين أن $n \wedge k = 1$ وحدد قيم $a_0, \ldots, a_{n-1}$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri

(j) ليكن $n \geq 2$ عددا صحيحا معطى. كم يوجد من جزء محصور من Γ ذي n عنصرا؟

تعليق. النتيجة النهائية : الأجزاء المحصورة (المستقرة بالمضاعفة والمحتواة في قوس طوله أصغر من 1) هي $\{0\}$ والمدارات $\{x_0^{(n,k)}, \ldots, x_{n-1}^{(n,k)}\}$ مع $n \wedge k = 1$. وبالتالي يوجد بالضبط $\varphi(n)$ جزءا محصورا ذا n عنصرا ($n \geq 2$)، حيث φ دالة أولر. ترتبط هذه المدارات بـ« مدارات الدوران » في الديناميكا التحليلية (بوليت-ساتناك، غولدبرغ).

Problème 22 — Session 2026

Croissance des nombres de Bernoulli et une application probabiliste

Partie 6 © 2026 Saad Choukri

Notations. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite des nombres de Bernoulli et $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}$ pour $s > 1$.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(2n) = \dfrac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}b_{2n}$, et pour tout $\alpha > 1$, $1 \leq \zeta(\alpha) \leq \dfrac{\alpha}{\alpha-1}$. De plus $b_0 = 1$.

6.1. **Question (1) Étude de la suite $(|b_{2n}|)_{n\in\mathbb{N}}$.**

6.1.1. **(a)** Montrer que pour tout $t > 1$, $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \leq e \leq \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t$.

6.1.2. **(b)** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \leq (2n)! \leq e^2\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n+1}$.

6.1.3. **(c)** Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2e\left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n} \leq |b_{2n}| \leq 8\pi e^2\left(\frac{n}{e\pi}\right)^{2n+1}$, et conclure quant à la nature de la suite $(|b_{2n}|)_{n\in\mathbb{N}}$.

6.1.4. **(d)** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[2n]{|b_{2n}|}}{n} = \dfrac{1}{\pi e}$.

6.2. **Question (2) Une application probabiliste.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère une variable aléatoire X_n définie sur un espace probabilisé fini (Ω, P), telle que X_n prenne les valeurs $|b_0|, |b_2|, \ldots, |b_{2n}|$ et

$$\forall k \in \{0,\ldots,n\}, \quad P(X_n = |b_{2k}|) = \frac{1}{n+1}$$

(autrement dit, $X_n = |b_{2K}|$ où K suit la loi uniforme sur $\{0,\ldots,n\}$).

N.B. : dans le sujet original, la loi est donnée par $P(X_n = |b_{2k}|) = \frac{1}{n+1}$; ceci n'a de sens que si l'on tire l'indice k uniformément, car certaines valeurs coïncident, par exemple $|b_4| = |b_8| = \frac{1}{30}$.

6.2.1. **(a)** Déterminer l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

6.2.2. **(b)** Préciser le comportement de la suite $(E(X_k))_{k\in\mathbb{N}}$.

6.2.3. **(c)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X_n \leq n) \leq \dfrac{b(n)}{n+1}$, où

$$b : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{N} \,;\, |b_{2n}| \leq x\}.$$

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

6.2.4. **(d)** Soient $\alpha, \beta, \delta \in]0, +\infty[$; on considère $h_{\alpha,\beta,\delta} : \left]\frac{\alpha}{e}, +\infty\right[\to \mathbb{R}, x \mapsto (\beta x + \delta)\ln\left(\frac{x}{\alpha}\right)$. Montrer que $h_{\alpha,\beta,\delta}$ réalise une bijection de $\left]\frac{\alpha}{e}, +\infty\right[$ sur un intervalle J à préciser. On note $\psi_{\alpha,\beta,\delta}$ sa bijection réciproque.

6.2.5. **(e)** Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)\,\psi_{\alpha,\beta,\delta}(x)}{x} = \dfrac{1}{\beta}$.

6.2.6. **(f)** Montrer que pour x assez grand,

$$\left|\psi_{\pi e,2,1}\left(\ln\frac{x}{8\pi e^2}\right)\right| \le b(x) \le 1 + \left|\psi_{\pi e,2,0}\left(\ln\frac{x}{2e}\right)\right|.$$

6.2.7. **(g)** Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln x)\,b(x)}{\ln x} = \dfrac{1}{2}$.

6.2.8. **(h)** Conclure que pour tout $s > 1$, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n\ln(\ln n)\,P(X_n \le n)}{(\ln n)^s} = 0$.

Commentaire. La suite $|b_{2n}|$ tend vers $+\infty$ très vite, comme $\left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n}$ à des facteurs polynomiaux près ; plus précisément, la formule de Stirling donne $|b_{2n}| \sim 4\sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n}$. C'est pourquoi la formule d'Euler–Maclaurin fournit une série asymptotique, non convergente : il faut l'arrêter au bon rang.

النسخة العربية

نمو أعداد برنولي وتطبيق احتمالي

دورة 2026 ▪ الجزء 6 ▪ 2026 © سعد شكري

ترميزات. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية أعداد برنولي و$\zeta(s) = \sum_{n\ge1} n^{-s}$ من أجل $s > 1$.

نتائج مقبولة (مُثبتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). لكل $n \in \mathbb{N}^*$: $\zeta(2n) = \dfrac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}b_{2n}$، ولكل $\alpha > 1$: $1 \le \zeta(\alpha) \le \dfrac{\alpha}{\alpha-1}$. وكذلك $b_0 = 1$.

السؤال (1) دراسة المتتالية $(|b_{2n}|)_{n\in\mathbb{N}}$.

(أ) بين أنه لكل $t > 1$: $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \le e \le \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t$.

(ب) استنتج أنه لكل $n \in \mathbb{N}^*$: $e\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \le (2n)! \le e^2\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n+1}$.

(ج) بين أنه لكل $n \in \mathbb{N}^*$: $2e\left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n} \le |b_{2n}| \le 8\pi e^2\left(\frac{n}{e\pi}\right)^{2n+1}$، واستنتج طبيعة المتتالية $(|b_{2n}|)_{n\in\mathbb{N}}$.

(د) بين أن $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[2n]{|b_{2n}|}}{n} = \dfrac{1}{\pi e}$.

السؤال (2) تطبيق احتمالي. ليكن $n \in \mathbb{N}$. نعتبر متغيرا عشوائيا X_n معرفا على فضاء احتمالي منته (Ω, P)، يأخذ القيم $|b_0|, |b_2|, \ldots, |b_{2n}|$، بحيث

$$\forall k \in \{0,\ldots,n\},\quad P(X_n = |b_{2k}|) = \frac{1}{n+1}$$

(أي $X_n = |b_{2K}|$ حيث يتبع K القانون المنتظم على $\{0,\ldots,n\}$).

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يُحظر النسخ أو إعادة النشر دون إذن المؤلف

ملاحظة : يعطي الأصل القانون بـ $P(X_n = |b_{2k}|) = \frac{1}{n+1}$؛ ولا معنى لذلك إلا إذا سحبنا الدليل k بشكل منتظم، لأن بعض القيم تتطابق، مثلا $|b_4| = |b_8| = \frac{1}{30}$.

(أ) حدد الأمل الرياضي $E(X_n)$ والمغايرة $V(X_n)$ للمتغير X_n.

(ب) حدد سلوك المتتالية $(E(X_k))_{k\in\mathbb{N}}$.

(ج) بين أنه لكل $n \in \mathbb{N}$: $P(X_n \leq n) \leq \dfrac{b(n)}{n+1}$، حيث

$$b : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{N}\ ;\ |b_{2n}| \leq x\}.$$

(د) ليكن $\alpha, \beta, \delta \in]0, +\infty[$؛ نعتبر $h_{\alpha,\beta,\delta} : \left]\frac{\alpha}{e}, +\infty\right[\to \mathbb{R}$، $x \mapsto (\beta x + \delta)\ln\left(\frac{x}{\alpha}\right)$. بين أن $h_{\alpha,\beta,\delta}$ تقابل من $\left]\frac{\alpha}{e}, +\infty\right[$ نحو مجال J ينبغي تحديده. نرمز لتقابله العكسي بـ $\psi_{\alpha,\beta,\delta}$.

(هـ) بين أن $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)\,\psi_{\alpha,\beta,\delta}(x)}{x} = \frac{1}{\beta}$.

(و) بين أنه من أجل x كبير بما يكفي :

$$\left\lfloor \psi_{\pi e,2,1}\left(\ln\frac{x}{8\pi e^2}\right)\right\rfloor \leq b(x) \leq 1 + \left\lfloor \psi_{\pi e,2,0}\left(\ln\frac{x}{2e}\right)\right\rfloor.$$

(ز) بين أن $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)\,b(x)}{\ln x} = \frac{1}{2}$.

(ح) استنتج أنه لكل $s > 1$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n\ln(\ln n)\,P(X_n \leq n)}{(\ln n)^s} = 0$.

تعليق. تؤول المتتالية $|b_{2n}|$ إلى $+\infty$ بسرعة كبيرة، مثل $\left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n}$ إلى حدود عوامل حدودية؛ وبدقة أكبر تعطي صيغة ستيرلينغ $|b_{2n}| \sim 4\sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n}$. لهذا تعطي صيغة أولر-ماكلوران متسلسلة مقاربة غير متقاربة، ينبغي إيقافها عند الرتبة المناسبة.

Problème 23 — Session 2026

Approximation de $\zeta(\alpha)$ par la formule d'Euler–Maclaurin

Partie 7 © 2026 Saad Choukri

Notations. (B_n) est la suite des polynômes de Bernoulli, $b_n = B_n(0)$, $\widetilde{B}_n(x) = B_n(x - \lfloor x \rfloor)$ et $\zeta(\alpha) = \sum_{k\geq 1} k^{-\alpha}$ pour $\alpha > 1$. Pour tout réel x, on pose $\psi_r(x) = x(x+1)\cdots(x+r-1)$ si $r \in \mathbb{N}^*$ et $\psi_0(x) = 1$.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). (Euler–Maclaurin) Pour f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ et $r, n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_0^n f + \frac{f(n) - f(0)}{2} + \sum_{p=2}^{r} \frac{b_p}{p!}\left(f^{(p-1)}(n) - f^{(p-1)}(0)\right) + \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_0^n \widetilde{B}_r(x) f^{(r)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Les fonctions $\widetilde{B}_r$ sont bornées ; pour $\alpha > 1$, $\frac{1}{\alpha-1} \leq \zeta(\alpha) \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

On considère $\alpha > 1$ et la fonction $\gamma : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^\alpha}$.

7.1. **Question (1)** Montrer que γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times [0, +\infty[$, $\gamma^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n \psi_n(\alpha)}{(1+x)^{\alpha+n}}$.

7.2. **Question (2)** En appliquant la formule d'Euler–Maclaurin à γ, prouver que pour tous $r, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha-1}\Big(1 - \frac{1}{(1+n)^{\alpha-1}}\Big) - \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{(1+n)^\alpha}\Big) + \sum_{p=2}^{r} \frac{(-1)^p \psi_{p-1}(\alpha)}{p!} b_p \Big(1 - \frac{1}{(1+n)^{\alpha+p-1}}\Big) - x_n,$$

où $x_n = \dfrac{\psi_r(\alpha)}{r!} \displaystyle\int_0^n \frac{\widetilde{B}_r(x)}{(1+x)^{\alpha+r}}\, \mathrm{d}x$.

7.3. **Question (3)** **Un résultat utile.** Soit g une fonction réelle continue sur $[0, +\infty[$ telle qu'il existe $M > 0$ vérifiant $0 \le g(t) \le M$ pour tout $t \ge 0$. On pose $\gamma_n = \displaystyle\int_0^n \frac{g(x)}{(1+x)^{\alpha+r}}\, \mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (γ_n) est croissante et majorée par $\dfrac{M}{\alpha+r-1}$. Conclure.

7.4. **Question (4)** Montrer que la suite (x_n) converge. Dans la suite, on note λ_α sa limite.

7.5. **Question (5)** **Résultat d'approximation de $\zeta(\alpha)$.**

7.5.1. **(a)** Montrer que pour tous $\alpha > 1$ et $r \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(\alpha) = \dfrac{\alpha}{\alpha-1} - \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{p=2}^{r} \frac{(-1)^p \psi_{p-1}(\alpha)}{p!} b_p - \lambda_\alpha$.

7.5.2. **(b)** Montrer que pour tous $\alpha > 1$ et $r \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \zeta(\alpha) - \frac{\alpha}{\alpha-1} + \frac{1}{2} - \sum_{p=2}^{r} \frac{(-1)^p \psi_{p-1}(\alpha)}{p!} b_p \right| \le \frac{\psi_r(\alpha) \max_{t\in[0,1]} |B_r(t)|}{r!\,(\alpha+r-1)}.$$

7.5.3. **(c)** Retrouver ainsi la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{\alpha \to 1^+} (\alpha-1)\zeta(\alpha)$.

N.B. : l'original écrit les formules de 7.2 et 7.5 avec $\sum_{p=1}^{r}$, ce qui donne au terme $p = 1$ le signe $+\frac{1}{2}$; conformément à la correction de la formule d'Euler–Maclaurin (terme $\frac{f(n)-f(0)}{2}$), ce terme vaut $-\frac{1}{2}(\dots)$. On retrouve ainsi le développement classique $\zeta(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{12} + \cdots$ Dans 7.3, l'hypothèse $g \ge 0$ ne s'applique pas directement à $\widetilde{B}_r$; on l'utilise avec $g = \widetilde{B}_r + \max |B_r|$.

Commentaire. La formule d'Euler–Maclaurin donne un développement de $\zeta(\alpha)$: $\zeta(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{12} - \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{720} + \cdots$, avec une erreur explicite. En gardant quelques termes et en l'appliquant à partir d'un rang N (plutôt que 1), on obtient $\zeta(\alpha)$ avec une grande précision ; c'est ainsi qu'Euler a calculé $\zeta(2)$ à 20 décimales.

النسخة العربية

تقريب $\zeta(\alpha)$ بواسطة صيغة أولر-ماكلوران

دورة 2026 ▪ الجزء 7 ▪ 2026 © سعد شكري

ترميزات. (B_n) متتالية حدوديات برنولي، $b_n = B_n(0)$، $\widetilde{B}_n(x) = B_n(x - \lfloor x \rfloor)$ و $\zeta(\alpha) = \sum_{k\ge1} k^{-\alpha}$ من أجل $\alpha > 1$.
لكل عدد حقيقي x نضع $\psi_r(x) = x(x+1)\cdots(x+r-1)$ إذا كان $r \in \mathbb{N}^*$ و $\psi_0(x) = 1$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

نتائج مقبولة (مُثبتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). (أولر-ماكلوران) من أجل دالة f من الصنف $\mathcal{C}^\infty$ على $[0,+\infty[$ و$r,n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=\int_0^n f+\frac{f(n)-f(0)}{2}+\sum_{p=2}^{r}\frac{b_p}{p!}\left(f^{(p-1)}(n)-f^{(p-1)}(0)\right)+\frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_0^n \widetilde{B}_r(x)f^{(r)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

الدوال $\widetilde{B}_r$ محدودة؛ ومن أجل $\alpha>1$: $\frac{1}{\alpha-1}\le\zeta(\alpha)\le\frac{\alpha}{\alpha-1}$.

ليكن $\alpha>1$ والدالة $\gamma:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$، $x\mapsto\dfrac{1}{(1+x)^\alpha}$.

السؤال (1) بين أن γ من الصنف $\mathcal{C}^\infty$ وأن $\gamma^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n\psi_n(\alpha)}{(1+x)^{\alpha+n}}$ لكل $(n,x)\in\mathbb{N}\times[0,+\infty[$.

السؤال (2) بتطبيق صيغة أولر-ماكلوران على γ، بين أنه لكل $r,n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^\alpha}=1+\frac{1}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{(1+n)^{\alpha-1}}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{(1+n)^{\alpha}}\right)+\sum_{p=2}^{r}\frac{(-1)^p\psi_{p-1}(\alpha)}{p!}b_p\left(1-\frac{1}{(1+n)^{\alpha+p-1}}\right)-x_n,$$

حيث $x_n=\dfrac{\psi_r(\alpha)}{r!}\displaystyle\int_0^n\frac{\widetilde{B}_r(x)}{(1+x)^{\alpha+r}}\,\mathrm{d}x$.

السؤال (3) نتيجة مفيدة. لتكن g دالة حقيقية متصلة على $[0,+\infty[$ بحيث يوجد $M>0$ يحقق $0\le g(t)\le M$ لكل $t\ge0$. نضع $\gamma_n=\displaystyle\int_0^n\frac{g(x)}{(1+x)^{\alpha+r}}\,\mathrm{d}x$، $n\in\mathbb{N}$. بين أن (γ_n) تزايدية ومكبورة بـ $\dfrac{M}{\alpha+r-1}$. استنتج.

السؤال (4) بين أن المتتالية (x_n) متقاربة. نرمز لنهايتها بـ λ_α.

السؤال (5) نتيجة تقريب $\zeta(\alpha)$.

(أ) بين أنه لكل $\alpha>1$ و$r\in\mathbb{N}^*$: $\zeta(\alpha)=\dfrac{\alpha}{\alpha-1}-\frac{1}{2}+\displaystyle\sum_{p=2}^{r}\frac{(-1)^p\psi_{p-1}(\alpha)}{p!}b_p-\lambda_\alpha$.

(ب) بين أنه لكل $\alpha>1$ و$r\in\mathbb{N}^*$:

$$\left|\zeta(\alpha)-\frac{\alpha}{\alpha-1}+\frac{1}{2}-\sum_{p=2}^{r}\frac{(-1)^p\psi_{p-1}(\alpha)}{p!}b_p\right|\le\frac{\psi_r(\alpha)\max_{t\in[0,1]}|B_r(t)|}{r!\,(\alpha+r-1)}.$$

(ج) استرجع قيمة النهاية $\lim\limits_{\alpha\to1^+}(\alpha-1)\zeta(\alpha)$.

ملاحظة : يكتب الأصل صيغ 7.2 و7.5 بـ $\sum_{p=1}^{r}$، مما يعطي للحد $p=1$ الإشارة $+\frac{1}{2}$؛ وانسجاما مع تصحيح صيغة أولر-ماكلوران (الحد $\frac{f(n)-f(0)}{2}$) فإن هذا الحد يساوي $-\frac{1}{2}(\dots)$. ونسترجع بذلك النشر الكلاسيكي $\zeta(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{12}+\cdots$ وفي 7.3 لا تنطبق الفرضية $g\ge0$ مباشرة على $\widetilde{B}_r$؛ نستعملها مع $g=\widetilde{B}_r+\max|B_r|$.

تعليق. تعطي صيغة أولر-ماكلوران نشرا لـ $\zeta(\alpha)$: $\zeta(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{12}-\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{720}+\cdots$ مع خطأ صريح. وبالاحتفاظ ببضعة حدود وتطبيقها انطلاقا من رتبة N (عوض 1) نحصل على $\zeta(\alpha)$ بدقة كبيرة؛ وهكذا حسب أولر $\zeta(2)$ بعشرين رقما عشريا.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri

II

Analyse complexe

Problème 24 — Session 2013

Théorème de Gauss–Lucas sur les racines du polynôme dérivé

Exercice 2, Partie 2 (traduit de l'arabe) © 2026 Saad Choukri

Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes. On note $z_1, \ldots, z_r$ ses racines deux à deux distinctes dans $\mathbb{C}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ leurs ordres de multiplicité respectifs ; on rappelle que $n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$ et qu'il existe un complexe non nul λ tel que

$$P(z) = \lambda \prod_{k=1}^{r} (z - z_k)^{\alpha_k}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

2.1. **Question (1)** Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_r\}$, $\dfrac{P'(z)}{P(z)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{\alpha_k}{z - z_k}$.

2.2. **Question (2)** En déduire que toute racine w du polynôme P' dans $\mathbb{C}$ peut s'écrire sous la forme $w = \sum_{k=1}^{r} t_k z_k$, où $t_1, \ldots, t_r$ sont des réels de $[0, 1]$ vérifiant $t_1 + \cdots + t_r = 1$ (les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de celles de P).

2.3. **Question (3)** Soit a un réel. Montrer que si toutes les racines de P appartiennent au demi-plan $\Pi_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < a\}$, alors il en est de même des racines de P'.

2.4. **Question (4)** On suppose dans cette question que les coefficients de P sont tous réels et que ses racines appartiennent à $\Pi_b = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < b\}$, où b est un réel. On note g la fonction définie sur l'intervalle $I_b = [b, +\infty[$ par $g(x) = |P(x)|$.

2.4.1. **(a)** Montrer que la fonction $x \mapsto P(x)$ garde un signe constant sur I_b, puis en déduire que g est dérivable sur I_b et déterminer sa dérivée.

2.4.2. **(b)** Montrer que la fonction g est strictement croissante sur I_b.

Commentaire. Théorème de Gauss–Lucas : les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P (car $\frac{P'}{P} = \sum \frac{\alpha_k}{z - z_k}$). C'est l'analogue complexe du théorème de Rolle ; en particulier, si toutes les racines de P sont dans un demi-plan, celles de P' aussi.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

النسخة العربية

مبرهنة غاوس-لوكاس حول جذور الحدودية المشتقة

دورة 2013 ▪ التمرين 2، الجزء 2 ▪ 2026 © سعد شكري

لتكن P حدودية درجتها $n \geq 1$ ومعاملاتها عقدية. نرمز بـ $z_1, \ldots, z_r$ لجذورها المختلفة مثنى مثنى في $\mathbb{C}$ وبـ $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ لرتب تضاعفها؛ نذكر أن $n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$ وأنه يوجد عدد عقدي غير منعدم λ بحيث

$$P(z) = \lambda \prod_{k=1}^{r} (z - z_k)^{\alpha_k}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

السؤال (1) بين أنه لكل $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_r\}$: $\dfrac{P'(z)}{P(z)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{\alpha_k}{z - z_k}$.

السؤال (2) استنتج أن كل جذر w للحدودية P' في $\mathbb{C}$ يكتب على الشكل $w = \sum_{k=1}^{r} t_k z_k$ حيث $t_1, \ldots, t_r$ أعداد حقيقية من $[0, 1]$ تحقق $t_1 + \cdots + t_r = 1$ (جذور P' توجد في الغلاف المحدب لجذور P).

السؤال (3) ليكن a عددا حقيقيا. بين أنه إذا كانت جميع جذور P تنتمي إلى نصف المستوى $\Pi_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < a\}$ فإن الأمر كذلك بالنسبة لجذور P'.

السؤال (4) نفترض في هذا السؤال أن معاملات P كلها حقيقية وأن جذورها تنتمي إلى $\Pi_b = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < b\}$ حيث b عدد حقيقي. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $I_b = [b, +\infty[$ بـ $g(x) = |P(x)|$.

(أ) بين أن الدالة $x \mapsto P(x)$ تحافظ على إشارة ثابتة على I_b، ثم استنتج أن g قابلة للاشتقاق على I_b وحدد مشتقتها.

(ب) بين أن g تزايدية قطعا على I_b.

تعليق. مبرهنة غاوس-لوكاس : جذور P' توجد في الغلاف المحدب لجذور P (لأن $\frac{P'}{P} = \sum \frac{\alpha_k}{z - z_k}$). وهي المماثل العقدي لمبرهنة رول؛ وبالخصوص إذا كانت جميع جذور P في نصف مستوى فإن جذور P' كذلك.

Problème 25 — Session 2013

Position des racines d'un polynôme par rapport à un disque : opérateurs A_z et théorème de Grace

Exercice 1, Partie 2 (traduit de l'arabe) © 2026 Saad Choukri

Notations. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ désigne l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients complexes de degré au plus n. On admet le théorème de d'Alembert–Gauss : tout polynôme à coefficients complexes de degré $n \geq 1$ admet une racine dans $\mathbb{C}$, et par suite exactement n racines comptées avec leur multiplicité. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé d'origine O ; $M(z)$ est le point d'affixe z. Pour un cercle $\mathcal{C} = \mathcal{C}(z_0, R)$, on note $\mathcal{C}^- = \{M(z) \mid |z - z_0| < R\}$ son intérieur et $\mathcal{C}^+ = \{M(z) \mid |z - z_0| > R\}$ son extérieur. Enfin f désigne l'inversion $M(z) \mapsto M(1/\bar{z})$ du plan privé de O.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). f est une involution ; si $\mathcal{C}$ est un cercle tel que $O \in \mathcal{C}^+$, alors $f(\mathcal{C})$ est un cercle $\mathcal{C}_1$ tel que $O \in \mathcal{C}_1^+$, et $f(\mathcal{C}^-) = \mathcal{C}_1^-$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

Soient $n \geq 2$ un entier et $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes (pas nécessairement distincts). On considère le polynôme $P(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$.

2.1. **Question (1)** Montrer que pour tout complexe ξ différent des z_k : $\dfrac{P'(\xi)}{P(\xi)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\xi - z_k}$.

2.2. **Question (2)** Pour tout complexe ξ différent des z_k et tel que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\xi - z_k} \neq 0$, on pose $\Delta_\xi = \xi - n\dfrac{P(\xi)}{P'(\xi)}$. Montrer que

$$\frac{1}{\Delta_\xi - \xi} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k - \xi}. \tag{1}$$

2.3. **Question (3)** **Définition.** Soient $m \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $Q \in \mathcal{P}_m$, on définit le polynôme $A_z Q$ par $A_z Q(t) = (z - t)Q'(t) + mQ(t)$, $t \in \mathbb{C}$.

2.3.1. **(a)** Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout complexe z et tout $Q \in \mathcal{P}_m$, $A_z Q \in \mathcal{P}_{m-1}$.

2.3.2. **(b)** On garde les données ci-dessus, en particulier la relation (1). Soit z un complexe différent des z_k ; on note

$$E = \{z_k \mid 1 \leq k \leq n,\ P'(z_k) = 0\}, \qquad F = \{\xi \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\} \mid P'(\xi) \neq 0,\ \Delta_\xi = z\}.$$

Montrer que $A_z P(\xi) = 0 \iff \xi \in E \cup F$. (On rappelle qu'ici $A_z P(t) = (z-t)P'(t) + nP(t)$, puisque $P \in \mathcal{P}_n$.)

2.4. **Question (4)** Montrer que pour tout complexe z, il existe $P_z \in \mathcal{P}_{n-2}$ tel que

$$A_z P(t) = \Big(nz - \sum_{k=1}^{n} z_k\Big)t^{n-1} + P_z(t), \qquad t \in \mathbb{C},$$

et en déduire que $A_z P \in \mathcal{P}_{n-2} \iff z = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k$.

2.5. **Question (5)** On suppose qu'il existe un cercle $\mathcal{C}$ tel que $O \in \mathcal{C}^+$ et $M(z_k) \in \mathcal{C}^-$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

2.5.1. **(a)** Montrer que le point d'affixe $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k$ appartient à $\mathcal{C}^-$.

2.5.2. **(b)** Montrer que le point d'affixe $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\bar{z}_k}$ appartient à $f(\mathcal{C})^-$.

2.5.3. **(c)** En déduire que le point d'affixe $\dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}}$ appartient à $\mathcal{C}^-$.

2.6. **Question (6)** On suppose qu'il existe un cercle $\mathcal{C}$ tel que $M(z_k) \in \mathcal{C}^-$ pour tout k. Montrer que si ξ est un complexe tel que $M(\xi) \in \mathcal{C}^+$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\xi - z_k} \neq 0$, alors $M(\Delta_\xi) \in \mathcal{C}^-$. *Indication : on pourra utiliser une translation.*

2.7. **Question (7)** On suppose qu'il existe un cercle $\mathcal{C}$ tel que $M(z_k) \in \mathcal{C}^-$ pour tout k. Soit z un complexe différent des z_k et tel que $M(z) \notin \mathcal{C}^-$.

2.7.1. **(a)** Montrer que le degré du polynôme $A_z P$ est $n - 1$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

2.7.2. **(b)** Soit ξ une racine du polynôme A_zP. Montrer que $M(\xi) \in \mathcal{C}^-$.

2.8. **Question (8)** Soit Q un polynôme de degré n ; on note $z'_1, \dots, z'_n$ ses racines dans $\mathbb{C}$ (pas nécessairement distinctes). On suppose qu'il existe un cercle $\mathcal{C}$ tel que $M(z_k) \in \mathcal{C}^-$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, et que $A_{z'_1} \circ A_{z'_2} \circ \cdots \circ A_{z'_n} P = 0$. Montrer qu'il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $M(z'_k) \in \mathcal{C}^-$.

On précise que $A_{z'_1} \circ \cdots \circ A_{z'_n}$ est la composée des applications $A_{z'_n} : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1}$, $A_{z'_{n-1}} : \mathcal{P}_{n-1} \to \mathcal{P}_{n-2}$, ..., $A_{z'_1} : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{C} = \mathcal{P}_0$.

N.B. : l'original demande en 2.5.2 que le point d'affixe $\frac{1}{n}\sum \frac{1}{z_k}$ appartienne à $f(\mathcal{C})^-$; comme $f(M(z)) = M(1/\bar{z})$, ce sont les affixes $1/\bar{z}_k$ qui sont dans $f(\mathcal{C})^-$ (les $1/z_k$ sont dans le disque symétrique par rapport à l'axe réel). Avec cette correction, 2.5.3 s'obtient en appliquant f.

Commentaire. Le résultat final est le théorème de Grace (1902) : si P et Q de degré n sont « apolaires » ($A_{z'_1} \cdots A_{z'_n} P = 0$) et si toutes les racines de P sont dans un disque, alors Q a au moins une racine dans ce disque. La partie 2.5 prouve en passant que le disque contient la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique des racines.

النسخة العربية

موضع جذور حدودية بالنسبة لقرص : المؤثرات A_z ومبرهنة غرايس

دورة 2013 ▪ التمرين 1، الجزء 2 ▪ 2026 © سعد شكري

ترميزات. من أجل $n \in \mathbb{N}$، نرمز بـ $\mathcal{P}_n$ لمجموعة الدوال الحدودية ذات المعاملات العقدية والتي درجتها أصغر من أو تساوي n. نقبل مبرهنة دالامبير-غاوس : كل حدودية عقدية درجتها $n \geq 1$ تقبل جذرا في $\mathbb{C}$، وبالتالي بالضبط n جذرا مع احتساب رتب التضاعف. المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم أصله O؛ $M(z)$ النقطة ذات اللحق z. من أجل دائرة $\mathcal{C} = \mathcal{C}(z_0, R)$، نرمز بـ $\mathcal{C}^- = \{M(z) \mid |z - z_0| < R\}$ لداخلها وبـ $\mathcal{C}^+ = \{M(z) \mid |z - z_0| > R\}$ لخارجها. وأخيرا يرمز f للانعكاس $M(z) \mapsto M(1/\bar{z})$ للمستوى المحروم من O.

نتائج مقبولة (مُثبَتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). f تطبيق التفافي؛ إذا كانت $\mathcal{C}$ دائرة بحيث $O \in \mathcal{C}^+$ فإن $f(\mathcal{C})$ دائرة $\mathcal{C}_1$ بحيث $O \in \mathcal{C}_1^+$، و $f(\mathcal{C}^-) = \mathcal{C}_1^-$.

ليكن $n \geq 2$ و $z_1, \dots, z_n$ أعدادا عقدية (ليست بالضرورة مختلفة). نعتبر $P(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$.

السؤال (1) بين أنه لكل عدد عقدي ξ مخالف للأعداد z_k : $\dfrac{P'(\xi)}{P(\xi)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\xi - z_k}$.

السؤال (2) لكل عدد عقدي ξ مخالف للأعداد z_k ويحقق $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\xi - z_k} \neq 0$ نضع $\Delta_\xi = \xi - n\dfrac{P(\xi)}{P'(\xi)}$. بين أن

$$\frac{1}{\Delta_\xi - \xi} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k - \xi}. \tag{1}$$

السؤال (3) **تعريف.** ليكن $m \in \mathbb{N}$ و $z \in \mathbb{C}$. لكل $Q \in \mathcal{P}_m$ نعرف الحدودية A_zQ بـ $A_zQ(t) = (z-t)Q'(t) + mQ(t)$، $t \in \mathbb{C}$.

(أ) ليكن $m \in \mathbb{N}^*$. بين أنه لكل عدد عقدي z ولكل $Q \in \mathcal{P}_m$: $A_zQ \in \mathcal{P}_{m-1}$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

(ب) نحتفظ بالمعطيات السابقة، وبالخصوص العلاقة (1). ليكن z عددا عقديا مخالفا للأعداد z_k؛ نضع

$$E=\{z_k \mid 1\le k\le n,\ P'(z_k)=0\},\qquad F=\{\xi\in\mathbb{C}\setminus\{z_1,\dots,z_n\} \mid P'(\xi)\neq 0,\ \Delta_\xi=z\}.$$

بين أن $A_zP(\xi)=0 \iff \xi\in E\cup F$. (نذكر أن $A_zP(t)=(z-t)P'(t)+nP(t)$ هنا لأن $P\in\mathcal{P}_n$.)

السؤال (4) بين أنه لكل عدد عقدي z توجد $P_z\in\mathcal{P}_{n-2}$ بحيث

$$A_zP(t)=\Big(nz-\sum_{k=1}^{n}z_k\Big)t^{n-1}+P_z(t),\qquad t\in\mathbb{C},$$

واستنتج أن $z=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z_k \iff A_zP\in\mathcal{P}_{n-2}$.

السؤال (5) نفترض أنه توجد دائرة $\mathcal{C}$ بحيث $O\in\mathcal{C}^+$ و$M(z_k)\in\mathcal{C}^-$ لكل $k\in\{1,\dots,n\}$.

(أ) بين أن النقطة ذات اللحق $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z_k$ تنتمي إلى $\mathcal{C}^-$.

(ب) بين أن النقطة ذات اللحق $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\bar z_k}$ تنتمي إلى $f(\mathcal{C})^-$.

(ج) استنتج أن النقطة ذات اللحق $\dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k}}$ تنتمي إلى $\mathcal{C}^-$.

السؤال (6) نفترض أنه توجد دائرة $\mathcal{C}$ بحيث $M(z_k)\in\mathcal{C}^-$ لكل k. بين أنه إذا كان ξ عددا عقديا بحيث $M(\xi)\in\mathcal{C}^+$ و$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\xi-z_k}\neq 0$ فإن $M(\Delta_\xi)\in\mathcal{C}^-$. إرشاد : يمكن استعمال إزاحة.

السؤال (7) نفترض أنه توجد دائرة $\mathcal{C}$ بحيث $M(z_k)\in\mathcal{C}^-$ لكل k. ليكن z عددا عقديا مخالفا للأعداد z_k بحيث $M(z)\notin\mathcal{C}^-$.

(أ) بين أن درجة الحدودية A_zP هي $n-1$.

(ب) ليكن ξ جذرا للحدودية A_zP. بين أن $M(\xi)\in\mathcal{C}^-$.

السؤال (8) لتكن Q حدودية درجتها n؛ نرمز بـ $z'_1,\dots,z'_n$ لجذورها في $\mathbb{C}$ (ليست بالضرورة مختلفة). نفترض أنه توجد دائرة $\mathcal{C}$ بحيث $M(z_k)\in\mathcal{C}^-$ لكل $k\in\{1,\dots,n\}$، وأن $A_{z'_1}\circ A_{z'_2}\circ\cdots\circ A_{z'_n}P=0$. بين أنه يوجد $k\in\{1,\dots,n\}$ بحيث $M(z'_k)\in\mathcal{C}^-$.

نوضح أن $A_{z'_1}\circ\cdots\circ A_{z'_n}$ هو مركب التطبيقات $A_{z'_n}:\mathcal{P}_n\to\mathcal{P}_{n-1}$، $A_{z'_{n-1}}:\mathcal{P}_{n-1}\to\mathcal{P}_{n-2}$، ...، $A_{z'_1}:\mathcal{P}_1\to\mathbb{C}=\mathcal{P}_0$.

ملاحظة : يطلب الأصل في 2.5.2 أن تنتمي النقطة ذات اللحق $\frac{1}{n}\sum\frac{1}{z_k}$ إلى $f(\mathcal{C})^-$؛ ولما كان $f(M(z))=M(1/\bar z)$ فإن الألحاق $1/\bar z_k$ هي التي تنتمي إلى $f(\mathcal{C})^-$ (أما $1/z_k$ فتوجد في القرص المماثل بالنسبة لمحور الأفاصيل). وبهذا التصحيح نحصل على 2.5.3 بتطبيق f.

تعليق. النتيجة النهائية هي مبرهنة غرايس (1902) : إذا كانت P وQ من الدرجة n «قطبيتين» ($A_{z'_1}\cdots A_{z'_n}P=0$) وكانت جميع جذور P في قرص، فإن Q تقبل جذرا واحدا على الأقل في هذا القرص. ويبين الجزء 2.5 عرضا أن القرص يحتوي على المعدل الحسابي والمعدل التوافقي للجذور.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

Problème 26 — Session 2021

Polynômes trigonométriques positifs : théorème de Fejér–Riesz

Partie 4 © 2026 Saad Choukri

Définitions. On appelle *polynôme trigonométrique* toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ pour laquelle il existe $N \in \mathbb{N}$ et des complexes $c_{-N}, \dots, c_0, \dots, c_N$ tels que $f(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\theta}$ pour tout réel θ ; lorsque f n'est pas nul, on suppose $(c_{-N}, c_N) \neq (0,0)$. Pour $a < b$, on pose $\int_a^b e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_a^b \cos(k\theta)\,\mathrm{d}\theta + i\int_a^b \sin(k\theta)\,\mathrm{d}\theta$ et $\int_a^b f(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \sum_k c_k \int_a^b e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta$; la fonction $\bar{f} : \theta \mapsto \overline{f(\theta)}$ est un polynôme trigonométrique et $\int_a^b \bar{f} = \overline{\int_a^b f}$. On admet le théorème de d'Alembert–Gauss : tout polynôme non constant P s'écrit $P(z) = a_n \prod_{k=1}^{r} (z - z_k)^{\alpha_k}$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ le polynôme trigonométrique défini par $f(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\theta}$.

4.1. **Question (1) Unicité de l'écriture d'un polynôme trigonométrique.**

4.1.1. **(a)** Soit $m \in \mathbb{Z}$. Calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{im\theta}\,\mathrm{d}\theta$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-im\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

4.1.2. **(b)** En déduire l'unicité de l'écriture d'un polynôme trigonométrique.

4.1.3. **(c)** Montrer que f est à valeurs réelles si, et seulement si, pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, $c_{-k} = \overline{c_k}$.

4.2. **Question (2) Lien entre polynôme et polynôme trigonométrique.** On suppose ici f non nul : $(c_{-N}, c_N) \neq (0,0)$.

4.2.1. **(a)** Montrer qu'il existe un unique polynôme P tel que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ f(\theta) = e^{-iN\theta} P(e^{i\theta})$, et calculer ses coefficients $a_0, a_1, \dots$ en fonction de $c_{-N}, \dots, c_0, \dots, c_N$.

4.2.2. **(b)** Préciser le degré de P lorsque $c_N \neq 0$.

4.3. **Question (3) Polynômes trigonométriques à valeurs réelles.** On suppose ici f non nul et à valeurs réelles, et l'on note $P(z) = \sum_{k=0}^{2N} a_k z^k$ le polynôme tel que $f(\theta) = e^{-iN\theta} P(e^{i\theta})$.

4.3.1. **(a)** Montrer que $P(0) \neq 0$ et vérifier que $a_{2N-k} = \overline{a_k}$ pour tout $k \in \{0, \dots, 2N\}$.

4.3.2. **(b)** On note $\bar{P}$ le polynôme $z \mapsto \sum_{k=0}^{2N} \overline{a_k} z^k$. Vérifier que $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ P(z) = z^{2N} \bar{P}(1/z)$.

4.3.3. **(c)** Montrer que si z_0 est une racine de P d'ordre de multiplicité $m \geq 1$, alors $z_0 \neq 0$ et $\dfrac{1}{\overline{z_0}}$ est aussi racine de P d'ordre m.

4.3.4. **(d)** Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\theta_0}$ soit racine de P d'ordre $m \geq 1$. On note Q le polynôme tel que $Q(e^{i\theta_0}) \neq 0$ et $P(z) = (z - e^{i\theta_0})^m Q(z)$ pour tout z.

(i) **(i)** Montrer qu'il existe une fonction continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que l'on exprimera à l'aide de Q, telle que $g(\theta_0) \neq 0$ et $\forall \theta \in \mathbb{R},\ f(\theta) = \left(\sin \dfrac{\theta - \theta_0}{2}\right)^m g(\theta)$.

(ii) **(ii)** Montrer que si f est de plus à valeurs réelles positives, alors m est pair.

4.4. **Question (4) Polynômes trigonométriques à valeurs réelles positives.** On suppose ici f non nul et à valeurs réelles positives, et on note encore $P(z) = \sum_{k=0}^{2N} a_k z^k$ le polynôme tel que $f(\theta) = e^{-iN\theta} P(e^{i\theta})$.

4.4.1. **(a)** Montrer que l'on peut factoriser $P(z) = a P_1(z) P_2(z)$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et où P_1, P_2 vérifient :

(i) **(i)** $P_1 = 1$ ou $P_1(z) = \prod_{k=1}^{p} (z - e^{i\theta_k})^{2\alpha_k}$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}^*$ et $\theta_1, \dots, \theta_p \in [0, 2\pi[$ deux à deux distincts ;

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

(ii) **(ii)** $P_2 = 1$ ou $P_2(z) = \prod_{k=1}^{q} \big((z - z_k)(z - 1/\overline{z_k})\big)^{\beta_k}$, avec $\beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \dots, z_q$ des complexes deux à deux distincts de modules < 1.

Que vaut la somme $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k + \sum_{k=1}^{q} \beta_k$ en fonction de N ?

4.4.2. **(b)** En déduire qu'il existe un polynôme R de degré N tel que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ f(\theta) = |R(e^{i\theta})|^2$. *On pourra remarquer que, pour tout réel θ et tout k :*

$$(e^{i\theta} - z_k)(e^{i\theta} - 1/\overline{z_k}) = -\frac{e^{i\theta}}{\overline{z_k}}|e^{i\theta} - z_k|^2 \quad \text{et} \quad (e^{i\theta} - e^{i\theta_k})^2 = -e^{i\theta}e^{i\theta_k}|e^{i\theta} - e^{i\theta_k}|^2.$$

Commentaire. Théorème de Fejér–Riesz (1915) : tout polynôme trigonométrique positif de degré N est le carré du module d'un polynôme de degré N évalué sur le cercle unité, $f(\theta) = |R(e^{i\theta})|^2$. C'est l'analogue trigonométrique de « tout polynôme positif sur $\mathbb{R}$ est somme de deux carrés » ; il est fondamental en traitement du signal (factorisation spectrale).

النسخة العربية

الحدوديات المثلثية الموجبة : مبرهنة فيجير-ريس

دورة 2021 ▪ الجزء 4 ▪ 2026 © سعد شكري

تعاريف. نسمي حدودية مثلثية كل تطبيق $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ بحيث يوجد $N \in \mathbb{N}$ وأعداد عقدية $c_{-N}, \dots, c_0, \dots, c_N$ تحقق $f(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\theta}$ لكل عدد حقيقي θ؛ وعندما تكون f غير منعدمة نفترض $(c_{-N}, c_N) \neq (0,0)$. من أجل $a < b$ نضع $\int_a^b f(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \sum_k c_k \int_a^b e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta$ و $\int_a^b e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_a^b \cos(k\theta)\,\mathrm{d}\theta + i\int_a^b \sin(k\theta)\,\mathrm{d}\theta$؛ الدالة $\bar f : \theta \mapsto \overline{f(\theta)}$ حدودية مثلثية و $\int_a^b \bar f = \overline{\int_a^b f}$. نقبل مبرهنة دالامبير-غاوس : كل حدودية غير ثابتة P تكتب $P(z) = a_n \prod_{k=1}^{r}(z - z_k)^{\alpha_k}$.

لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ الحدودية المثلثية $f(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\theta}$.

السؤال (1) وحدانية كتابة حدودية مثلثية.

(أ) ليكن $m \in \mathbb{Z}$. احسب التكاملين $\int_0^{2\pi} e^{im\theta}\,\mathrm{d}\theta$ و $\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-im\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

(ب) استنتج وحدانية كتابة حدودية مثلثية.

(ج) بين أن f ذات قيم حقيقية إذا وفقط إذا كان $c_{-k} = \overline{c_k}$ لكل $k \in \{0, \dots, N\}$.

السؤال (2) العلاقة بين حدودية وحدودية مثلثية. نفترض هنا أن f غير منعدمة : $(c_{-N}, c_N) \neq (0,0)$.

(أ) بين أنه توجد حدودية وحيدة P بحيث $\forall \theta \in \mathbb{R},\ f(\theta) = e^{-iN\theta}P(e^{i\theta})$، واحسب معاملاتها $a_0, a_1, \dots$ بدلالة $c_{-N}, \dots, c_0, \dots, c_N$.

(ب) حدد درجة P عندما يكون $c_N \neq 0$.

السؤال (3) الحدوديات المثلثية ذات القيم الحقيقية. نفترض هنا أن f غير منعدمة وذات قيم حقيقية، ونرمز بـ $P(z) = \sum_{k=0}^{2N} a_k z^k$ للحدودية التي تحقق $f(\theta) = e^{-iN\theta}P(e^{i\theta})$.

(أ) بين أن $P(0) \neq 0$ وتحقق من أن $a_{2N-k} = \overline{a_k}$ لكل $k \in \{0, \dots, 2N\}$.

(ب) نرمز بـ $\bar P$ للحدودية $z \mapsto \sum_{k=0}^{2N} \overline{a_k} z^k$. تحقق من أن $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ P(z) = z^{2N}\bar P(1/z)$.

(ج) بين أنه إذا كان z_0 جذرا لـ P رتبة تضاعفه $m \geq 1$ فإن $z_0 \neq 0$ وأن $\dfrac{1}{\overline{z_0}}$ أيضا جذر لـ P رتبة تضاعفه m.

(د) ليكن $\theta_0 \in \mathbb{R}$ بحيث يكون $e^{i\theta_0}$ جذرا لـ P رتبة تضاعفه $m \geq 1$، ولتكن Q الحدودية التي تحقق $Q(e^{i\theta_0}) \neq 0$ و $P(z) = (z - e^{i\theta_0})^m Q(z)$ لكل z.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ أو إعادة النشر دون إذن كتابي من المؤلف

(i) بين أنه توجد دالة متصلة $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، يعبر عنها بواسطة Q، بحيث $g(\theta_0) \neq 0$ و $\forall \theta \in \mathbb{R},\ f(\theta) = \left(\sin \dfrac{\theta - \theta_0}{2}\right)^m g(\theta)$.

(ii) بين أنه إذا كانت f علاوة على ذلك ذات قيم حقيقية موجبة فإن m زوجي.

السؤال (4) الحدوديات المثلثية ذات القيم الحقيقية الموجبة. نفترض هنا أن f غير منعدمة وذات قيم حقيقية موجبة، ونرمز مرة أخرى بـ $P(z) = \sum_{k=0}^{2N} a_k z^k$ للحدودية التي تحقق $f(\theta) = e^{-iN\theta} P(e^{i\theta})$.

(أ) بين أنه يمكن تعميل $P(z) = aP_1(z)P_2(z)$ حيث $a \in \mathbb{C}^*$ و P_1, P_2 تحققان :

(i) $P_1 = 1$ أو $P_1(z) = \prod_{k=1}^{p} (z - e^{i\theta_k})^{2\alpha_k}$ مع $p \in \mathbb{N}^*$ و $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{N}^*$ و $\theta_1, \ldots, \theta_p \in [0, 2\pi[$ مختلفة مثنى مثنى؛

(ii) $P_2 = 1$ أو $P_2(z) = \prod_{k=1}^{q} \left((z - z_k)(z - 1/\overline{z_k})\right)^{\beta_k}$ مع $\beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbb{N}^*$ و $z_1, \ldots, z_q$ أعداد عقدية مختلفة مثنى مثنى معياراتها أصغر من 1.

ما قيمة المجموع $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k + \sum_{k=1}^{q} \beta_k$ بدلالة N؟

(ب) استنتج أنه توجد حدودية R درجتها N بحيث $\forall \theta \in \mathbb{R},\ f(\theta) = |R(e^{i\theta})|^2$. يمكن ملاحظة أنه لكل عدد حقيقي θ ولكل k :

$$(e^{i\theta} - z_k)(e^{i\theta} - 1/\overline{z_k}) = -\frac{e^{i\theta}}{\overline{z_k}} |e^{i\theta} - z_k|^2 \quad \text{و} \quad (e^{i\theta} - e^{i\theta_k})^2 = -e^{i\theta} e^{i\theta_k} |e^{i\theta} - e^{i\theta_k}|^2.$$

تعليق. مبرهنة فيجير-ريس (1915) : كل حدودية مثلثية موجبة درجتها N هي مربع معيار حدودية درجتها N محسوبة على الدائرة الوحدية : $f(\theta) = |R(e^{i\theta})|^2$. وهي المماثل المثلثي للخاصية «كل حدودية موجبة على $\mathbb{R}$ مجموع مربعين»، ولها أهمية أساسية في معالجة الإشارة (التعميل الطيفي).

Problème 27 — Session 2013

Un théorème de Rolle pour les polynômes d'une variable complexe (Grace–Heawood)

Exercice 1, Partie 3 (traduit de l'arabe) © 2026 Saad Choukri

Notations. $\mathcal{P}_m$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré au plus m ; pour $z \in \mathbb{C}$ et $Q \in \mathcal{P}_m$, on pose $A_z Q(t) = (z - t)Q'(t) + mQ(t)$. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et un polynôme R à coefficients complexes, on définit $\int_\alpha^\beta R(t)\,\mathrm{d}t = R_1(\beta) - R_1(\alpha)$, où R_1 est un polynôme vérifiant $R_1' = R$. Pour $r, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq r$, $\binom{r}{k} = \frac{r!}{k!(r-k)!}$.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). (Théorème de Grace) Soient P un polynôme de degré $n \geq 2$ dont toutes les racines sont à l'intérieur strict d'un cercle $\mathcal{C}$, et Q un polynôme de degré n de racines $z_1', \ldots, z_n'$. Si $A_{z_1'} \circ \cdots \circ A_{z_n'} P = 0$, alors l'un au moins des z_k' est à l'intérieur strict de $\mathcal{C}$.

L'objectif est de démontrer le théorème suivant : *si P est un polynôme de degré $n \geq 2$ et si a et b sont deux complexes distincts tels que $P(a) = P(b)$, alors il existe un complexe c tel que*

$$P'(c) = 0 \qquad \text{et} \qquad \left|c - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{|a-b|}{2} \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}.$$

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

3.1. **Question (1)** Montrer que le théorème est vrai pour un polynôme de degré 2.

3.2. **Question (2)** Soient $n > 2$ un entier et a, b deux complexes distincts.

3.2.1. **(a)** Montrer qu'il existe des complexes $b_0, \dots, b_{n-1}$ tels que, pour tout polynôme Q défini par $Q(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \binom{n-1}{k} z^k$,

$$\int_0^1 Q\big(a + t(b-a)\big)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k \binom{n-1}{k} b_{n-1-k},$$

et déterminer l'expression de b_k en fonction de a, b, n et k, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

3.2.2. **(b)** Montrer que pour tout complexe z : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} b_k z^k = \frac{(z-a)^n - (z-b)^n}{n(b-a)}$.

3.3. **Question (3)** Soient $n > 2$ un entier et a, b deux complexes distincts.

3.3.1. **(a)** Déterminer le degré et les coefficients du polynôme $P_{a,b}$ défini par $P_{a,b}(z) = (z-a)^n - (z-b)^n$.

3.3.2. **(b)** Déterminer les racines de $P_{a,b}$ en fonction de a, b et du complexe $w_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

3.3.3. **(c)** Montrer que toute racine u du polynôme $P_{a,b}$ vérifie $\left|u - \dfrac{a+b}{2}\right| \leq \dfrac{|a-b|}{2} \dfrac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}$.

3.4. **Question (4)** Soit P un polynôme de degré $n > 2$, et a, b deux complexes tels que $a \neq b$ et $P(a) = P(b)$.

3.4.1. **(a)** Montrer qu'il existe des complexes $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que $P'(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k \binom{n-1}{k} z^k$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

3.4.2. **(b)** Soient $t_1, \dots, t_{n-1}$ les racines de P' dans $\mathbb{C}$. On admet que

$$(-1)^{n-1} \frac{a_{n-1}}{n!\,(b-a)} A_{t_1} A_{t_2} \cdots A_{t_{n-1}} P_{a,b} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} a_k b_{n-1-k}.$$

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 P'\big(a + t(b-a)\big)\,\mathrm{d}t$, puis en déduire que $A_{t_1} A_{t_2} \cdots A_{t_{n-1}} P_{a,b} = 0$.

3.4.3. **(c)** À l'aide du théorème de Grace, démontrer le théorème de Rolle énoncé au début.

N.B. : en 3.3.3, l'original énonce une inégalité stricte ; or les racines de $P_{a,b}$ sont les $u_k = \frac{a - b w_n^k}{1 - w_n^k}$ $(1 \leq k \leq n-1)$ et $\left|u_k - \frac{a+b}{2}\right| = \frac{|a-b|}{2} \left|\cot \frac{k\pi}{n}\right|$, avec égalité pour $k = 1$ et $k = n-1$. L'inégalité large est la bonne ; en 3.4.3, on applique le théorème de Grace à des cercles de rayon $\frac{|a-b|}{2} \cot \frac{\pi}{n} + \varepsilon$, puis on fait tendre ε vers 0.

Commentaire. Théorème de Grace–Heawood (1907) : si $P(a) = P(b)$, alors P' a une racine dans le disque de centre $\frac{a+b}{2}$ et de rayon $\frac{|a-b|}{2} \cot \frac{\pi}{n}$. C'est un substitut complexe du théorème de Rolle ; la constante $\cot \frac{\pi}{n}$ est optimale, comme le montre $P(z) = (z-a)^n - (z-b)^n$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

النسخة العربية
مبرهنة من نوع رول لحدوديات متغير عقدي (غرايس-هيوود)

دورة 2013 ▪ التمرين 1، الجزء 3 ▪ 2026 © سعد شكري

ترميزات. $\mathcal{P}_m$ مجموعة الحدوديات العقدية التي درجتها أصغر من أو تساوي m؛ من أجل $z \in \mathbb{C}$ و$Q \in \mathcal{P}_m$ نعرف $A_zQ(t) =: (z-t)Q'(t)+mQ(t)$. من أجل $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ وحدودية عقدية R نعرف $\int_\alpha^\beta R(t)\,\mathrm{d}t = R_1(\beta)-R_1(\alpha)$ حيث R_1 حدودية تحقق $R_1' = R$. من أجل $r, k \in \mathbb{N}$ مع $k \le r$: $\binom{r}{k} = \frac{r!}{k!(r-k)!}$.

نتائج مقبولة (مُثبتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). (مبرهنة غرايس) لتكن P حدودية درجتها $n \ge 2$ توجد جميع جذورها داخل دائرة $\mathcal{C}$ قطعا، وQ حدودية درجتها n جذورها $z_1', \dots, z_n'$. إذا كان $A_{z_1'} \circ \cdots \circ A_{z_n'} P = 0$ فإن أحد الأعداد z_k' على الأقل يوجد داخل $\mathcal{C}$ قطعا.

الهدف هو إثبات المبرهنة التالية : إذا كانت P حدودية درجتها $n \ge 2$ وكان a وb عددين عقديين مختلفين بحيث $P(a) = P(b)$، فإنه يوجد عدد عقدي c بحيث

$$P'(c) = 0 \qquad \text{و} \qquad \left|c - \frac{a+b}{2}\right| \le \frac{|a-b|}{2}\,\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}.$$

السؤال (1) بين أن المبرهنة صحيحة من أجل حدودية من الدرجة 2.

السؤال (2) ليكن $n > 2$ عددا صحيحا وa, b عددين عقديين مختلفين.

(أ) بين أنه توجد أعداد عقدية $b_0, \dots, b_{n-1}$ بحيث، لكل حدودية $Q(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \binom{n-1}{k} z^k$:

$$\int_0^1 Q\big(a+t(b-a)\big)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k \binom{n-1}{k} b_{n-1-k},$$

وحدد تعبير b_k بدلالة a وb وn وk لكل $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

(ب) بين أنه لكل عدد عقدي z: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} b_k z^k = \frac{(z-a)^n - (z-b)^n}{n(b-a)}$.

السؤال (3) ليكن $n > 2$ وa, b عددين عقديين مختلفين.

(أ) حدد درجة ومعاملات الحدودية $P_{a,b}(z) = (z-a)^n - (z-b)^n$.

(ب) حدد جذور $P_{a,b}$ بدلالة a وb والعدد العقدي $w_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

(ج) بين أن كل جذر u للحدودية $P_{a,b}$ يحقق $\left|u - \frac{a+b}{2}\right| \le \frac{|a-b|}{2}\,\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}$.

السؤال (4) لتكن P حدودية درجتها $n > 2$ وa, b عددين عقديين بحيث $a \ne b$ و$P(a) = P(b)$.

(أ) بين أنه توجد أعداد عقدية $a_0, \dots, a_{n-1}$ بحيث $P'(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k \binom{n-1}{k} z^k$ لكل $z \in \mathbb{C}$.

(ب) لتكن $t_1, \dots, t_{n-1}$ جذور P' في $\mathbb{C}$. نقبل أن

$$(-1)^{n-1}\frac{a_{n-1}}{n!\,(b-a)}\,A_{t_1}A_{t_2}\cdots A_{t_{n-1}}P_{a,b} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \binom{n-1}{k} a_k b_{n-1-k}.$$

احسب التكامل $\int_0^1 P'\big(a+t(b-a)\big)\,\mathrm{d}t$ ثم استنتج أن $A_{t_1}A_{t_2}\cdots A_{t_{n-1}}P_{a,b} = 0$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

(ج) باستعمال مبرهنة غرايس، أثبت مبرهنة رول المعلنة في البداية.

ملاحظة : يعطي الأصل في 3.3.3 متفاوتة قطعية؛ والحال أن جذور $P_{a,b}$ هي $u_k = \frac{a-bw_n^k}{1-w_n^k}$ ($1 \le k \le n-1$) وأن $\left|u_k - \frac{a+b}{2}\right| = \frac{|a-b|}{2}\left|\cot\frac{k\pi}{n}\right|$، مع تساو من أجل $k = 1$ و$k = n-1$. فالمتفاوتة الواسعة هي الصحيحة؛ وفي 3.4.3 نطبق مبرهنة غرايس على دوائر شعاعها $\varepsilon + \frac{|a-b|}{2}\cot\frac{\pi}{n}$ ثم نجعل ε يؤول إلى 0.

تعليق. مبرهنة غرايس-هيوود (1907) : إذا كان $P(a) = P(b)$ فإن P' تقبل جذرا في القرص الذي مركزه $\frac{a+b}{2}$ وشعاعه $\frac{|a-b|}{2}\cot\frac{\pi}{n}$. وهي بديل عقدي لمبرهنة رول؛ والثابتة $\cot\frac{\pi}{n}$ مثلى كما تبين الحدودية $P(z) = (z-a)^n - (z-b)^n$.

Problème 28 — Session 2021

Unicité du polynôme unitaire de norme minimale sur $[-1,1]$

Partie 5 © 2026 Saad Choukri

Notations. $\|P\| = \sup_{x\in[-1,1]}|P(x)|$; $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des polynômes unitaires de degré n ; T_n est le n-ième polynôme de Tchebychev ($T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$). Un polynôme trigonométrique est une fonction $f(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\theta}$.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). L'écriture d'un polynôme trigonométrique est unique ; $\inf\{\|P\|,\ P \in \mathbb{U}_n\} = \frac{1}{2^{n-1}}$; si f est un polynôme trigonométrique non nul à valeurs réelles positives, alors il existe un polynôme R de degré N tel que $f(\theta) = |R(e^{i\theta})|^2$ pour tout réel θ (théorème de Fejér–Riesz).

Soit $f(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\theta}$ un polynôme trigonométrique **non nul** et à **valeurs réelles positives**.

5.1. **Question (1)** Montrer qu'il existe un unique $(a_0, a_1, b_1, \ldots, a_N, b_N) \in \mathbb{R}^{2N+1}$, que l'on exprimera en fonction des c_k, tel que

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\quad f(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{N}\big(a_k\cos(k\theta) + b_k\sin(k\theta)\big).$$

5.2. **Question (2)** On considère un polynôme R de degré N tel que $f(\theta) = |R(e^{i\theta})|^2$ pour tout réel θ, et l'on note $\alpha_0, \ldots, \alpha_N$ ses coefficients, avec $\alpha_N \neq 0$.

5.2.1. **(a)** Vérifier que pour tout réel θ, $f(\theta) = \sum_{0\le k,j\le N} \overline{\alpha_j}\alpha_k e^{i(k-j)\theta}$, et en déduire que

$$a_N - ib_N = 2\,\overline{\alpha_0}\,\alpha_N \qquad \text{et} \qquad a_0 = \sum_{k=0}^{N}|\alpha_k|^2.$$

5.2.2. **(b)** En déduire que $a_N^2 + b_N^2 \le a_0^2$.

5.3. **Question (3) Étude d'un cas particulier.** On reprend les notations précédentes et on suppose que $\alpha_0 = \alpha_N = 1$. On pose $M(R) = \sup\{|R(e^{i\theta})| \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

5.3.1. **(a)** Que deviennent les relations trouvées à la question 5.2 ?

5.3.2. **(b)** À l'aide d'une intégration, montrer que $M(R)^2 \geq a_0$.

5.3.3. **(c)** En appliquant les résultats de la question 5.2 à la fonction $g : \theta \mapsto M(R)^2 - f(\theta)$, montrer que $M(R) \geq 2$, avec égalité si, et seulement si, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{N-1} = 0$.

5.4. **Question (4) Établissement du résultat annoncé.** Soit $n \geq 2$ un entier et $Q \in \mathbb{U}_n$ tel que $\|Q\| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$. On note Q_1 la fonction définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad Q_1(z) = 2^n z^n Q\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right). \tag{3}$$

5.4.1. **(a)** Justifier que l'expression (3) définit bien une fonction polynôme Q_1.

5.4.2. **(b)** Préciser le degré de Q_1, son terme constant et son terme de plus haut degré.

5.4.3. **(c)** Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $2\cos\theta = z + \dfrac{1}{z}$. Montrer que $\forall m \in \mathbb{Z},\ 2\cos(m\theta) = z^m + \dfrac{1}{z^m}$.

5.4.4. **(d)** Calculer $M(Q_1)$ et en déduire que $Q_1(z) = z^{2n} + 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

5.4.5. **(e)** Montrer que $2^{n-1}Q = T_n$.

N.B. : en 5.4.3, l'original écrit $2\cos\theta = z + 1/2$ au lieu de $z + 1/z$.

Commentaire. Le minimum $\inf_{P\in\mathbb{U}_n} \|P\| = 2^{1-n}$ est atteint *seulement* par $2^{1-n}T_n$: c'est l'unicité du polynôme de meilleure approximation de Tchebychev. La preuve, via Fejér–Riesz et l'inégalité $a_N^2 + b_N^2 \leq a_0^2$, est élégante et évite l'argument classique d'alternance.

النسخة العربية

وحدانية الحدودية الواحدية ذات المنظم الأصغري على $[-1, 1]$

دورة 2021 ▪ الجزء 5 ▪ 2026 © سعد شكري

ترميزات. $\|P\| = \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|$؛ $\mathbb{U}_n$ مجموعة الحدوديات الواحدية من الدرجة n؛ T_n حدودية تشيبيشيف رقم n ($T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$). الحدودية المثلثية دالة من الشكل $f(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\theta}$.

نتائج مقبولة (مُثبَتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). كتابة حدودية مثلثية وحيدة؛ $\inf\{\|P\|,\ P \in \mathbb{U}_n\} = \frac{1}{2^{n-1}}$؛ إذا كانت f حدودية مثلثية غير منعدمة ذات قيم حقيقية موجبة، فإنه توجد حدودية R درجتها N بحيث $f(\theta) = |R(e^{i\theta})|^2$ لكل عدد حقيقي θ (مبرهنة فيجير-ريس).

لتكن $f(\theta) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\theta}$ حدودية مثلثية **غير منعدمة** و**ذات قيم حقيقية موجبة**.

السؤال (1) بين أنه يوجد $(a_0, a_1, b_1, \ldots, a_N, b_N) \in \mathbb{R}^{2N+1}$ وحيد، يعبر عنه بدلالة c_k، بحيث

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} \big(a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)\big).$$

السؤال (2) نعتبر حدودية R درجتها N بحيث $f(\theta) = |R(e^{i\theta})|^2$ لكل عدد حقيقي θ، ونرمز بـ $\alpha_0, \ldots, \alpha_N$ لمعاملاتها مع $\alpha_N \neq 0$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

(أ) تحقق من أنه لكل عدد حقيقي θ : $f(\theta) = \sum_{0\le k,j\le N} \overline{\alpha_j}\alpha_k e^{i(k-j)\theta}$، واستنتج أن

$$a_0 = \sum_{k=0}^{N} |\alpha_k|^2. \qquad \text{و} \qquad a_N - ib_N = 2\,\overline{\alpha_0}\,\alpha_N$$

(ب) استنتج أن $a_N^2 + b_N^2 \le a_0^2$.

السؤال (3) دراسة حالة خاصة. نحتفظ بالترميزات السابقة ونفترض أن $\alpha_0 = \alpha_N = 1$. نضع $M(R) = \sup\{|R(e^{i\theta})| \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

(أ) ماذا تصبح العلاقات المحصل عليها في السؤال 5.2؟

(ب) باستعمال تكامل، بين أن $M(R)^2 \ge a_0$.

(ج) بتطبيق نتائج 5.2 على الدالة $g : \theta \mapsto M(R)^2 - f(\theta)$، بين أن $M(R) \ge 2$، مع التساوي إذا وفقط إذا كان $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{N-1} = 0$.

السؤال (4) إثبات النتيجة المعلنة. ليكن $n \ge 2$ و$Q \in \mathbb{U}_n$ بحيث $\|Q\| = \frac{1}{2^{n-1}}$. نعتبر الدالة Q_1 المعرفة بـ

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad Q_1(z) = 2^n z^n Q\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right). \tag{3}$$

(أ) علل أن التعبير (3) يعرف فعلا دالة حدودية Q_1.

(ب) حدد درجة Q_1 وحدها الثابت وحدها الأعلى درجة.

(ج) ليكن $z \in \mathbb{C}^*$ و$\theta \in \mathbb{R}$ بحيث $2\cos\theta = z + \frac{1}{z}$. بين أن $\forall m \in \mathbb{Z},\ 2\cos(m\theta) = z^m + \frac{1}{z^m}$.

(د) احسب $M(Q_1)$ واستنتج أن $Q_1(z) = z^{2n} + 1$ لكل $z \in \mathbb{C}$.

(هـ) بين أن $2^{n-1}Q = T_n$.

ملاحظة : يكتب الأصل في 5.4.3 : $2\cos\theta = z + 1/2$ عوض $z + 1/z$.

تعليق. القيمة الدنيا $\inf_{P\in\mathbb{U}_n} \|P\| = 2^{1-n}$ لا تبلغها إلا الحدودية $2^{1-n}T_n$: إنها وحدانية حدودية أفضل تقريب لتشيبيشيف. والبرهان، عبر فيجير-ريس والمتفاوتة $a_N^2 + b_N^2 \le a_0^2$، أنيق ويتجنب حجة التناوب الكلاسيكية.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

III

Calcul intégral

Problème 29 — Session 2015

Formule de Taylor avec reste intégral et calcul de $\ln 2$

Problème, Partie 1 © 2026 Saad Choukri

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Soient a et b deux réels distincts de I. Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, on pose

$$R_k = \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

1.1. **Question (1)** Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $R_{k-1} = \dfrac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_k$.

1.2. **Question (2)** En déduire la formule de Taylor d'ordre $n-1$ avec reste intégral :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

1.3. **Question (3)** **Inégalité de Taylor–Lagrange d'ordre $n-1$.** On suppose que $f^{(n)}$ est bornée sur I et soit $M \geq 0$ tel que $|f^{(n)}(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$. Montrer que

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^n}{n!} M.$$

1.4. **Question (4)** **Application.** On considère la fonction h définie sur $]-1, +\infty[$ par $h(t) = \ln(1+t)$, et on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ pour tout entier $n \geq 1$.

1.4.1. **(a)** Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]-1, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que pour tout $n \geq 1$:

$$\forall t > -1, \quad h^{(n)}(t) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+t)^n}.$$

1.4.2. **(b)** Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes.

1.4.3. **(c)** En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

1.4.4. **(d)** À l'aide de l'inégalité de Taylor–Lagrange, montrer que la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est $\ln 2$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

Commentaire. La formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor–Lagrange donnent $\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2$: c'est la série harmonique alternée, qui converge lentement (erreur de l'ordre de $\frac{1}{2n}$).

النسخة العربية

صيغة طايلور بباق تكاملي وحساب $\ln 2$

دورة 2015 ▪ المسألة، الجزء 1 ▪ 2026 © سعد شكري

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ و I مجالا غير تافه من $\mathbb{R}$ و $f:I\to\mathbb{R}$ دالة من الصنف $\mathcal{C}^n$ على I. ليكن a و b عددين حقيقيين مختلفين من I. لكل $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$ نضع

$$R_k=\int_a^b\frac{(b-t)^k}{k!}f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

السؤال (1) بين أنه لكل $k\in\{1,\dots,n-1\}$: $R_{k-1}=\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+R_k$.

السؤال (2) استنتج صيغة طايلور من الرتبة $n-1$ بباق تكاملي :

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^b\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

السؤال (3) **متفاوتة طايلور-لاغرانج من الرتبة** $n-1$. نفترض أن $f^{(n)}$ محدودة على I وليكن $M\geq 0$ بحيث $|f^{(n)}(x)|\leq M$ لكل $x\in I$. بين أن

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right|\leq\frac{|b-a|^n}{n!}M.$$

السؤال (4) **تطبيق.** نعتبر الدالة h المعرفة على $]-1,+\infty[$ بـ $h(t)=\ln(1+t)$، ونضع $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ لكل عدد صحيح $n\geq 1$.

(أ) بين أن h من الصنف $\mathcal{C}^n$ على $]-1,+\infty[$ لكل $n\in\mathbb{N}$، وأنه لكل $n\geq 1$:

$$\forall t>-1,\quad h^{(n)}(t)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+t)^n}.$$

(ب) بين أن المتتاليتين $(S_{2n})_{n\geq 1}$ و $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ متحاذيتان.

(ج) استنتج أن المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ متقاربة.

(د) باستعمال متفاوتة طايلور-لاغرانج، بين أن نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ هي $\ln 2$.

تعليق. تعطي صيغة طايلور بباق تكاملي ومتفاوتة طايلور-لاغرانج $\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2$: إنها المتسلسلة التوافقية المتناوبة، وتقاربها بطيء (خطأ من رتبة $\frac{1}{2n}$).

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

Problème 30 — Session 2025

Formule de Taylor avec reste intégral et série exponentielle

Problème, Partie 2 © 2026 Saad Choukri

2.1. **Question (1) Formule de Taylor avec reste intégral.** Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Pour tout $(a,b) \in I^2$ et tout $k \in \{0,\dots,n\}$, on pose $R_k = \displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t$.

2.1.1. **(a)** Montrer que pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, $R_{k-1} = \dfrac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_k$.

2.1.2. **(b)** En déduire la formule de Taylor à l'ordre n avec reste intégral :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

2.2. **Question (2) Étude de quelques suites de nombres réels.**

2.2.1. **(a)** Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs telle que la suite $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ converge vers 0. Montrer que (x_n) converge vers 0.

2.2.2. **(b)** Soit λ un réel strictement positif. Montrer que la suite $\left(\frac{\lambda^n}{n!}\right)$ converge vers 0.

2.3. **Question (3) Application au calcul de la limite d'une suite.**

2.3.1. **(a)** Justifier que pour tout réel x et tout entier $n \geq 1$, $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,\mathrm{d}t$.

2.3.2. **(b)** Montrer que pour tout réel non nul x et tout entier $n \geq 1$, $\left|\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$.

2.3.3. **(c)** En déduire la limite de la suite $\left(\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,\mathrm{d}t\right)_{n\geq 1}$, pour tout réel x.

2.3.4. **(d)** Montrer que pour tout réel x, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)_{n\geq 0}$ converge vers e^x. On écrit alors $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Commentaire. La majoration du reste intégral donne $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ pour tout réel x, et la convergence est très rapide grâce au facteur $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Ce résultat sert de modèle au théorème de Bernstein étudié ensuite.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

النسخة العربية

صيغة طايلور بباق تكاملي والمتسلسلة الأسية

دورة 2025 ▪ المسألة، الجزء 2 ▪ 2026 © سعد شكري

السؤال (1) صيغة طايلور بباق تكاملي. ليكن I مجالا غير تافه من $\mathbb{R}$ و$n \in \mathbb{N}$ و$f : I \to \mathbb{R}$ دالة من الصنف $\mathcal{C}^{n+1}$.
لكل $(a,b) \in I^2$ ولكل $k \in \{0,\dots,n\}$ نضع $R_k = \displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t$.

(أ) بين أنه لكل $k \in \{1,\dots,n\}$: $R_{k-1} = \dfrac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_k$.

(ب) استنتج صيغة طايلور من الرتبة n بباق تكاملي :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

السؤال (2) دراسة بعض المتتاليات العددية.

(أ) لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ متتالية أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث تتقارب المتتالية $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ نحو 0. بين أن (x_n) متقاربة نحو 0.

(ب) ليكن λ عددا حقيقيا موجبا قطعا. بين أن المتتالية $\left(\frac{\lambda^n}{n!}\right)$ متقاربة نحو 0.

السؤال (3) تطبيق على حساب نهاية متتالية.

(أ) علل أنه لكل عدد حقيقي x ولكل عدد صحيح $n \geq 1$: $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,\mathrm{d}t$.

(ب) بين أنه لكل عدد حقيقي غير منعدم x ولكل عدد صحيح $n \geq 1$: $\left|\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$.

(ج) استنتج نهاية المتتالية $\left(\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,\mathrm{d}t\right)_{n\geq 1}$ لكل عدد حقيقي x.

(د) بين أنه لكل عدد حقيقي x تتقارب المتتالية $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)_{n\geq 0}$ نحو e^x. ونكتب إذن $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

تعليق. تعطي مكبورة الباقي التكاملي $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ لكل عدد حقيقي x، والتقارب سريع جدا بفضل العامل $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.
وتشكل هذه النتيجة نموذجا لمبرهنة برنشتاين المدروسة بعد ذلك.

Problème 31 ..... Session 2016

L'intégrale de Poisson $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(r^2 - 2r\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$

Exercice © 2026 Saad Choukri

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale de Poisson, définie par

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(r^2 - 2r\cos\theta + 1\right)\mathrm{d}\theta, \qquad r \in]-1,1[. \tag{1}$$

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

Partie 1 : calcul d'une première intégrale

Pour tout $r \in]-1,1[$, on considère la fonction P_r définie sur $\mathbb{R}$ par $P_r(\theta) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)$.

1.1. **Question (1)** Montrer que pour tout réel θ, $P_r(\theta) = \dfrac{1-r^2}{r^2-2r\cos\theta+1}$.

1.2. **Question (2)** Montrer que pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $-\pi < a < b < \pi$,

$$\int_a^b P_r(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\int_{\tan(a/2)}^{\tan(b/2)} \frac{1-r^2}{(1-r)^2+t^2(1+r)^2}\,\mathrm{d}t.$$

1.3. **Question (3)** En déduire que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi$.

Partie 2 : calcul de l'intégrale de Poisson

Soit $\theta \in \mathbb{R}$; on considère la fonction f_θ définie sur $]-1,1[$ par $f_\theta(r) = \ln\left(r^2-2r\cos\theta+1\right)$.

2.1. **Question (4)** Montrer que f_θ est deux fois dérivable sur $]-1,1[$ et que $\forall r \in]-1,1[$, $|f_\theta''(r)| \le \dfrac{12}{(1-|r|)^4}$.

2.2. **Question (5)** Soit $R \in]0,1[$. Déduire de ce qui précède que pour tout $r \in [-R,R]$ et tout réel $h \neq 0$ tel que $r+h \in [-R,R]$,

$$\left|f_\theta(r+h) - f_\theta(r) - hf_\theta'(r)\right| \le \frac{h^2}{2} \times \frac{12}{(1-R)^4}.$$

Indication : on peut utiliser une intégration par parties.

2.3. **Question (6)** Soit ψ la fonction définie sur $]-1,1[$ par $\psi(r) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(r^2-2r\cos\theta+1\right)\mathrm{d}\theta$.

2.3.1. **(a)** Montrer que ψ est dérivable sur $]-1,1[$ et que $\psi'(r) = 2\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r-\cos\theta}{r^2-2r\cos\theta+1}\,\mathrm{d}\theta$.

2.3.2. **(b)** Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta}{r^2-2r\cos\theta+1}\,\mathrm{d}\theta$, et en déduire que ψ est constante.

2.4. **Question (7)** Déterminer la valeur de l'intégrale de Poisson (1).

N.B. : l'original écrit $\frac{12}{(1-R)^2}$ en 2.2, ce qui ne découle pas de la majoration de 2.1 ; on a rétabli $(1-R)^4$. (Une étude plus fine donne d'ailleurs $|f_\theta''(r)| \le \frac{2}{(1-|r|)^2}$.)

Commentaire. L'intégrale de Poisson vaut 0 pour $|r|<1$: $\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)\,\mathrm{d}\theta = 0$. C'est un cas particulier de la formule de Jensen (moyenne de $\ln|1-re^{i\theta}|$ sur le cercle) ; pour $|r|>1$, elle vaut $4\pi\ln|r|$. La fonction P_r est le noyau de Poisson, d'intégrale 2π.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

النسخة العربية

تكامل بواسون $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(r^2 - 2r\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$

دورة 2016 ▪ التمرين ▪ 2026 © سعد شكري

الهدف من هذا التمرين هو حساب تكامل بواسون المعرف بـ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(r^2 - 2r\cos\theta + 1\right)\mathrm{d}\theta, \qquad r \in]-1,1[. \tag{1}$$

الجزء 1 : حساب تكامل أول

لكل $r \in]-1,1[$ نعتبر الدالة P_r المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $P_r(\theta) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)$.

السؤال (1) بين أنه لكل عدد حقيقي θ : $P_r(\theta) = \dfrac{1-r^2}{r^2-2r\cos\theta+1}$.

السؤال (2) بين أنه لكل $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ بحيث $-\pi < a < b < \pi$:

$$\int_a^b P_r(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\int_{\tan(a/2)}^{\tan(b/2)} \frac{1-r^2}{(1-r)^2+t^2(1+r)^2}\,\mathrm{d}t.$$

السؤال (3) استنتج أن $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi$.

الجزء 2 : حساب تكامل بواسون

ليكن $\theta \in \mathbb{R}$؛ نعتبر الدالة f_θ المعرفة على $]-1,1[$ بـ $f_\theta(r) = \ln\left(r^2-2r\cos\theta+1\right)$.

السؤال (4) بين أن f_θ قابلة للاشتقاق مرتين على $]-1,1[$ وأن $\forall r \in]-1,1[,\ |f''_\theta(r)| \le \dfrac{12}{(1-|r|)^4}$.

السؤال (5) ليكن $R \in]0,1[$. استنتج أنه لكل $r \in [-R,R]$ ولكل عدد حقيقي $h \neq 0$ بحيث $r+h \in [-R,R]$:

$$\left|f_\theta(r+h) - f_\theta(r) - hf'_\theta(r)\right| \le \frac{h^2}{2} \times \frac{12}{(1-R)^4}.$$

إرشاد : يمكن استعمال مكاملة بالأجزاء.

السؤال (6) لتكن ψ الدالة المعرفة على $]-1,1[$ بـ $\psi(r) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(r^2-2r\cos\theta+1\right)\mathrm{d}\theta$.

(أ) بين أن ψ قابلة للاشتقاق على $]-1,1[$ وأن $\psi'(r) = 2\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r-\cos\theta}{r^2-2r\cos\theta+1}\,\mathrm{d}\theta$.

(ب) احسب التكامل $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta}{r^2-2r\cos\theta+1}\,\mathrm{d}\theta$، واستنتج أن ψ ثابتة.

السؤال (7) حدد قيمة تكامل بواسون (1).

ملاحظة : يكتب الأصل $\frac{12}{(1-R)^2}$ في 2.2، وهذا لا ينتج عن مكبورة 2.1؛ أعدنا $(1-R)^4$. (ودراسة أدق تعطي $|f''_\theta(r)| \le \frac{2}{(1-|r|)^2}$.)

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

تعليق. تكامل بواسون منعدم من أجل $|r|<1$: $\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)\,\mathrm{d}\theta=0$. وهو حالة خاصة من صيغة جنسن (معدل $\ln|1-re^{i\theta}|$ على الدائرة)؛ ومن أجل $|r|>1$ يساوي $4\pi\ln|r|$. والدالة P_r هي نواة بواسون وتكاملها 2π.

Problème 32 — Session 2017

Irrationalité de e^r pour tout rationnel r non nul

Partie 2 © 2026 Saad Choukri

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). Pour $U_n(x)=\frac{x^n(1-x)^n}{n!}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$: $U_n^{(k)}(0)=U_n^{(k)}(1)=0$ pour $0\le k\le n-1$, et $U_n^{(n+k)}(0)$, $U_n^{(n+k)}(1)$ sont des entiers pour $0\le k\le n$. La formule d'intégration par parties itérée : $\int_a^b f^{(n)}g=(-1)^n\int_a^b fg^{(n)}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left[f^{(n-k)}g^{(k-1)}\right]_a^b$. Pour tout réel λ, $\lambda^n/n!\to 0$.

Le but est de démontrer que e^r est irrationnel pour tout nombre rationnel r non nul.

2.1. **Question (1) Le nombre e.** On considère les suites $(u_n)_{n\ge1}$ et $(v_n)_{n\ge1}$ définies par

$$u_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!},\qquad v_n=u_n+\frac{1}{n\cdot n!}.$$

2.1.1. **(a)** Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et que leur limite commune est le nombre e.

2.1.2. **(b)** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n<e<v_n$, et en déduire que $2{,}71<e<2{,}72$.

2.1.3. **(c) Irrationalité de e.** On raisonne par l'absurde en supposant que $e=\frac{p}{q}$ avec $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $q\ge1$, p et q premiers entre eux. Montrer que $q!\,u_q$ est un entier naturel et aboutir à une contradiction.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère les polynômes $U_n(x)=\dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$ et $L_n=U_n^{(n)}$, et l'on pose

$$T_n(x)=\int_0^1 e^{xt}L_n(t)\,\mathrm{d}t,\qquad x\in\mathbb{R}.$$

2.2. **Question (2)** Montrer que pour tout $(n,x)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}^*$, $T_n(x)=(-1)^n x^n\displaystyle\int_0^1 e^{xt}U_n(t)\,\mathrm{d}t$, et que $T_n(x)\neq0$.

2.3. **Question (3)** Montrer que pour tout $(n,x)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}^*$, $|x^nT_n(x)|\le\dfrac{x^{2n}}{4^n n!}\max(1,e^x)$, puis en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}x^nT_n(x)=0$.

2.4. **Question (4)** Montrer que pour tout entier $n\ge1$, il existe deux polynômes P_n et Q_n à coefficients entiers et de degré au plus n tels que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad x^{n+1}T_n(x)=Q_n(x)e^x-P_n(x).$$

Indication : utiliser des intégrations par parties successives et les valeurs entières des dérivées de U_n en 0 et 1.

2.5. **Question (5)** Montrer que e^r est irrationnel pour tout $r\in\mathbb{N}^*$.

2.6. **Question (6)** En déduire que e^r est irrationnel pour tout rationnel r non nul, puis que $\ln(\alpha)$ est irrationnel pour tout entier $\alpha\ge2$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

N.B. : plusieurs corrections : l'original annonce $2{,}66 < e < 2{,}71$, or $e \approx 2{,}71828 > 2{,}71$ (on a $u_5 \approx 2{,}7167$ et $v_5 \approx 2{,}7183$) ; il définit $T_n(x) = \int_0^1 x^t L_n(t)\,\mathrm{d}t$ au lieu de $\int_0^1 e^{xt} L_n(t)\,\mathrm{d}t$; il écrit « $\lim_{x\to+\infty}$ » au lieu de $\lim_{n\to+\infty}$; enfin la relation de 2.4, écrite avec x^{2n+1} et des coefficients « positifs », a été remplacée par l'égalité exacte obtenue par $n+1$ intégrations par parties.

Commentaire. Ce résultat, dû à Lambert (1768) pour e, est démontré ici avec les polynômes de Legendre décalés $L_n = U_n^{(n)}$ (méthode de Hermite). En particulier, $\ln q$ est irrationnel pour tout rationnel $q > 0$, $q \neq 1$; par exemple $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 10$ sont irrationnels.

النسخة العربية

لاجذرية e^r لكل عدد جذري r غير منعدم

دورة 2017 ▪ الجزء 2 ▪ 2026 © سعد شكري

نتائج مقبولة (مُثبَتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). من أجل $U_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) : $U_n^{(k)}(0) = U_n^{(k)}(1) = 0$ لكل $0 \le k \le n-1$، و$U_n^{(n+k)}(0)$ و$U_n^{(n+k)}(1)$ أعداد صحيحة لكل $0 \le k \le n$. صيغة المكاملة بالأجزاء المتكررة : $\int_a^b f^{(n)} g = (-1)^n \int_a^b f g^{(n)} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left[f^{(n-k)} g^{(k-1)}\right]_a^b$. لكل عدد حقيقي λ : $\lambda^n/n! \to 0$.

الهدف هو إثبات أن e^r عدد لاجذري لكل عدد جذري r غير منعدم.

السؤال (1) **العدد** e. نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\ge1}$ و$(v_n)_{n\ge1}$ المعرفتين بـ

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

(أ) بين أن (u_n) و(v_n) متحاذيتان وأن نهايتهما المشتركة هي العدد e.

(ب) بين أنه لكل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n < e < v_n$، واستنتج أن $2{,}71 < e < 2{,}72$.

(ج) **لاجذرية** e. نستدل بالخلف ونفترض أن $e = \frac{p}{q}$ مع $(p,q) \in \mathbb{N}^2$، $q \ge 1$، وp وq أوليان فيما بينهما. بين أن $q!\,u_q$ عدد صحيح طبيعي ثم توصل إلى تناقض.

لكل $n \in \mathbb{N}^*$ نعتبر الحدوديتين $U_n(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$ و$L_n = U_n^{(n)}$، ونضع

$$T_n(x) = \int_0^1 e^{xt} L_n(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

السؤال (2) بين أنه لكل $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^*$: $T_n(x) = (-1)^n x^n \displaystyle\int_0^1 e^{xt} U_n(t)\,\mathrm{d}t$، وأن $T_n(x) \neq 0$.

السؤال (3) بين أنه لكل $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^*$: $|x^n T_n(x)| \le \dfrac{x^{2n}}{4^n n!} \max(1, e^x)$، ثم استنتج أن $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x^n T_n(x) = 0$.

السؤال (4) بين أنه لكل عدد صحيح $n \ge 1$ توجد حدوديتان P_n وQ_n معاملاتهما صحيحة ودرجتهما أصغر من أو تساوي n بحيث

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^{n+1} T_n(x) = Q_n(x) e^x - P_n(x).$$

إرشاد : استعمل مكاملات بالأجزاء متتالية والقيم الصحيحة لمشتقات U_n في 0 و1.

السؤال (5) بين أن e^r لاجذري لكل $r \in \mathbb{N}^*$.

السؤال (6) استنتج أن e^r لاجذري لكل عدد جذري r غير منعدم، ثم أن $\ln(\alpha)$ لاجذري لكل عدد صحيح $\alpha \ge 2$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

ملاحظة : تصحيحات عديدة : يعلن الأصل $2{,}66 < e < 2{,}71$ والحال أن $e \approx 2{,}71828 > 2{,}71$ ($u_5 \approx 2{,}7167$ و$v_5 \approx 2{,}7183$)؛ ويعرف $T_n(x) = \int_0^1 x^t L_n(t)\,\mathrm{d}t$ عوض $\int_0^1 e^{xt} L_n(t)\,\mathrm{d}t$؛ ويكتب « $\lim_{x\to+\infty}$ » عوض « $\lim_{n\to+\infty}$ »؛ وأخيرا عوضنا علاقة 2.4، المكتوبة بـ x^{2n+1} وبمعاملات « موجبة »، بالمتساوية المضبوطة الناتجة عن $n+1$ مكاملة بالأجزاء.

تعليق. هذه النتيجة، التي تعود إلى لامبرت (1768) بالنسبة لـ e، مبرهنة هنا بحدوديات لوجاندر المزاحة $L_n = U_n^{(n)}$ (طريقة هيرميت). وبالخصوص $\ln q$ لاجذري لكل عدد جذري موجب $q \neq 1$؛ مثلا $\ln 2$ و$\ln 3$ و$\ln 10$ لاجذرية.

Problème 33 — Session 2024

Le problème de Bâle : $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ par une méthode intégrale

Problème 1, Partie 2 © 2026 Saad Choukri

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). La suite (u_n) converge ; si l'on note l sa limite, la suite $(u_n - l)$ est équivalente à la suite $\left(-\frac{1}{n}\right)$.

2.1. **Question (1)** Soient c et d deux réels et k un entier naturel non nul. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (ct^2 + dt)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t$.

2.2. **Question (2)** En déduire qu'il existe un unique couple (a, b) de réels tel que pour tout entier $k \geq 1$,

$$\int_0^1 (at^2 + bt)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}.$$

2.3. **Question (3)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (at^2 + bt)\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\pi t)\Big)\,\mathrm{d}t$ en fonction de u_n.

2.4. **Question (4)** Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout $\theta \in]0, \pi[$, $1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\theta) = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin\theta}$.

2.5. **Question (5)** **Un résultat utile.** Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

2.5.1. **(a)** Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(0) - f(1)\cos\lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t$.

2.5.2. **(b)** En déduire que $\lambda \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$ (lemme de Riemann–Lebesgue).

2.6. **Question (6)** **Étude d'une fonction auxiliaire.** On considère la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{\pi^2(t^2 - 2t)}{4\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)} \text{ si } t \neq 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = -\pi.$$

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

2.6.1. **(a)** Montrer soigneusement que f est continue sur le segment $[0,1]$.

2.6.2. **(b)** Justifier que f est dérivable sur $]0,1]$ et que sa dérivée f' possède une limite finie à droite en 0, notée L.

2.6.3. **(c)** À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

2.6.4. **(d)** En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

2.7. **Question (7)** Vérifier que pour tout $t \in [0,1]$, $(at^2+bt)\Big(\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\Big) = f(t)\sin\Big((2n+1)\dfrac{\pi t}{2}\Big)$.

2.8. **Question (8)** En déduire que la suite (u_n) converge vers le réel $\dfrac{\pi^2}{6}$, puis donner un équivalent de la suite $\left(\dfrac{\pi^2}{6}-u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

N.B. : l'énoncé original de 2.1 (« si c et d sont deux réels..., montrer que $\int_0^1 (at^2+bt)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$ ») est incohérent ; on demande ici le calcul de l'intégrale, qui vaut $\frac{2c(-1)^k+d((-1)^k-1)}{k^2\pi^2}$, d'où $a=\frac{\pi^2}{2}$ et $b=-\pi^2$ en 2.2.

Commentaire. Le problème de Bâle, posé en 1650 et résolu par Euler en 1734 : $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$. La preuve utilise l'identité $\frac{1}{k^2}=\int_0^1(\frac{\pi^2}{2}t^2-\pi^2 t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t$, le noyau de Dirichlet et le lemme de Riemann–Lebesgue. On trouve $\frac{\pi^2}{6}-u_n\sim\frac{1}{n}$.

النسخة العربية

مسألة بازل : $\dfrac{\pi^2}{6} = \sum_{k\geq 1}\dfrac{1}{k^2}$ بطريقة تكاملية

دورة 2024 ▪ المسألة 1، الجزء 2 ▪ 2026 © سعد شكري

من أجل $n\in\mathbb{N}^*$ نضع $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

نتائج مقبولة (مُثبَتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). المتتالية (u_n) متقاربة؛ وإذا رمزنا لنهايتها بـ l فإن المتتالية (u_n-l) تكافئ المتتالية $(-\frac{1}{n})$.

السؤال (1) ليكن c وd عددين حقيقيين وk عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم. احسب التكامل $\displaystyle\int_0^1 (ct^2+dt)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t$.

السؤال (2) استنتج أنه يوجد زوج وحيد (a,b) من الأعداد الحقيقية بحيث لكل عدد صحيح $k\geq 1$:

$$\int_0^1 (at^2+bt)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{k^2}.$$

السؤال (3) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$. احسب قيمة التكامل $\displaystyle\int_0^1 (at^2+bt)\Big(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\Big)\,\mathrm{d}t$ بدلالة u_n.

السؤال (4) بين أنه لكل عدد صحيح $n\geq 1$ ولكل $\theta\in]0,\pi[$: $1+2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta)=\frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin\theta}$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

السؤال (5) نتيجة مفيدة. لتكن f دالة حقيقية من الصنف $\mathcal{C}^1$ على $[0,1]$.

(أ) بين أنه لكل $\lambda > 0$: $\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(0)-f(1)\cos\lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t$.

(ب) استنتج أن $\lambda \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t$ تؤول إلى 0 عندما يؤول λ إلى $+\infty$ (مأخوذة ريمان-لوبيغ).

السؤال (6) دراسة دالة مساعدة. نعتبر الدالة $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ المعرفة بـ

$$f(0) = -\pi. \qquad \text{و} \qquad f(t) = \frac{\pi^2(t^2-2t)}{4\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)} \text{ إذا كان } t \neq 0$$

(أ) بين بعناية أن f متصلة على القطعة $[0,1]$.

(ب) علل أن f قابلة للاشتقاق على $]0,1]$ وأن مشتقتها f' تقبل نهاية منتهية على اليمين في 0، نرمز لها بـ L.

(ج) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية، بين أن f قابلة للاشتقاق في 0 وحدد $f'(0)$.

(د) استنتج أن f من الصنف $\mathcal{C}^1$ على $[0,1]$.

السؤال (7) تحقق من أنه لكل $t \in [0,1]$: $\displaystyle(at^2+bt)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\right) = f(t)\sin\left((2n+1)\frac{\pi t}{2}\right)$.

السؤال (8) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد $\dfrac{\pi^2}{6}$، ثم أعط مكافئا للمتتالية $\left(\dfrac{\pi^2}{6}-u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

ملاحظة : نص السؤال 2.1 في الأصل («إذا كان c وd عددين حقيقيين...، بين أن $\int_0^1 (at^2+bt)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$») غير متسق؛ نطلب هنا حساب التكامل، وقيمته $\frac{2c(-1)^k+d((-1)^k-1)}{k^2\pi^2}$، ومنه $a=\frac{\pi^2}{2}$ و$b=-\pi^2$ في 2.2.

تعليق. مسألة بازل، طرحت سنة 1650 وحلها أولر سنة 1734 : $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$. يستعمل البرهان المتساوية $\frac{1}{k^2}=\int_0^1(\frac{\pi^2}{2}t^2-\pi^2 t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t$ ونواة ديريشليه ومأخوذة ريمان-لوبيغ. ونجد $\frac{\pi^2}{6}-u_n \sim \frac{1}{n}$.

Problème 34 — Session 2026

Formule sommatoire d'Euler–Maclaurin

Partie 3 © 2026 Saad Choukri

Notations. (B_n) est la suite des polynômes de Bernoulli ($B_0=1$, $B'_{n+1}=(n+1)B_n$, $\int_0^1 B_{n+1}=0$) et $b_n = B_n(0)$; $\lfloor x\rfloor$ est la partie entière de x.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). $B_1(x) = x-\frac{1}{2}$; pour $n\geq 2$, $B_n(1) = B_n(0) = b_n$.

3.1. **Question (1) Fonctions de Bernoulli périodisées.** Soit $n\in\mathbb{N}$; on définit $\widetilde{B}_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto B_n(x-\lfloor x\rfloor)$.

3.1.1. **(a)** Montrer que la fonction $\widetilde{B}_n$ est 1-périodique sur $\mathbb{R}$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

3.1.2. **(b)** On suppose ici $n \geq 2$.

(i) **(i)** Montrer que $\widetilde{B}_n$ est continue sur $\mathbb{R}$. Que dire de la fonction $\widetilde{B}_1$?

(ii) **(ii)** Montrer que $\widetilde{B}_n$ est de classe $\mathcal{C}^{n-2}$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $k \in \{0, \dots, n-2\}$, $B_n^{(k)}(1) = B_n^{(k)}(0)$.

3.2. **Question (2) Une formule préliminaire.** Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$. On pose

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^1 \widetilde{B}_n(x) f^{(n)}(x)\, \mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3.2.1. **(a)** Calculer R_0 et R_1 en fonction de $f(0)$, $f(1)$ et $\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t$.

3.2.2. **(b)** Pour $n \geq 2$, démontrer que $R_n = -\dfrac{b_n}{n!}\big(f^{(n-1)}(1) - f^{(n-1)}(0)\big) + R_{n-1}$.

3.2.3. **(c)** En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ (la somme sur p étant vide si $n = 1$),

$$f(1) = \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x + \frac{f(1) - f(0)}{2} + \sum_{p=2}^{n} \frac{b_p}{p!}\big(f^{(p-1)}(1) - f^{(p-1)}(0)\big) + R_n.$$

3.3. **Question (3) Formule sommatoire d'Euler–Maclaurin.**

3.3.1. **(a)** Soit $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(x)\, \mathrm{d}x + \frac{f(k+1) - f(k)}{2} + \sum_{p=2}^{n} \frac{b_p}{p!}\big(f^{(p-1)}(k+1) - f^{(p-1)}(k)\big) + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_k^{k+1} \widetilde{B}_n(x) f^{(n)}(x)\, \mathrm{d}x.$$

On pourra appliquer la formule de 3.2.3 à la fonction $x \mapsto f(k+x)$.

3.3.2. **(b)** Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{r} f(k) = \int_0^r f(x)\, \mathrm{d}x + \frac{f(r) - f(0)}{2} + \sum_{p=2}^{n} \frac{b_p}{p!}\big(f^{(p-1)}(r) - f^{(p-1)}(0)\big) + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^r \widetilde{B}_n(x) f^{(n)}(x)\, \mathrm{d}x.$$

N.B. : dans l'original, les formules 3.2.3, 3.3.1 et 3.3.2 sont écrites avec $\sum_{p=1}^{n} \frac{b_p}{p!}(\dots)$; or le calcul donne $R_1 = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \int_0^1 f$, si bien que le terme d'indice $p = 1$ doit être $+\frac{1}{2}\big(f(1) - f(0)\big)$, c'est-à-dire $-b_1(f(1) - f(0))$ avec $b_1 = -\frac{1}{2}$. Les formules ont été corrigées en isolant ce terme ; la relation 3.2.2 est exacte car $b_n = 0$ pour n impair ≥ 3.

Commentaire. La formule d'Euler–Maclaurin relie une somme $\sum f(k)$ à l'intégrale $\int f$, avec des corrections faisant intervenir les nombres de Bernoulli et les dérivées de f aux bornes. Avec $f(x) = x^p$, elle redonne la formule de Faulhaber ; avec $f(x) = \ln x$, elle redonne la formule de Stirling.

النسخة العربية

صيغة الجمع لأولر-ماكلوران

دورة 2026 ▪ الجزء 3 ▪ © 2026 سعد شكري

ترميزات. (B_n) متتالية حدوديات برنولي ($B_0 = 1$، $B'_{n+1} = (n+1)B_n$، $\int_0^1 B_{n+1} = 0$) و$b_n = B_n(0)$؛ الجزء $\lfloor x \rfloor$ الصحيح للعدد x.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ أو إعادة النشر دون إذن المؤلف

نتائج مقبولة (مُثبتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$؛ ومن أجل $n \geq 2$: $B_n(1) = B_n(0) = b_n$.

السؤال (1) دوال برنولي الدورية. ليكن $n \in \mathbb{N}$؛ نعرف $\widetilde{B}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، $x \mapsto B_n(x - \lfloor x \rfloor)$.

(أ) بين أن الدالة $\widetilde{B}_n$ دورية ودورها 1 على $\mathbb{R}$.

(ب) نفترض هنا أن $n \geq 2$.

(i) بين أن $\widetilde{B}_n$ متصلة على $\mathbb{R}$. ماذا عن الدالة $\widetilde{B}_1$؟

(ii) بين أن $\widetilde{B}_n$ من الصنف $\mathcal{C}^{n-2}$ على $\mathbb{R}$ وأنه لكل $k \in \{0, \dots, n-2\}$: $B_n^{(k)}(1) = B_n^{(k)}(0)$.

السؤال (2) صيغة تمهيدية. لتكن f دالة حقيقية من الصنف $\mathcal{C}^\infty$ على $[0, +\infty[$. نضع

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^1 \widetilde{B}_n(x) f^{(n)}(x)\, \mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(أ) احسب R_0 وR_1 بدلالة $f(0)$ و$f(1)$ و$\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t$.

(ب) من أجل $n \geq 2$، بين أن $R_n = -\frac{b_n}{n!}\left(f^{(n-1)}(1) - f^{(n-1)}(0)\right) + R_{n-1}$.

(ج) استنتج أنه لكل عدد صحيح $n \geq 1$ (مع اعتبار المجموع على p فارغا إذا كان $n = 1$):

$$f(1) = \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x + \frac{f(1) - f(0)}{2} + \sum_{p=2}^{n} \frac{b_p}{p!}\left(f^{(p-1)}(1) - f^{(p-1)}(0)\right) + R_n.$$

السؤال (3) صيغة الجمع لأولر-ماكلوران.

(أ) ليكن $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. بين أن

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(x)\, \mathrm{d}x + \frac{f(k+1) - f(k)}{2} + \sum_{p=2}^{n} \frac{b_p}{p!}\left(f^{(p-1)}(k+1) - f^{(p-1)}(k)\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_k^{k+1} \widetilde{B}_n(x) f^{(n)}(x)\, \mathrm{d}x.$$

يمكن تطبيق صيغة 3.2.3 على الدالة $x \mapsto f(k + x)$.

(ب) ليكن $r \in \mathbb{N}^*$. بين أنه لكل $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{r} f(k) = \int_0^r f(x)\, \mathrm{d}x + \frac{f(r) - f(0)}{2} + \sum_{p=2}^{n} \frac{b_p}{p!}\left(f^{(p-1)}(r) - f^{(p-1)}(0)\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^r \widetilde{B}_n(x) f^{(n)}(x)\, \mathrm{d}x.$$

ملاحظة : في الأصل كتبت الصيغ 3.2.3 و3.3.1 و3.3.2 بـ $\sum_{p=1}^{n} \frac{b_p}{p!}(\dots)$؛ والحال أن الحساب يعطي $R_1 = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \int_0^1 f$، فينبغي أن يكون الحد ذو الدليل $p = 1$ هو $\frac{1}{2}(f(1) - f(0))$، أي $-b_1(f(1) - f(0))$ مع $b_1 = -\frac{1}{2}$. صححت الصيغ بعزل هذا الحد؛ والعلاقة 3.2.2 صحيحة لأن $b_n = 0$ من أجل n فردي ≥ 3.

تعليق. تربط صيغة أولر-ماكلوران مجموعا $\sum f(k)$ بالتكامل $\int f$، مع تصحيحات تتدخل فيها أعداد برنولي ومشتقات f عند الطرفين. ومن أجل $f(x) = x^p$ نسترجع صيغة فولهابر؛ ومن أجل $f(x) = \ln x$ نسترجع صيغة ستيرلينغ.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri • جميع الحقوق محفوظة • يُمنع النسخ أو إعادة النشر دون إذن كتابي من المؤلف
© 2026 Saad Choukri

Problème 35 — Session 2026

Calcul de $\zeta(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli

Partie 5 © 2026 Saad Choukri

Notations. (B_n) désigne la suite des polynômes de Bernoulli ($B_0 = 1$, $B'_{n+1} = (n+1)B_n$, $\int_0^1 B_{n+1} = 0$), $b_n = B_n(0)$, et $\zeta(\alpha) = \sum_{k\geq 1} k^{-\alpha}$ pour $\alpha > 1$.

> **Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine).** $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$; pour $n \geq 2$, $B_n(1) = B_n(0) = b_n$; $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$; $b_{2n+1} = 0$ pour $n \geq 1$; $B_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}$.

5.1. **Question (1)** Soit $(n, \theta) \in \mathbb{N}^* \times]0, \pi[$. Montrer que $1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\theta) = \dfrac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin\theta}$.

5.2. **Question (2)** **Calcul des intégrales $I_{n,k}$.** Pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_{n,k} = \displaystyle\int_0^1 B_{2n}(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t$.

5.2.1. **(a)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \geq 2$, établir la relation de récurrence $I_{n,k} = -\dfrac{n(2n-1)}{2k^2\pi^2} I_{n-1,k}$.

5.2.2. **(b)** Calculer l'intégrale $I_{1,k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

5.2.3. **(c)** En déduire que pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, $I_{n,k} = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!}{(2k\pi)^{2n}}$.

5.3. **Question (3)** **Étude de la fonction auxiliaire Φ_n.** Soit $n \geq 1$ un entier. On considère la fonction $\Phi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi_n(0) = \frac{nb_{n-1}}{\pi}, \qquad \Phi_n(1) = -\frac{nB_{n-1}(1)}{\pi} \qquad \text{et} \qquad \Phi_n(t) = \frac{B_n(t) - b_n}{\sin(\pi t)} \ \text{ si } t \in]0,1[.$$

Montrer soigneusement que Φ_{2n} est continue sur $[0,1]$.

5.4. **Question (4)** **Un lemme de type Riemann–Lebesgue.** Soit f une fonction continue sur $[0,1]$.

5.4.1. **(a)** Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\pi/\lambda}^{1+\pi/\lambda} f\Big(s - \frac{\pi}{\lambda}\Big)\sin(\lambda s)\,\mathrm{d}s$.

5.4.2. **(b)** Montrer que pour tout $\lambda > \pi$,

$$\left|\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\pi}{\lambda}\max_{x\in[0,1]}|f(x)| + \frac{1}{2}\int_{\pi/\lambda}^{1}\left|f(t) - f\Big(t - \frac{\pi}{\lambda}\Big)\right|\mathrm{d}t.$$

5.4.3. **(c)** Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $\lambda \geq \pi/\eta$ et tout $t \in \big[\frac{\pi}{\lambda}, 1\big]$, $\big|f(t) - f\big(t - \frac{\pi}{\lambda}\big)\big| \leq \varepsilon$.

5.4.4. **(d)** En déduire que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$.

5.5. **Question (5)** **Application au calcul de $\zeta(2n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.**

5.5.1. **(a)** Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$,

$$\Phi_{2n}(t)\sin\big((2p+1)\pi t\big) = \big(B_{2n}(t) - b_{2n}\big)\Big(1 + 2\sum_{k=1}^{p}\cos(2k\pi t)\Big).$$

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

5.5.2. **(b)** En déduire que pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 \Phi_{2n}(t)\sin\big((2p+1)\pi t\big)\,\mathrm{d}t = -b_{2n}+2\sum_{k=1}^{p} I_{n,k}$.

5.5.3. **(c)** Conclure que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\zeta(2n)=\dfrac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}b_{2n}$. Que vaut $\zeta(2)$? Et $\zeta(4)$?

N.B. : l'original suppose $n\geq 3$ en 5.3, puis applique le résultat à Φ_{2n} pour tout $n\geq 1$; on demande donc la continuité de Φ_{2n} pour tout $n\geq 1$. L'original pose $\Phi_n(1)=-\Phi_n(0)$, ce qui ne convient pas pour Φ_2 (on a $\lim_{t\to 1}\Phi_2(t)=-\frac{1}{\pi}=\Phi_2(0)$) ; la valeur en 1 a été corrigée. Pour $2n\geq 4$, $\Phi_{2n}(0)=\Phi_{2n}(1)=0$. On trouve $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$.

Commentaire. Formule d'Euler (1735) : $\zeta(2n)=\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}b_{2n}$, d'où $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6)=\frac{\pi^6}{945}$. Tous les $\zeta(2n)$ sont des multiples rationnels de π^{2n}, donc irrationnels. On ne connaît rien de tel pour les valeurs impaires : Apéry a prouvé en 1978 que $\zeta(3)$ est irrationnel.

النسخة العربية

حساب $\zeta(2k)$ بواسطة أعداد برنولي

دورة 2026 ▪ الجزء 5 ▪ 2026 © سعد شكري

ترميزات. (B_n) متتالية حدوديات برنولي ($B_0=1$، $B'_{n+1}=(n+1)B_n$، $\int_0^1 B_{n+1}=0$)، $b_n=B_n(0)$ و $\zeta(\alpha)=\sum_{k\geq 1}k^{-\alpha}$ من أجل $\alpha>1$.

نتائج مقبولة (مُثبتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). $B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6}$، $B_1(x)=x-\frac{1}{2}$ ؛ من أجل $n\geq 2$: $B_n(1)=B_n(0)=b_n$ ؛ $B_n(1-x)=(-1)^nB_n(x)$ ؛ من أجل $n\geq 1$ $b_{2n+1}=0$ ؛ $B_n^{(k)}=\frac{n!}{(n-k)!}B_{n-k}$.

السؤال (1) ليكن $(n,\theta)\in\mathbb{N}^*\times]0,\pi[$. بين أن $1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta)=\dfrac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin\theta}$.

السؤال (2) حساب التكاملات $I_{n,k}$. لكل $n,k\in\mathbb{N}^*$ نضع $I_{n,k}=\displaystyle\int_0^1 B_{2n}(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t$.

(أ) ليكن $k\in\mathbb{N}^*$. من أجل $n\geq 2$، أثبت العلاقة الترجعية $I_{n,k}=-\dfrac{n(2n-1)}{2k^2\pi^2}I_{n-1,k}$.

(ب) احسب التكامل $I_{1,k}$ لكل $k\in\mathbb{N}^*$.

(ج) استنتج أنه لكل $n,k\in\mathbb{N}^*$: $I_{n,k}=\dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!}{(2k\pi)^{2n}}$.

السؤال (3) دراسة الدالة المساعدة Φ_n. ليكن $n\geq 1$. نعتبر الدالة $\Phi_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ المعرفة بـ

$$\Phi_n(t)=\frac{B_n(t)-b_n}{\sin(\pi t)}\ \text{إذا كان}\ t\in]0,1[,\qquad \Phi_n(0)=\frac{nb_{n-1}}{\pi},\qquad \Phi_n(1)=-\frac{nB_{n-1}(1)}{\pi}\ \text{و}$$

بين بعناية أن Φ_{2n} متصلة على $[0,1]$.

السؤال (4) مأخوذة من نوع ريمان-لوبيغ. لتكن f دالة متصلة على $[0,1]$.

(أ) بين أنه لكل $\lambda>0$: $\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t=-\int_{\pi/\lambda}^{1+\pi/\lambda} f\Big(s-\frac{\pi}{\lambda}\Big)\sin(\lambda s)\,\mathrm{d}s$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري ▪ جميع الحقوق محفوظة ▪ يُحظر النسخ أو إعادة النشر دون إذن المؤلف

(ب) بين أنه لكل $\lambda > \pi$:

$$\left|\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\pi}{\lambda}\max_{x\in[0,1]}|f(x)| + \frac{1}{2}\int_{\pi/\lambda}^1 \left|f(t) - f\left(t-\frac{\pi}{\lambda}\right)\right|\mathrm{d}t.$$

(ج) ليكن $\varepsilon > 0$. بين أنه يوجد $\eta > 0$ بحيث لكل $\lambda \geq \pi/\eta$ ولكل $t \in \left[\frac{\pi}{\lambda}, 1\right]$: $\left|f(t) - f\left(t-\frac{\pi}{\lambda}\right)\right| \leq \varepsilon$.

(د) استنتج أن $\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$.

السؤال (5) تطبيق على حساب $\zeta(2n)$، $n \in \mathbb{N}^*$.

(أ) ليكن $(n,p) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$. بين أنه لكل $t \in [0,1]$:

$$\Phi_{2n}(t)\sin\big((2p+1)\pi t\big) = \big(B_{2n}(t) - b_{2n}\big)\Big(1 + 2\sum_{k=1}^{p}\cos(2k\pi t)\Big).$$

(ب) استنتج أنه لكل $(n,p) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_0^1 \Phi_{2n}(t)\sin\big((2p+1)\pi t\big)\,\mathrm{d}t = -b_{2n} + 2\sum_{k=1}^{p} I_{n,k}$.

(ج) استنتج أنه لكل $n \in \mathbb{N}^*$: $\zeta(2n) = \dfrac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}b_{2n}$. ما قيمة $\zeta(2)$؟ و$\zeta(4)$؟

ملاحظة : يفترض الأصل $n \geq 3$ في 5.3 ثم يطبق النتيجة على Φ_{2n} لكل $n \geq 1$؛ لذلك نطلب اتصال Φ_{2n} لكل $n \geq 1$. ويضع الأصل $\Phi_n(1) = -\Phi_n(0)$، وهذا لا يصلح بالنسبة لـ Φ_2 (لدينا $\Phi_2(0) = -\frac{1}{\pi} = \lim_{t\to 1}\Phi_2(t)$)؛ فصححت القيمة في 1. ومن أجل $2n \geq 4$: $\Phi_{2n}(0) = \Phi_{2n}(1) = 0$. نجد $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ و$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

تعليق. صيغة أولر (1735) : $\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}b_{2n}$، ومنه $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ و$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ و$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$. فكل الأعداد $\zeta(2n)$ مضاعفات جذرية لـ π^{2n}، وبالتالي لاجذرية. ولا يعرف شيء مماثل بالنسبة للقيم الفردية : أثبت أبيري سنة 1978 أن $\zeta(3)$ لاجذري.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

IV

Équations différentielles

Problème 36 — Session 2011

Polynômes et équation différentielle linéaire du premier ordre $y' - \lambda y = g$

Définitions, Parties 1 et 2 (traduit de l'arabe) © 2026 Saad Choukri

Définitions et notations. Pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, on pose $f^{(0)} = f$; f est dérivable une fois sur $\mathbb{R}$ si elle est dérivable, et l'on pose $f^{(1)} = f'$; par récurrence, f est n fois dérivable si $f^{(n-1)}$ est dérivable, et $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et n fois dérivables sur $\mathbb{R}$ pour tout entier naturel non nul n, et $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels.

Résultats admis. Si $f, g \in \mathcal{F}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $f+g \in \mathcal{F}$, $\alpha f \in \mathcal{F}$, et pour tout n : $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ et $(\alpha f)^{(n)} = \alpha f^{(n)}$. De plus $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$. On rappelle enfin que, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, les solutions de l'équation $y' - \lambda y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto ae^{\lambda x}$, $a \in \mathbb{R}$.

Partie 1 : résultats préliminaires sur les polynômes

1. **Question (1)** Pour tout entier $r \geq 1$, on considère la fonction $\varepsilon_r : x \mapsto x^r$.

   a) **(a)** Vérifier que pour tout entier naturel k et tout réel x :

   $$\varepsilon_r^{(k)}(x) = r(r-1)\cdots(r-k+1)\,x^{r-k} \text{ si } 1 \leq k \leq r, \qquad \varepsilon_r^{(k)}(x) = 0 \text{ si } k \geq r+1.$$

   b) **(b)** En déduire la valeur de $\varepsilon_r^{(k)}(0)$ pour tout entier naturel k.

2. **Question (2)** Soit $P \in \mathcal{P}$ défini par $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) **(a)** Montrer que pour tout entier k compris entre 0 et n, $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

   b) **(b)** En déduire que deux fonctions polynomiales Q et R de $\mathcal{P}$ sont égales si, et seulement si, leurs coefficients sont égaux (on pourra considérer $P = R - Q$).

3. **Question (3)** Soient $P, Q \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $P(x) = (x-\lambda)Q(x)$ pour tout réel x, avec

   $$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

   Montrer que $a_0 = -\lambda b_0$, $a_k = b_{k-1} - \lambda b_k$ pour $1 \leq k \leq n-1$, et $a_n = b_{n-1}$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

Partie 2 : équations différentielles linéaires du premier ordre

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g \in \mathcal{F}$. On considère l'équation différentielle

$$y' - \lambda y = g. \qquad (F_g)$$

Une fonction $f \in \mathcal{F}$ est solution de (F_g) si $f'(x) - \lambda f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. **Question (4)** Soit $f \in \mathcal{F}$ une solution de (F_g).

a) **(a)** Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto f(x)e^{-\lambda x}$ en fonction de g.

b) **(b)** En déduire que f s'écrit $f(x) = G(x)e^{\lambda x}$, où G est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto g(x)e^{-\lambda x}$.

c) **(c)** Vérifier que réciproquement toute fonction $h : x \mapsto G(x)e^{\lambda x}$, où G est une primitive de $x \mapsto g(x)e^{-\lambda x}$, est solution de (F_g).

2. **Question (5)** Soit $R \in \mathcal{P}$; on pose $g(x) = R(x)e^{\lambda x}$. Montrer que les solutions de (F_g) sont les fonctions $x \mapsto S(x)e^{\lambda x}$, où $S \in \mathcal{P}$ vérifie $S' = R$.

3. **Question (6)** Soient $R \in \mathcal{P}$ et α un réel différent de λ ; on pose $g(x) = R(x)e^{\alpha x}$.

a) **(a)** Soit μ un réel non nul. Montrer que les primitives de $x \mapsto R(x)e^{\mu x}$ sont les fonctions $x \mapsto R_1(x)e^{\mu x} + c$, où $c \in \mathbb{R}$ et $R_1 \in \mathcal{P}$ vérifie $R_1'(x) + \mu R_1(x) = R(x)$ pour tout réel x. Montrer l'unicité du polynôme R_1. *Indication : on pourra intégrer par parties.*

b) **(b)** Montrer que les solutions de (F_g) sont les fonctions $x \mapsto S(x)e^{\alpha x} + ce^{\lambda x}$, où $c \in \mathbb{R}$ et S est l'unique polynôme de $\mathcal{P}$ vérifiant $S'(x) + (\alpha - \lambda)S(x) = R(x)$ pour tout réel x.

Commentaire. La méthode de variation de la constante montre que les solutions de $y' - \lambda y = R(x)e^{\alpha x}$ sont de la forme $S(x)e^{\alpha x} + ce^{\lambda x}$: si $\alpha \neq \lambda$, S a le même degré que R ; si $\alpha = \lambda$ (résonance), S est une primitive de R, donc de degré $\deg R + 1$.

النسخة العربية

الحدوديات والمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى $y' - \lambda y = g$

دورة 2011 ▪ تعاريف، الجزءان 1 و2 (النص الأصلي) ▪ 2026 © سعد شكري

تعاريف وترميزات. من أجل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ نضع $f^{(0)} = f$ ؛ تكون f قابلة للاشتقاق مرة واحدة على $\mathbb{R}$ إذا كانت قابلة للاشتقاق، ونضع $f^{(1)} = f'$ ؛ وبالترجع، تكون f قابلة للاشتقاق n مرة إذا كانت $f^{(n-1)}$ قابلة للاشتقاق، و$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$. نرمز بـ $\mathcal{F}$ لمجموعة الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ والقابلة للاشتقاق n مرة على $\mathbb{R}$ لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n، وبـ $\mathcal{P}$ لمجموعة الدوال الحدودية ذات المعاملات الحقيقية.

نتائج مقبولة. إذا كان $f, g \in \mathcal{F}$ و$\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $f + g \in \mathcal{F}$ و$\alpha f \in \mathcal{F}$، ولكل n : $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ و$(\alpha f)^{(n)} = \alpha f^{(n)}$. ولدينا $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$. ونذكر أخيرا أنه من أجل $\lambda \in \mathbb{R}$، حلول المعادلة $y' - \lambda y = 0$ هي الدوال $x \mapsto ae^{\lambda x}$، $a \in \mathbb{R}$.

الجزء 1 : نتائج أولية حول الحدوديات

السؤال (1) لكل عدد صحيح $r \geq 1$ نعتبر الدالة $\varepsilon_r : x \mapsto x^r$.

(أ) تحقق أنه لكل عدد صحيح طبيعي k ولكل عدد حقيقي x :

$$\varepsilon_r^{(k)}(x) = r(r-1)\cdots(r-k+1)\,x^{r-k} \text{ إذا كان } 1 \leq k \leq r \qquad \varepsilon_r^{(k)}(x) = 0 \text{ إذا كان } k \geq r+1.$$

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

(ب) استنتج قيمة $\varepsilon_r^{(k)}(0)$ لكل عدد صحيح طبيعي k.

السؤال (2) لتكن $P \in \mathcal{P}$ معرفة بـ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$.

(أ) بين أنه لكل عدد صحيح k محصور بين 0 وn : $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

(ب) استنتج أن دالتين حدوديتين Q وR من $\mathcal{P}$ متساويتان إذا وفقط إذا كانت معاملاتهما متساوية (يمكن اعتبار $P = R - Q$).

السؤال (3) لتكن $P, Q \in \mathcal{P}$ و$\lambda \in \mathbb{R}$ بحيث $P(x) = (x - \lambda)Q(x)$ لكل عدد حقيقي x، مع

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

بين أن $a_0 = -\lambda b_0$ وأن $a_k = b_{k-1} - \lambda b_k$ من أجل $1 \leq k \leq n-1$ وأن $a_n = b_{n-1}$.

الجزء 2 : المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

ليكن $\lambda \in \mathbb{R}$ و$g \in \mathcal{F}$. نعتبر المعادلة التفاضلية

$$(F_g) \qquad y' - \lambda y = g.$$

تكون دالة $f \in \mathcal{F}$ حلا للمعادلة (F_g) إذا كان $f'(x) - \lambda f(x) = g(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

السؤال (4) لتكن $f \in \mathcal{F}$ حلا للمعادلة (F_g).

(أ) احسب مشتقة الدالة $x \mapsto f(x)e^{-\lambda x}$ بدلالة g.

(ب) استنتج أن $f(x) = G(x)e^{\lambda x}$ حيث G دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة $x \mapsto g(x)e^{-\lambda x}$.

(ج) تحقق أن كل دالة $h : x \mapsto G(x)e^{\lambda x}$، حيث G دالة أصلية للدالة $x \mapsto g(x)e^{-\lambda x}$، هي حل للمعادلة (F_g).

السؤال (5) لتكن $R \in \mathcal{P}$؛ نضع $g(x) = R(x)e^{\lambda x}$. بين أن حلول (F_g) هي الدوال $x \mapsto S(x)e^{\lambda x}$ حيث $S \in \mathcal{P}$ تحقق $S' = R$.

السؤال (6) لتكن $R \in \mathcal{P}$ وα عددا حقيقيا مخالفا لـ λ؛ نضع $g(x) = R(x)e^{\alpha x}$.

(أ) ليكن μ عددا حقيقيا غير منعدم. بين أن الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto R(x)e^{\mu x}$ هي الدوال $x \mapsto R_1(x)e^{\mu x} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$ و$R_1 \in \mathcal{P}$ تحقق $R_1'(x) + \mu R_1(x) = R(x)$ لكل عدد حقيقي x. بين وحدانية الحدودية R_1. إرشاد : يمكن استعمال المكاملة بالأجزاء.

(ب) بين أن حلول (F_g) هي الدوال $x \mapsto S(x)e^{\alpha x} + ce^{\lambda x}$ حيث $c \in \mathbb{R}$ وS الحدودية الوحيدة من $\mathcal{P}$ التي تحقق $S'(x) + (\alpha - \lambda)S(x) = R(x)$ لكل عدد حقيقي x.

تعليق. تبين طريقة تغيير الثابتة أن حلول $y' - \lambda y = R(x)e^{\alpha x}$ من الشكل $S(x)e^{\alpha x} + ce^{\lambda x}$: إذا كان $\alpha \neq \lambda$ فلـ S نفس درجة R؛ وإذا كان $\alpha = \lambda$ (الرنين) فإن S دالة أصلية لـ R، أي درجتها $\deg R + 1$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri

Problème 37 — Session 2019

Étude de l'équation différentielle $y'' = y$

Problème 3, Partie 2 (énoncé remanié) © 2026 Saad Choukri

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable telle que $f''(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On considère les applications g et h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$g(t) = \big(f'(t) - f(t)\big)e^{t}, \qquad h(t) = \big(f'(t) + f(t)\big)e^{-t}.$$

2.1. **Question (1)** Vérifier que g et h sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs dérivées g' et h'. En déduire que g et h sont constantes.

2.2. **Question (2)** En déduire qu'il existe un couple (α, β) de réels tel que $f(t) = \alpha e^{t} + \beta e^{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2.3. **Question (3)** On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = f'(t_0) = 0$. Montrer que f est identiquement nulle.

2.4. **Question (4)** On suppose que $f(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2.4.1. **(a)** Montrer que la fonction f'' garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.

2.4.2. **(b)** On suppose que $f''(t) > 0$ pour tout t. Montrer que les réels α et β de la question 2.2 sont positifs et que $\alpha + \beta > 0$.

2.5. **Question (5)** On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = 0$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $f(t) = \lambda \operatorname{sh}(t - t_0)$ pour tout t, où $\operatorname{sh}(u) = \frac{e^{u} - e^{-u}}{2}$.

2.6. **Question (6)** Déterminer tous les couples (I, ψ), où I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, le plus grand possible, et $\psi : I \to \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable telle que $\psi''(t) = \psi(t)$ pour tout $t \in I$.

N.B. : l'énoncé original de cette partie n'est pas cohérent : il affirme qu'une solution de $y'' = y$ qui s'annule en un point est identiquement nulle (faux pour $t \mapsto \operatorname{sh}(t - t_0)$), affirme que « si g est croissante alors h est décroissante » alors que $g' = h' = 0$, et évoque en 2.5 l'équation $y'' + y = 0$. Les questions ont été réorganisées pour conserver la démarche (fonctions auxiliaires g et h, signe de f'', forme des solutions) avec des affirmations exactes.

Commentaire. Les solutions de $y'' = y$ sont les $\alpha e^{t} + \beta e^{-t}$, ou encore $a \operatorname{ch} t + b \operatorname{sh} t$. Une solution qui ne s'annule pas garde le signe de $f'' = f$ et vérifie $\alpha\beta \geq 0$; une solution qui s'annule en t_0 est proportionnelle à $\operatorname{sh}(t - t_0)$, donc ne s'annule qu'une fois (contrairement aux solutions de $y'' = -y$).

النسخة العربية

y'' = دراسة المعادلة التفاضلية y

دورة 2019 ▪ المسألة 3، الجزء 2 (نص معدل) ▪ 2026 © سعد شكري

لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق مرتين بحيث $f''(t) = f(t)$ لكل $t \in \mathbb{R}$. نعتبر الدالتين g وh المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ

$$g(t) = \big(f'(t) - f(t)\big)e^{t}, \qquad h(t) = \big(f'(t) + f(t)\big)e^{-t}.$$

السؤال (1) تحقق من أن g وh قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ واحسب مشتقتيهما g' وh'. استنتج أن g وh ثابتتان.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

السؤال (2) استنتج أنه يوجد زوج (α, β) من الأعداد الحقيقية بحيث $f(t) = \alpha e^{t} + \beta e^{-t}$ لكل $t \in \mathbb{R}$.

السؤال (3) نفترض أنه يوجد $t_0 \in \mathbb{R}$ بحيث $f(t_0) = f'(t_0) = 0$. بين أن f منعدمة.

السؤال (4) نفترض أن $f(t) \neq 0$ لكل $t \in \mathbb{R}$.

(أ) بين أن الدالة f'' تحافظ على إشارة ثابتة على $\mathbb{R}$.

(ب) نفترض أن $f''(t) > 0$ لكل t. بين أن العددين α وβ من 2.2 موجبان وأن $\alpha + \beta > 0$.

السؤال (5) نفترض أنه يوجد $t_0 \in \mathbb{R}$ بحيث $f(t_0) = 0$. بين أنه يوجد عدد حقيقي λ بحيث $f(t) = \lambda \operatorname{sh}(t - t_0)$ لكل t، حيث $\operatorname{sh}(u) = \frac{e^{u} - e^{-u}}{2}$.

السؤال (6) حدد جميع الأزواج (I, ψ) حيث I مجال مفتوح غير فارغ من $\mathbb{R}$، أكبر ما يمكن، و$\psi : I \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق مرتين بحيث $\psi''(t) = \psi(t)$ لكل $t \in I$.

ملاحظة : نص هذا الجزء في الأصل غير متسق : فهو يؤكد أن حلا للمعادلة $y'' = y$ ينعدم في نقطة يكون منعدما (وهذا خطأ بالنسبة لـ $(t \mapsto \operatorname{sh}(t - t_0)$)، وأنه «إذا كانت g تزايدية فإن h تناقصية» بينما $g' = h' = 0$، ويذكر في 2.5 المعادلة $y'' + y = 0$. أعيد تنظيم الأسئلة للحفاظ على المنهجية (الدالتان المساعدتان g وh، إشارة f''، شكل الحلول) بعبارات صحيحة.

تعليق. حلول $y'' = y$ هي $\alpha e^{t} + \beta e^{-t}$، أو $a \operatorname{ch} t + b \operatorname{sh} t$. الحل الذي لا ينعدم يحافظ على إشارة $f = f''$ ويحقق $\alpha\beta \geq 0$؛ والحل الذي ينعدم في t_0 متناسب مع $\operatorname{sh}(t - t_0)$، فلا ينعدم إلا مرة واحدة (خلافا لحلول $y'' = -y$).

Problème 38 — Session 2022

Fonction définie par une intégrale et équation fonctionnelle $f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f$

Problème 1 © 2026 Saad Choukri

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est dit non trivial s'il contient au moins deux éléments distincts. Par « solution d'une équation différentielle », on entend une solution à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}$.

Partie 1 : résultats préliminaires

Soient I un intervalle non trivial, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue ; on note F la fonction définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1.1. **Question (1)** Justifier que F est dérivable sur I et préciser sa dérivée.

1.2. **Question (2)** Soient J un intervalle non trivial et $u, v : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables à valeurs dans I. On considère les fonctions définies sur J par

$$F_1(x) = \int_{x_0}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad F_2(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1.2.1. **(a)** Exprimer F_1 à l'aide des fonctions v et F.

1.2.2. **(b)** Montrer que F_1 est dérivable sur J et préciser sa dérivée.

1.2.3. **(c)** En déduire que F_2 est dérivable sur J et préciser sa dérivée.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

Partie 2 : étude d'une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

On suppose de plus que f **n'est pas la fonction nulle**, et l'on considère un réel a tel que $f(a) \neq 0$.

2.1. **Question (3)** Vérifier que $f(0) = 0$.

2.2. **Question (4)** **Quelques propriétés de la fonction f.**

2.2.1. **(a)** Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{f(a)} \displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2.2.2. **(b)** Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2.2.3. **(c)** En déduire que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

2.3. **Question (5)** Montrer que pour tout couple (x, y) de réels,

$$f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y) \qquad \text{et} \qquad f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y).$$

2.4. **Question (6)** On pose $\lambda = -\dfrac{f''(a)}{f(a)}$. Déduire de ce qui précède que f est solution de l'équation différentielle linéaire $z'' + \lambda z = 0$. $(\mathcal{E}_\lambda)$

2.5. **Question (7)** **Étude de l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$ et détermination de f.**

2.5.1. **(a)** On suppose ici $\lambda > 0$ et on pose $\mu = \sqrt{\lambda}$.

(i) **(i)** Déterminer la forme générale des solutions de $(\mathcal{E}_\lambda)$.

(ii) **(ii)** En déduire qu'il existe un réel non nul A tel que $f(x) = A\sin(\mu x)$ pour tout x, puis montrer que $A = \frac{2}{\mu}$.

2.5.2. **(b)** On suppose ici $\lambda < 0$ et on pose $\mu = \sqrt{-\lambda}$.

(i) **(i)** Déterminer la forme générale des solutions de $(\mathcal{E}_\lambda)$.

(ii) **(ii)** Montrer que toute solution g de $(\mathcal{E}_\lambda)$ est de la forme $g = \alpha C_\mu + \beta S_\mu$, où α, β sont des réels et $C_\mu : x \mapsto \frac{e^{\mu x} + e^{-\mu x}}{2}$, $S_\mu : x \mapsto \frac{e^{\mu x} - e^{-\mu x}}{2}$.

(iii) **(iii)** En déduire qu'il existe un réel non nul A' tel que $f(x) = A' S_\mu(x)$ pour tout x.

(iv) **(iv)** Pour tout couple (x, y), exprimer $C_\mu(x \pm y)$ en fonction de $C_\mu(x)$, $C_\mu(y)$, $S_\mu(x)$, $S_\mu(y)$, puis montrer que $A' = \frac{2}{\mu}$.

2.5.3. **(c)** Si $\lambda = 0$, montrer que $f(x) = 2x$ pour tout réel x.

2.6. **Question (8)** Vérifier que chacune des fonctions trouvées ci-dessus satisfait bien l'équation fonctionnelle (1).

Commentaire. Les solutions continues non nulles de $f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f$ sont exactement $f(x) = 2x$, $f(x) = \frac{2}{\mu}\sin(\mu x)$ et $f(x) = \frac{2}{\mu}\,\mathrm{sh}(\mu x)$, $\mu > 0$. La méthode est typique : l'équation fonctionnelle donne la régularité « gratuitement » (une intégrale de fonction continue est dérivable), puis une équation différentielle linéaire.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

النسخة العربية

دالة معرفة بتكامل والمعادلة الدالية $f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f$

دورة 2022 ▪ المسألة 1 ▪ 2026 © سعد شكري

© © 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

يقال عن مجال من $\mathbb{R}$ إنه غير تافه إذا احتوى على عنصرين مختلفين على الأقل. ونقصد بـ«حل معادلة تفاضلية» حلا ذا قيم حقيقية معرفا على $\mathbb{R}$.

الجزء 1 : نتائج تمهيدية

ليكن I مجالا غير تافه و$x_0 \in I$ و$f : I \to \mathbb{R}$ دالة متصلة؛ نرمز بـ F للدالة المعرفة على I بـ $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

السؤال (1) علل أن F قابلة للاشتقاق على I وحدد مشتقتها.

السؤال (2) ليكن J مجالا غير تافه و$u, v : J \to \mathbb{R}$ دالتين قابلتين للاشتقاق قيمهما في I. نعتبر الدالتين المعرفتين على J بـ

$$F_1(x) = \int_{x_0}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{و} \qquad F_2(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(أ) عبر عن F_1 بواسطة v وF.

(ب) بين أن F_1 قابلة للاشتقاق على J وحدد مشتقتها.

(ج) استنتج أن F_2 قابلة للاشتقاق على J وحدد مشتقتها.

الجزء 2 : دراسة معادلة دالية

لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة متصلة بحيث

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

نفترض علاوة على ذلك أن f **ليست الدالة المنعدمة**، ونعتبر عددا حقيقيا a بحيث $f(a) \neq 0$.

السؤال (3) تحقق من أن $f(0) = 0$.

السؤال (4) **بعض خاصيات الدالة f.**

(أ) تحقق أنه لكل عدد حقيقي x : $f(x) = \dfrac{1}{f(a)} \displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f(t)\,\mathrm{d}t$.

(ب) بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ واحسب مشتقتها.

(ج) استنتج أن f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$.

السؤال (5) بين أنه لكل زوج (x,y) من الأعداد الحقيقية :

$$f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y) \qquad \text{و} \qquad f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y).$$

السؤال (6) نضع $\lambda = -\dfrac{f''(a)}{f(a)}$. استنتج أن f حل للمعادلة التفاضلية الخطية $z'' + \lambda z = 0$. $(\mathcal{E}_\lambda)$

السؤال (7) **دراسة المعادلة $(\mathcal{E}_\lambda)$ وتحديد f.**

(أ) نفترض هنا أن $\lambda > 0$ ونضع $\mu = \sqrt{\lambda}$.

(i) حدد الحل العام للمعادلة $(\mathcal{E}_\lambda)$.

© 2026 Saad Choukri

(ii) استنتج أنه يوجد عدد حقيقي غير منعدم A بحيث $f(x) = A\sin(\mu x)$ لكل x، ثم بين أن $A = \frac{2}{\mu}$.

(ب) نفترض هنا أن $\lambda < 0$ ونضع $\mu = \sqrt{-\lambda}$.

(i) حدد الحل العام للمعادلة $(\mathcal{E}_\lambda)$.

(ii) بين أن كل حل g للمعادلة $(\mathcal{E}_\lambda)$ يكتب $g = \alpha C_\mu + \beta S_\mu$ حيث α, β عددان حقيقيان و $C_\mu : x \mapsto \frac{e^{\mu x}+e^{-\mu x}}{2}$، $S_\mu : x \mapsto \frac{e^{\mu x}-e^{-\mu x}}{2}$.

(iii) استنتج أنه يوجد عدد حقيقي غير منعدم A' بحيث $f(x) = A'S_\mu(x)$ لكل x.

(iv) لكل زوج (x, y) عبر عن $C_\mu(x \pm y)$ بدلالة $C_\mu(x)$ و $C_\mu(y)$ و $S_\mu(x)$ و $S_\mu(y)$، ثم بين أن $A' = \frac{2}{\mu}$.

(ج) إذا كان $\lambda = 0$، بين أن $f(x) = 2x$ لكل عدد حقيقي x.

السؤال (8) تحقق من أن كل دالة من الدوال المحصل عليها تحقق المعادلة الدالية (1).

تعليق. الحلول المتصلة غير المنعدمة للمعادلة $f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f$ هي بالضبط $f(x) = 2x$ و $f(x) = \frac{2}{\mu}\sin(\mu x)$ و $f(x) = \frac{2}{\mu}\operatorname{sh}(\mu x)$، $\mu > 0$. والمنهجية نموذجية : تعطي المعادلة الدالية الانتظام «مجانا» (تكامل دالة متصلة قابل للاشتقاق)، ثم معادلة تفاضلية خطية.

Problème 39 — Session 2011

Équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants

Partie 3 (traduit de l'arabe) © 2026 Saad Choukri

Notations. $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables, et $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales réelles. À tout polynôme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ de $\mathcal{P}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), on associe l'équation différentielle linéaire homogène

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0, \qquad (E_P)$$

dont P est appelé le *polynôme caractéristique*. Une fonction $f \in \mathcal{F}$ est solution de (E_P) si $a_n f^{(n)}(x) + \cdots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0$ pour tout réel x. Par exemple, pour $P(x) = x - \lambda$, l'équation (E_P) est $y' - \lambda y = 0$, dont les solutions sont les fonctions $x \mapsto ae^{\lambda x}$, $a \in \mathbb{R}$.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux. Si $P(x) = (x-\lambda)Q(x)$ avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$, alors $a_0 = -\lambda b_0$, $a_k = b_{k-1} - \lambda b_k$ $(1 \le k \le n-1)$ et $a_n = b_{n-1}$. Pour $R \in \mathcal{P}$, les solutions de $y' - \lambda y = R(x)e^{\lambda x}$ sont les $x \mapsto S(x)e^{\lambda x}$ avec $S \in \mathcal{P}$, $S' = R$; et pour $\alpha \neq \lambda$, celles de $y' - \lambda y = R(x)e^{\alpha x}$ sont les $x \mapsto S(x)e^{\alpha x} + ce^{\lambda x}$, $c \in \mathbb{R}$, où $S \in \mathcal{P}$ est l'unique polynôme tel que $S' + (\alpha - \lambda)S = R$ (et $\deg S = \deg R$).

1. **Question (1)** Montrer que si $f, g \in \mathcal{F}$ sont deux solutions de (E_P) et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\alpha f + g$ est aussi solution de (E_P).
2. **Question (2)** **Premier cas :** $P(x) = x^n$. Montrer que les solutions de (E_P) sont les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $n-1$.
3. **Question (3)** **Deuxième cas :** $P(x) = (x-\lambda)^n$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

a) **(a) Formule de Leibniz.** Soient $f, g \in \mathcal{F}$. Montrer par récurrence que $fg \in \mathcal{F}$ et que pour tout entier naturel non nul r,

$$(fg)^{(r)} = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f^{(k)} g^{(r-k)}, \qquad \text{où } \binom{r}{k} = \frac{r!}{k!(r-k)!},\ 0 \le k \le r.$$

Indication : on pourra utiliser la formule de Pascal $\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k-1} + \binom{r-1}{k}$, $1 \le k \le r-1$.

b) **(b)** Montrer que l'équation (E_P) s'écrit $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (-\lambda)^{n-r} y^{(r)} = 0$.

c) **(c)** Soit $f \in \mathcal{F}$; on pose $h(x) = f(x)e^{-\lambda x}$. Calculer la dérivée n-ième $h^{(n)}$ de h, et en déduire que f est solution de (E_P) si, et seulement si, il existe une fonction polynomiale R de degré au plus $n-1$ telle que $f(x) = R(x)e^{\lambda x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. **Question (4)** On suppose qu'il existe $Q \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $P(x) = (x-\lambda)Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) **(a)** Montrer qu'une fonction $f \in \mathcal{F}$ est solution de (E_P) si, et seulement si, la fonction $f_1 = f' - \lambda f$ est solution de l'équation (E_Q). *Indication : utiliser les relations entre les coefficients de P et de Q.*

b) **(b)** En raisonnant par récurrence, retrouver le résultat de la question 3.c) sans utiliser la formule de Leibniz.

5. **Question (5) Première application.** On considère l'équation $y^{(4)} + y^{(3)} - 3y^{(2)} - 5y^{(1)} - 2y = 0$.

a) **(a)** Vérifier que son polynôme caractéristique est $P(x) = (x-2)(x+1)^3$.

b) **(b)** Montrer que ses solutions sont les fonctions $x \mapsto S(x)e^{-x} + ce^{2x}$, où $c \in \mathbb{R}$ et S est une fonction polynomiale de degré au plus 2.

6. **Question (6)** Soit $r \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des réels deux à deux distincts et $n_1, \dots, n_r$ des entiers naturels non nuls ; on pose $n = n_1 + \cdots + n_r$ et $P(x) = (x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\cdots(x-\lambda_r)^{n_r}$. Montrer, par récurrence sur n, que les solutions de (E_P) sont les fonctions

$$x \mapsto P_1(x)e^{\lambda_1 x} + P_2(x)e^{\lambda_2 x} + \cdots + P_r(x)e^{\lambda_r x},$$

où, pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$, P_k est une fonction polynomiale de degré au plus $n_k - 1$. *Indication : utiliser la question 4.a).*

7. **Question (7) Deuxième application.**

a) **(a)** Soit $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, où $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont des entiers relatifs et $a_0 \neq 0$. Montrer que si un entier relatif u est racine de P, alors u divise a_0.

b) **(b)** On prend $P(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$. Déterminer les solutions entières de l'équation $P(x) = 0$, puis factoriser P.

c) **(c)** On considère $R(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 1$.

- Soit x un réel non nul ; on pose $y = x + \frac{1}{x}$. Montrer que $\dfrac{R(x)}{x^3} = P(y)$, puis en déduire que $R(x) = (x+1)^2(x-1)^4$.
- Donner la solution générale dans $\mathcal{F}$ de l'équation $y^{(6)} - 2y^{(5)} - y^{(4)} + 4y^{(3)} - y^{(2)} - 2y' + y = 0$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

N.B. : dans l'original, l'équation finale est écrite avec « $2y^5$ » au lieu de $2y^{(5)}$.

Commentaire. Théorème de structure : si $P(x) = \prod (x-\lambda_k)^{n_k}$, les solutions de l'équation différentielle de polynôme caractéristique P sont les $\sum P_k(x)e^{\lambda_k x}$ avec $\deg P_k < n_k$. Pour l'équation finale, $R(x) = (x+1)^2(x-1)^4$ donne les solutions $(a+bx)e^{-x} + (c+dx+ex^2+fx^3)e^{x}$.

النسخة العربية

المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة

دورة 2011 ▪ الجزء 3 (النص الأصلي) ▪ 2026 © سعد شكري

ترميزات. $\mathcal{F}$ مجموعة الدوال من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ القابلة للاشتقاق ما لا نهاية من المرات، و$\mathcal{P}$ مجموعة الدوال الحدودية الحقيقية. نربط بكل حدودية $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ من $\mathcal{P}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

$$(E_P) \qquad a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0$$

وتسمى P الحدودية المميزة لها. تكون دالة $f \in \mathcal{F}$ حلا للمعادلة (E_P) إذا كان $a_n f^{(n)}(x) + \cdots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0$ لكل عدد حقيقي x. مثلا من أجل $P(x) = x - \lambda$ تكون (E_P) هي $y' - \lambda y = 0$، وحلولها الدوال $x \mapsto ae^{\lambda x}$، $a \in \mathbb{R}$.

نتائج مقبولة (مُثبتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). تتساوى حدوديتان إذا وفقط إذا تساوت معاملاتهما. إذا كان $P(x) = (x-\lambda)Q(x)$ مع $P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ و$Q = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$ فإن $a_0 = -\lambda b_0$ و$a_k = b_{k-1} - \lambda b_k$ ($1 \le k \le n-1$) و$a_n = b_{n-1}$. من أجل $R \in \mathcal{P}$، حلول $y' - \lambda y = R(x)e^{\lambda x}$ هي $x \mapsto S(x)e^{\lambda x}$ مع $S \in \mathcal{P}$ و$S' = R$؛ ومن أجل $\alpha \neq \lambda$، حلول $y' - \lambda y = R(x)e^{\alpha x}$ هي $x \mapsto S(x)e^{\alpha x} + ce^{\lambda x}$، $c \in \mathbb{R}$، حيث $S \in \mathcal{P}$ الحدودية الوحيدة التي تحقق $S' + (\alpha - \lambda)S = R$ ($\deg S = \deg R$).

السؤال (1) بين أنه إذا كانت $f, g \in \mathcal{F}$ حلين للمعادلة (E_P) و$\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $\alpha f + g$ أيضا حل للمعادلة (E_P).

السؤال (2) **الحالة الأولى :** $P(x) = x^n$. بين أن حلول (E_P) هي الدوال الحدودية التي درجتها أصغر من أو تساوي $n-1$.

السؤال (3) **الحالة الثانية :** $P(x) = (x-\lambda)^n$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$ و$n \in \mathbb{N}^*$.

(أ) **صيغة لايبنيز.** ليكن $f, g \in \mathcal{F}$. بين بالترجع أن $fg \in \mathcal{F}$ وأنه لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم r :

$$(fg)^{(r)} = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f^{(k)} g^{(r-k)} \qquad \binom{r}{k} = \frac{r!}{k!(r-k)!},\ 0 \le k \le r.$$

إرشاد : يمكن استعمال صيغة باسكال $\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k-1} + \binom{r-1}{k}$، $1 \le k \le r-1$.

(ب) بين أن المعادلة (E_P) تكتب $\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (-\lambda)^{n-r} y^{(r)} = 0$.

(ج) لتكن $f \in \mathcal{F}$؛ نضع $h(x) = f(x)e^{-\lambda x}$. احسب المشتقة النونية $h^{(n)}$، واستنتج أن f حل للمعادلة (E_P) إذا وفقط إذا وجدت دالة حدودية R درجتها على الأكثر $n-1$ بحيث $f(x) = R(x)e^{\lambda x}$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

السؤال (4) نفترض أنه توجد $Q \in \mathcal{P}$ و$\lambda \in \mathbb{R}$ بحيث $P(x) = (x-\lambda)Q(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

(أ) بين أن دالة $f \in \mathcal{F}$ حل للمعادلة (E_P) إذا وفقط إذا كانت الدالة $f_1 = f' - \lambda f$ حلا للمعادلة (E_Q). إرشاد : استعمل العلاقات بين معاملات P وQ.

(ب) باستدلال بالترجع، استرجع نتيجة السؤال 3.c) دون استعمال صيغة لايبنيز.

السؤال (5) **تطبيق أول.** نعتبر المعادلة $y^{(4)} + y^{(3)} - 3y^{(2)} - 5y^{(1)} - 2y = 0$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

(أ) تحقق من أن حدوديتها المميزة هي $P(x) = (x-2)(x+1)^3$.

(ب) بين أن حلولها هي الدوال $x \mapsto S(x)e^{-x} + ce^{2x}$ حيث $c \in \mathbb{R}$ وS دالة حدودية درجتها على الأكثر 2.

السؤال (6) ليكن $r \in \mathbb{N}^*$ و$\lambda_1, \dots, \lambda_r$ أعدادا حقيقية مختلفة مثنى مثنى و$n_1, \dots, n_r$ أعدادا صحيحة طبيعية غير منعدمة؛ نضع $n = n_1 + \cdots + n_r$ و$P(x) = (x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\cdots(x-\lambda_r)^{n_r}$. بين بالترجع على n أن حلول (E_P) هي الدوال

$$x \mapsto P_1(x)e^{\lambda_1 x} + P_2(x)e^{\lambda_2 x} + \cdots + P_r(x)e^{\lambda_r x}$$

حيث لكل $k \in \{1, \dots, r\}$، P_k دالة حدودية درجتها على الأكثر $n_k - 1$. إرشاد : استعمل السؤال 4.a).

السؤال (7) تطبيق ثان.

(أ) لتكن $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ حيث $a_0, \dots, a_{n-1}$ أعداد صحيحة نسبية و$a_0 \neq 0$. بين أنه إذا كان عدد صحيح نسبي u جذرا لـ P فإن u يقسم a_0.

(ب) نأخذ $P(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$. حدد الحلول الصحيحة للمعادلة $P(x) = 0$ ثم عمل P.

(ج) نعتبر $R(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 1$.

- ليكن x عددا حقيقيا غير منعدم؛ نضع $y = x + \frac{1}{x}$. بين أن $\dfrac{R(x)}{x^3} = P(y)$، ثم استنتج أن $R(x) = (x+1)^2(x-1)^4$.
- أعط الحل العام في $\mathcal{F}$ للمعادلة $y^{(6)} - 2y^{(5)} - y^{(4)} + 4y^{(3)} - y^{(2)} - 2y' + y = 0$.

ملاحظة : في الأصل كتبت المعادلة الأخيرة بـ « $2y^5$ » عوض $2y^{(5)}$.

تعليق. مبرهنة البنية : إذا كان $P(x) = \prod (x-\lambda_k)^{n_k}$ فإن حلول المعادلة التفاضلية ذات الحدودية المميزة P هي $\sum P_k(x)e^{\lambda_k x}$ مع $\deg P_k < n_k$. وبالنسبة للمعادلة الأخيرة، يعطي $R(x) = (x+1)^2(x-1)^4$ الحلول $(a+bx)e^{-x} + (c + dx + ex^2 + fx^3)e^x$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

V

Arithmétique

Problème 40 — Session 2010

Propriétés arithmétiques des nombres de Fibonacci

Exercice 2, Partie I (traduit de l'arabe) © 2026 Saad Choukri

On considère la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: c'est la *suite de Fibonacci*. Pour deux entiers a et b, on note $a \wedge b$ leur plus grand commun diviseur.

1. **Question (1)** Vérifier que tous les termes de la suite sont des entiers naturels.
2. **Question (2)** Soit $n \geq 1$ un entier.
   a) **(a)** Montrer que $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.
   b) **(b)** En déduire que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.
3. **Question (3)** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.
   a) **(a)** Montrer l'égalité $F_{n+p} = F_nF_{p-1} + F_{n+1}F_p$ (on pourra raisonner par récurrence sur p).
   b) **(b)** En déduire que les couples (F_{n+p}, F_p) et (F_n, F_p) ont le même plus grand commun diviseur, c'est-à-dire $F_{n+p} \wedge F_p = F_n \wedge F_p$.
4. **Question (4)** Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$ et r le reste de la division euclidienne de m par n. Montrer que $F_m \wedge F_n = F_r \wedge F_n$.
5. **Question (5)** Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $F_m \wedge F_n = F_d$, où $d = m \wedge n$ (on pourra utiliser l'algorithme d'Euclide).

N.B. : l'original demande de montrer que $F_nF_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$, ce qui est faux (pour $n = 1$, le membre de gauche vaut 0) ; l'identité de Cassini correcte est $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Commentaire. La propriété $F_m \wedge F_n = F_{m\wedge n}$ fait de la suite de Fibonacci une « suite de divisibilité forte ». Conséquence : $F_m \mid F_n$ dès que $m \mid n$, et si F_n est premier avec $n \geq 5$, alors n est premier (la réciproque est fausse : $F_{19} = 4181 = 37 \times 113$).

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

النسخة العربية

خاصيات حسابية لأعداد فيبوناتشي

دورة 2010 ▪ التمرين 2، الجزء I (النص الأصلي) ▪ 2026 © سعد شكري

نعتبر المتتالية $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ $F_0 = 0$ و $F_1 = 1$ و $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ لكل $n \in \mathbb{N}$: إنها متتالية فيبوناتشي. من أجل عددين صحيحين a و b نرمز بـ $a \wedge b$ لقاسمهما المشترك الأكبر.

السؤال (1) تحقق من أن جميع حدود المتتالية أعداد صحيحة طبيعية.

السؤال (2) ليكن $n \geq 1$ عددا صحيحا.

(أ) بين أن $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

(ب) استنتج أن F_n و F_{n+1} أوليان فيما بينهما.

السؤال (3) ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $p \in \mathbb{N}^*$.

(أ) بين المتساوية $F_{n+p} = F_nF_{p-1} + F_{n+1}F_p$ (يمكن الاستدلال بالترجع على p).

(ب) استنتج أن للزوجين (F_{n+p}, F_p) و (F_n, F_p) نفس القاسم المشترك الأكبر، أي $F_{n+p} \wedge F_p = F_n \wedge F_p$.

السؤال (4) ليكن m و n عنصرين من $\mathbb{N}^*$ و r باقي القسمة الأقليدية لـ m على n. بين أن $F_m \wedge F_n = F_r \wedge F_n$.

السؤال (5) ليكن $m, n \in \mathbb{N}^*$. بين أن $F_m \wedge F_n = F_d$ حيث $d = m \wedge n$ (يمكن استعمال خوارزمية أقليدس).

ملاحظة : يطلب الأصل إثبات $F_nF_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$، وهذا خطأ (من أجل $n = 1$ الطرف الأيسر منعدم)؛ متساوية كاسيني الصحيحة هي $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

تعليق. الخاصية $F_m \wedge F_n = F_{m\wedge n}$ تجعل من متتالية فيبوناتشي «متتالية قابلية قسمة قوية». ونتيجة ذلك : $F_m \mid F_n$ كلما كان $m \mid n$، وإذا كان F_n أوليا مع $n \geq 5$ فإن n أولي (والعكس خاطئ : $F_{19} = 4181 = 37 \times 113$).

Problème 41 — Session 2023

Valuations p-adiques et formule de Legendre

Problème 2, notations et Partie 1 © 2026 Saad Choukri

Notations. $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers. Si p est premier et $n \in \mathbb{N}^*$, $v_p(n)$ désigne le plus grand entier naturel k tel que p^k divise n ; autrement dit, $p^k \mid n$ et $p^{k+1} \nmid n$. Par exemple : $v_2(120) = 3$, $v_3(120) = 1$, $v_5(120) = 1$ et $v_p(120) = 0$ pour tout $p \in \mathcal{P} \setminus \{2, 3, 5\}$. Pour $k \leq n$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

Dans ce problème, p désigne un nombre premier quelconque.

1.1. **Question (1)** Calculer $v_2(96)$ et $v_5(500)$.

1.2. **Question (2)** Soient n, m, r des entiers naturels non nuls.

1.2.1. **(a)** Calculer $v_p(nm)$ en fonction de $v_p(n)$ et $v_p(m)$.

1.2.2. **(b)** Calculer $v_p(n^r)$ en fonction de $v_p(n)$ et r.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

1.3. **Question (3)** Soit $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On pose $F_k = \{x \in \{1,\dots,n\} \mid p^k \mid x\}$ et $E_k = \{x \in \{1,\dots,n\} \mid v_p(x) = k\}$.

1.3.1. **(a)** Montrer que $\mathrm{Card}(F_k) = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$. Que vaut ce nombre si $k > n$?

1.3.2. **(b)** Montrer que $\mathrm{Card}(E_k) = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor$. Préciser $\mathrm{Card}(E_k)$ si $k > n$.

1.4. **Question (4)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $v_p(n!)$ en fonction des nombres $\mathrm{Card}(E_1), \dots, \mathrm{Card}(E_n)$, et en déduire la *formule de Legendre* :

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor .$$

1.5. **Question (5)** Si x et y sont deux réels quelconques, montrer que $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0,1\}$.

1.6. **Question (6) Applications.**

1.6.1. **(a)** Calculer $v_2(100!)$ et $v_5(100!)$.

1.6.2. **(b)** Déterminer le nombre de zéros situés à droite dans l'écriture décimale de $100!$.

1.6.3. **(c)** Montrer que pour tout couple (n,m) d'entiers naturels ≥ 2, le nombre $\dfrac{(2n)!\,(2m)!}{n!\,m!\,(n+m)!}$ est un entier naturel.

Commentaire. La formule de Legendre $v_p(n!) = \sum_k \lfloor n/p^k \rfloor$ donne $v_2(100!) = 97$ et $v_5(100!) = 24$, donc $100!$ se termine par 24 zéros. L'entier $\frac{(2n)!(2m)!}{n!m!(n+m)!}$ est le « nombre de Catalan super-généralisé » de Gessel ; on ne connaît pas d'interprétation combinatoire générale de ces nombres.

النسخة العربية

التقييمات p-الأسية وصيغة لوجاندر

دورة 2023 ▪ المسألة 2، ترميزات والجزء 1 ▪ © 2026 سعد شكري

ترميزات. $\mathcal{P}$ مجموعة الأعداد الأولية. إذا كان p أوليا و $n \in \mathbb{N}^*$ فإن $v_p(n)$ هو أكبر عدد صحيح طبيعي k بحيث يقسم p^k العدد n؛ أي $p^k \mid n$ و $p^{k+1} \nmid n$. مثلا : $v_2(120) = 3$، $v_3(120) = 1$ و $v_5(120) = 1$. لكل $p \in \mathcal{P} \setminus \{2,3,5\}$ و $v_p(120) = 0$. من أجل $k \leq n$: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$؛ و $\lfloor x \rfloor$ الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x.

في هذه المسألة يرمز p لعدد أولي ما.

السؤال (1) احسب $v_2(96)$ و $v_5(500)$.

السؤال (2) لتكن n, m, r أعدادا صحيحة طبيعية غير منعدمة.

(أ) احسب $v_p(nm)$ بدلالة $v_p(n)$ و $v_p(m)$.

(ب) احسب $v_p(n^r)$ بدلالة $v_p(n)$ و r.

السؤال (3) ليكن $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$. نضع $F_k = \{x \in \{1,\dots,n\} \mid p^k \mid x\}$ و $E_k = \{x \in \{1,\dots,n\} \mid v_p(x) = k\}$.

(أ) بين أن $\mathrm{Card}(F_k) = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$. ما قيمة هذا العدد إذا كان $k > n$؟

(ب) بين أن $\mathrm{Card}(E_k) = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor$. حدد $\mathrm{Card}(E_k)$ إذا كان $k > n$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ أو إعادة النشر دون إذن كتابي من المؤلف

السؤال (4) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. عبر عن $v_p(n!)$ بدلالة الأعداد $\mathrm{Card}(E_1), \ldots, \mathrm{Card}(E_n)$، واستنتج صيغة لوجاندر :

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor .$$

السؤال (5) إذا كان x وy عددين حقيقيين ما، بين أن $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0,1\}$.

السؤال (6) تطبيقات.

(أ) احسب $v_2(100!)$ و$v_5(100!)$.

(ب) حدد عدد الأصفار الموجودة على يمين الكتابة العشرية للعدد $100!$.

(ج) بين أنه لكل زوج (n,m) من الأعداد الصحيحة الطبيعية ≥ 2، العدد $\dfrac{(2n)!\,(2m)!}{n!\,m!\,(n+m)!}$ عدد صحيح طبيعي.

تعليق. تعطي صيغة لوجاندر $v_p(n!) = \sum_k \lfloor n/p^k \rfloor$ القيمتين $v_2(100!) = 97$ و$v_5(100!) = 24$، فينتهي $100!$ بـ 24 صفرا. والعدد الصحيح $\frac{(2n)!(2m)!}{n!m!(n+m)!}$ هو «عدد كاتالان الفائق» لغيسل؛ ولا يعرف تأويل تأليفي عام لهذه الأعداد.

Problème 42 — Session 2010

Décomposition de Fibonacci d'un entier : théorème de Zeckendorf

Exercice 2, Partie II (traduit de l'arabe) © 2026 Saad Choukri

On note $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On se propose de démontrer que tout entier naturel N non nul s'écrit de manière unique sous la forme

$$N = \sum_{k=2}^{n} a_k F_k,$$

où $n \geq 2$ est un entier, $a_2, \ldots, a_n$ sont des éléments de $\{0,1\}$ avec $a_n = 1$, et $a_k a_{k+1} = 0$ pour tout $k \in \{2, \ldots, n-1\}$ lorsque $n \geq 3$ (deux nombres de Fibonacci consécutifs n'apparaissent jamais ensemble).

Définition. Une telle écriture est appelée *décomposition de Fibonacci* de N.

1. **Question (1) Limite de la suite (F_n).**

a) **(a)** Montrer que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b) **(b)** On suppose que (F_n) converge vers un réel ℓ. Montrer que $\ell = 0$, puis en déduire que (F_n) est divergente et tend vers $+\infty$.

2. **Question (2) Existence de la décomposition.** Pour tout entier $n \geq 2$, on considère l'assertion

P_n : « tout entier naturel N vérifiant $1 \leq N < F_n$ admet une décomposition de Fibonacci ».

On veut démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

a) **(a)** Vérifier que P_2 et P_3 sont vraies.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

b) **(b)** On suppose P_k vraie pour tout k tel que $2 \leq k \leq n$ (avec $n \geq 3$), et on considère un entier N tel que $1 \leq N < F_{n+1}$. Étudier l'existence d'une décomposition de Fibonacci de N dans chacun des deux cas suivants :

- $1 \leq N \leq F_n$;
- $F_n < N < F_{n+1}$ (on remarquera que $1 \leq N - F_n < F_{n-1}$).

c) **(c)** En déduire que tout entier naturel $N \geq 1$ admet une décomposition de Fibonacci.

3. **Question (3) Unicité de la décomposition.** Soit N un entier naturel non nul et $N = \sum_{k=2}^{n} a_k F_k$ une décomposition de Fibonacci de N.

a) **(a)** Montrer par récurrence que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} a_k F_k < F_{n-1}$ si $n \geq 3$, et en déduire que $F_n \leq N < F_{n+1}$.

b) **(b)** Que représente le nombre F_n pour l'entier N ?

c) **(c)** Montrer l'unicité de la décomposition de Fibonacci.

4. **Question (4)** Donner les termes de la suite de Fibonacci inférieurs à 2010, puis en déduire la décomposition de Fibonacci de l'entier 2010.

N.B. : l'original demande en 3.a) de montrer que $\sum_{k=2}^{n-1} a_k F_k < F_n$; la majoration plus précise par F_{n-1} (vraie grâce à la condition $a_k a_{k+1} = 0$) donne directement $F_n \leq N < F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$. On trouve $2010 = F_{17} + F_{14} + F_9 + F_3 = 1597 + 377 + 34 + 2$.

Commentaire. Théorème de Zeckendorf (1939, publié en 1972) : tout entier ≥ 1 s'écrit de façon unique comme somme de nombres de Fibonacci non consécutifs. On trouve $2010 = F_{17} + F_{14} + F_9 + F_3 = 1597 + 377 + 34 + 2$. Cette « numération de Fibonacci » intervient dans le jeu de Nim de Fibonacci et dans le codage de Fibonacci.

النسخة العربية

تفكيك فيبوناتشي لعدد صحيح : مبرهنة زيكندورف

دورة 2010 ▪ التمرين 2، الجزء II (النص الأصلي) ▪ © 2026 سعد شكري

نرمز بـ $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ لمتتالية فيبوناتشي : $F_0 = 0$، $F_1 = 1$، $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. نقترح إثبات أن كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم N يكتب بكيفية وحيدة على الشكل

$$N = \sum_{k=2}^{n} a_k F_k$$

حيث $n \geq 2$ عدد صحيح و$a_2, \ldots, a_n$ عناصر من $\{0, 1\}$ مع $a_n = 1$، و$a_k a_{k+1} = 0$ لكل $k \in \{2, \ldots, n-1\}$ عندما يكون $n \geq 3$ (لا يظهر عددان متتابعان من فيبوناتشي معا).

تعريف. تسمى هذه الكتابة تفكيك فيبوناتشي للعدد N.

السؤال (1) نهاية المتتالية (F_n).

(أ) بين أن المتتالية $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية.

(ب) نفترض أن (F_n) متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ. بين أن $\ell = 0$، ثم استنتج أن (F_n) متباعدة وتؤول إلى $+\infty$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 سعد شكري ▪ جميع الحقوق محفوظة ▪ يُحظر النسخ أو إعادة النشر دون إذن المؤلف

السؤال (2) وجود التفكيك. لكل عدد صحيح $n \geq 2$ نعتبر العبارة

P_n : «كل عدد صحيح طبيعي N يحقق $1 \leq N < F_n$ يقبل تفكيك فيبوناتشي».

نريد أن نبين بالترجع أن P_n صحيحة لكل عدد صحيح $n \geq 2$.

(أ) تحقق من أن P_2 وP_3 صحيحتان.

(ب) نفترض أن P_k صحيحة لكل k يحقق $2 \leq k \leq n$ (مع $n \geq 3$)، ونعتبر عددا صحيحا N بحيث $1 \leq N < F_{n+1}$. ادرس وجود تفكيك فيبوناتشي للعدد N في كل من الحالتين التاليتين :

- $1 \leq N \leq F_n$؛
- $F_n < N < F_{n+1}$ (لاحظ أن $1 \leq N - F_n < F_{n-1}$).

(ج) استنتج أن كل عدد صحيح طبيعي $N \geq 1$ يقبل تفكيك فيبوناتشي.

السؤال (3) وحدانية التفكيك. ليكن N عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و$N = \sum_{k=2}^{n} a_k F_k$ تفكيك فيبوناتشي له.

(أ) بين بالترجع أن $\sum_{k=2}^{n-1} a_k F_k < F_{n-1}$ إذا كان $n \geq 3$، واستنتج أن $F_n \leq N < F_{n+1}$.

(ب) ماذا يمثل العدد F_n بالنسبة للعدد N؟

(ج) بين وحدانية تفكيك فيبوناتشي.

السؤال (4) أعط حدود متتالية فيبوناتشي الأصغر من 2010، ثم استنتج تفكيك فيبوناتشي للعدد 2010.

ملاحظة : يطلب الأصل في 3.a إثبات أن $\sum_{k=2}^{n-1} a_k F_k < F_n$؛ والمكبورة الأدق بـ F_{n-1} (الصحيحة بفضل الشرط $a_k a_{k+1} = 0$) تعطي مباشرة $F_n \leq N < F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$. نجد $2010 = F_{17} + F_{14} + F_9 + F_3 = 1597 + 377 + 34 + 2$.

تعليق. مبرهنة زيكندورف (1939، نشرت سنة 1972) : كل عدد صحيح $1 \geq$ يكتب بكيفية وحيدة مجموعا لأعداد فيبوناتشي غير متتابعة. نجد $2010 = F_{17} + F_{14} + F_9 + F_3 = 1597 + 377 + 34 + 2$. ويتدخل «نظام العد الفيبوناتشي» هذا في لعبة نيم فيبوناتشي وفي ترميز فيبوناتشي.

Problème 43 — Session 2015

Transformation binomiale de Pascal

Problème, Partie 3 © 2026 Saad Choukri

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \ldots, n\}$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, avec la convention $\binom{r}{k} = 0$ si $k > r$. L'objectif est de démontrer la formule d'inversion binomiale de Pascal et d'en étudier quelques applications.

3.1. **Question (1)** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$.

Montrer que pour tout entier naturel m,

$$a_m = (-1)^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} b_k. \tag{4}$$

3.2. **Question (2) Applications.**

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

3.2.1. **(a)** Montrer que pour tous entiers naturels k et m,

$$\sum_{p=0}^{m}(-1)^p\,p(p-1)\cdots(p-k+1)\binom{m}{p}=(-1)^m\,m!\,\delta_{km}, \tag{5}$$

où δ_{km} est le symbole de Kronecker : $\delta_{km}=1$ si $k=m$ et $\delta_{km}=0$ sinon.

3.2.2. **(b)** En déduire que pour tout entier naturel m et tout $k\in\{0,\dots,m\}$,

$$\sum_{p=0}^{m}(-1)^p p^k\binom{m}{p}=(-1)^m\,m!\,\delta_{km}. \tag{6}$$

Indication : on pourra raisonner par récurrence sur k.

N.B. : l'identité (5) n'est vraie pour tous k,m qu'avec la convention que le produit $p(p-1)\cdots(p-k+1)$ vaut 1 pour $k=0$. Pour $k>m$, (6) est en général fausse (par exemple $k=2$, $m=1$ donne $-1\neq 0$), d'où la restriction $k\le m$.

Commentaire. L'inversion de Pascal : $b_n=\sum_k\binom{n}{k}a_k \iff a_n=\sum_k(-1)^{n-k}\binom{n}{k}b_k$. Appliquée à p^k, elle montre que $\sum_p(-1)^p\binom{m}{p}p^k$ est nul pour $k<m$ et vaut $(-1)^m m!$ pour $k=m$: c'est la nullité des différences finies d'ordre m d'un polynôme de degré $<m$.

النسخة العربية

تحويل باسكال الحداني

دورة 2015 ▪ المسألة، الجزء 3 ▪ © 2026 سعد شكري

من أجل $n\in\mathbb{N}$ و$k\in\{0,\dots,n\}$: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$، مع الاصطلاح $\binom{r}{k}=0$ إذا كان $k>r$. الهدف هو إثبات صيغة القلب الحداني لباسكال ودراسة بعض تطبيقاتها.

السؤال (1) لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين عدديتين تحققان $\forall n\in\mathbb{N},\ b_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$. بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي m :

$$a_m=(-1)^m\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}b_k. \tag{4}$$

السؤال (2) تطبيقات.

(أ) بين أنه لكل عددين صحيحين طبيعيين k وm :

$$\sum_{p=0}^{m}(-1)^p\,p(p-1)\cdots(p-k+1)\binom{m}{p}=(-1)^m\,m!\,\delta_{km}, \tag{5}$$

حيث δ_{km} رمز كرونيكر : $\delta_{km}=1$ إذا كان $k=m$ و$\delta_{km}=0$ في الحالة المعاكسة.

(ب) استنتج أنه لكل عدد صحيح طبيعي m ولكل $k\in\{0,\dots,m\}$:

$$\sum_{p=0}^{m}(-1)^p p^k\binom{m}{p}=(-1)^m\,m!\,\delta_{km}. \tag{6}$$

إرشاد : يمكن الاستدلال بالترجع على k.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري ▪ جميع الحقوق محفوظة ▪ يمنع النسخ أو إعادة النشر دون إذن مسبق من المؤلف

ملاحظة : المتساوية (5) لا تصح لكل k, m إلا مع الاصطلاح أن الجداء $p(p-1)\cdots(p-k+1)$ يساوي 1 من أجل $k=0$. ومن أجل $k>m$ تكون (6) خاطئة عموما (مثلا $k=2$، $m=1$ يعطي $0 \neq -1$)، ومن هنا القيد $k \leq m$.

تعليق. قلب باسكال : $a_n = \sum_k (-1)^{n-k}\binom{n}{k} b_k \iff b_n = \sum_k \binom{n}{k} a_k$. وبتطبيقه على p^k نبين أن $\sum_p (-1)^p \binom{m}{p} p^k$ منعدم من أجل $k < m$ ويساوي $(-1)^m m!$ من أجل $k = m$: الفرق المنتهي من الرتبة m لحدودية درجتها أصغر من m منعدم.

Problème 44 — Session 2024

Fonctions arithmétiques τ, σ, φ et formule de Gauss $\sum_{d|n}\varphi(d)=n$

Problème 2, notations et Partie 1 © 2026 Saad Choukri

Notations et rappels. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x et $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ sa partie fractionnaire. Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a \wedge b$ et $a \vee b$ désignent leur pgcd et leur ppcm ; pour $n \in \mathbb{N}^*$, $na \wedge nb = n(a \wedge b)$ et $(a \wedge b)(a \vee b) = ab$. On appelle *fonction arithmétique* toute application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$; elle est *multiplicative* si $f(mn) = f(m)f(n)$ pour tous m, n premiers entre eux.

On définit les fonctions arithmétiques suivantes :

- $\tau(n)$ est le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$; par exemple $\tau(12) = 6$, les diviseurs de 12 étant $1, 2, 3, 4, 6, 12$;
- $\sigma(n)$ est la somme des diviseurs de n ; par exemple $\sigma(12) = 1+2+3+4+6+12 = 28$;
- $\varphi(n) = \mathrm{Card}\{k \in \{1, \ldots, n\} \mid n \wedge k = 1\}$ (*indicatrice d'Euler*) ; par exemple $\varphi(12) = 4$, puisque les entiers de $\{1, \ldots, 12\}$ premiers avec 12 sont $1, 5, 7, 11$.

1.1. **Question (1) Étude des fonctions τ et σ.** Soit $m = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en facteurs premiers d'un entier $m \geq 2$, où $r \geq 1$, les p_k sont des nombres premiers deux à deux distincts et les α_k des entiers naturels non nuls.

1.1.1. **(a)** Montrer que $\tau(m) = \prod_{k=1}^{r}(\alpha_k + 1)$. Que vaut $\tau(1)$?

1.1.2. **(b)** Montrer que $\sigma(m) = \displaystyle\prod_{k=1}^{r} \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$. Que vaut $\sigma(1)$?

1.1.3. **(c)** Montrer que les fonctions τ et σ sont multiplicatives.

1.2. **Question (2) Étude préliminaire de φ.** Soient p un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

1.2.1. **(a)** Calculer $\varphi(p)$ en fonction de p.

1.2.2. **(b)** Montrer que si $k \in \mathbb{N}^*$, alors $k \wedge p^\alpha \neq 1$ si et seulement si $p \mid k$.

1.2.3. **(c)** En déduire l'expression de $\mathrm{Card}\{k \in \{1, \ldots, p^\alpha\} \mid p^\alpha \wedge k \neq 1\}$ en fonction de p et α.

1.2.4. **(d)** Montrer que $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha\left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

1.3. **Question (3) Une formule de Gauss.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1.3.1. **(a)** Soit d un diviseur de n.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

(i) **(i)** Montrer que si $k \in \{1, \dots, n\}$, alors $k \wedge n = d$ si et seulement s'il existe $u \in \{1, \dots, \frac{n}{d}\}$ tel que $k = du$ et $u \wedge \frac{n}{d} = 1$.

(ii) **(ii)** En déduire que $\mathrm{Card}\{k \in \{1, \dots, n\} \mid k \wedge n = d\} = \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$.

1.3.2. **(b)** Établir que $\{1, \dots, n\} = \bigcup_{d|n}\{k \in \{1, \dots, n\} \mid k \wedge n = d\}$, puis en déduire la formule de Gauss

$$n = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d'|n} \varphi(d'). \tag{1}$$

1.4. **Question (4) Une première application de la formule de Gauss.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1.4.1. **(a)** Montrer que si $d \in \{1, \dots, n\}$, le nombre de multiples de d appartenant à $\{1, \dots, n\}$ vaut $\lfloor n/d \rfloor$.

1.4.2. **(b)** Montrer alors que $\displaystyle\sum_{d=1}^{n} \varphi(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{n} \sum_{d|k} \varphi(d)$.

1.4.3. **(c)** En déduire la formule $\displaystyle\sum_{d=1}^{n} \varphi(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor = \frac{n(n+1)}{2}$.

1.5. **Question (5) Une conséquence de la formule précédente.** Soit $n \geq 2$ un entier ; on pose $S(n) = \left\{k \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; \left\{\frac{n}{k}\right\} \geq \frac{1}{2}\right\}$.

1.5.1. **(a)** Justifier que l'ensemble $S(n)$ est fini.

1.5.2. **(b)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\left\lfloor \frac{2n}{k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \in \{0, 1\}$, et que $\left\lfloor \frac{2n}{k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = 1$ si et seulement si $k \in S(n)$.

1.5.3. **(c)** Montrer que $\displaystyle\sum_{k \in S(n)} \varphi(k) = n^2$.

Commentaire. Formule de Gauss : $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$. On en déduit $\sum_{d \leq n} \varphi(d)\lfloor n/d \rfloor = \frac{n(n+1)}{2}$ et l'identité étonnante $\sum_{k \in S(n)} \varphi(k) = n^2$. Les fonctions τ, σ et φ sont multiplicatives : elles sont déterminées par leurs valeurs sur les puissances de nombres premiers.

النسخة العربية

$\sum_{d|n} \varphi(d) \quad = \quad n$ الدوال الحسابية τ و σ و φ وصيغة غاوس

دورة 2024 ▪ المسألة 2، ترميزات والجزء 1 ▪ 2026 © سعد شكري

ترميزات وتذكير. من أجل $x \in \mathbb{R}$، $\lfloor x \rfloor$ الجزء الصحيح للعدد x و $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ جزؤه الكسري. من أجل $a, b \in \mathbb{N}^*$، يرمز $a \wedge b$ و $a \vee b$ للقاسم المشترك الأكبر وللمضاعف المشترك الأصغر؛ ومن أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $na \wedge nb = n(a \wedge b)$ و $(a \wedge b)(a \vee b) = ab$. نسمي دالة حسابية كل تطبيق $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$؛ وتكون جدائية إذا كان $f(mn) = f(m)f(n)$ لكل m, n أوليين فيما بينهما.

نعرف الدوال الحسابية التالية :

- $\tau(n)$ عدد قواسم n في $\mathbb{N}^*$؛ مثلا $\tau(12) = 6$ لأن قواسم 12 هي $1, 2, 3, 4, 6, 12$؛
- $\sigma(n)$ مجموع قواسم n؛ مثلا $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$؛
- $\varphi(n) = \mathrm{Card}\{k \in \{1, \dots, n\} \mid n \wedge k = 1\}$ (دالة أولر)؛ مثلا $\varphi(12) = 4$ لأن الأعداد من $\{1, \dots, 12\}$ الأولية مع 12 هي $1, 5, 7, 11$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

السؤال (1) دراسة الدالتين τ وσ. ليكن $m \geq 2$ تفكيك عدد صحيح $m = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$ إلى جداء عوامل أولية، حيث $r \geq 1$ وp_k أعداد أولية مختلفة مثنى مثنى وα_k أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة.

(أ) بين أن $\tau(m) = \prod_{k=1}^{r}(\alpha_k + 1)$. ما قيمة $\tau(1)$؟

(ب) بين أن $\sigma(m) = \prod_{k=1}^{r} \dfrac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$. ما قيمة $\sigma(1)$؟

(ج) بين أن الدالتين τ وσ جدائيتان.

السؤال (2) دراسة أولية للدالة φ. ليكن p عددا أوليا و$\alpha \in \mathbb{N}^*$.

(أ) احسب $\varphi(p)$ بدلالة p.

(ب) بين أنه إذا كان $k \in \mathbb{N}^*$ فإن $k \wedge p^\alpha \neq 1$ إذا وفقط إذا كان $p \mid k$.

(ج) استنتج تعبير $\mathrm{Card}\{k \in \{1, \ldots, p^\alpha\} \mid p^\alpha \wedge k \neq 1\}$ بدلالة p وα.

(د) بين أن $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

السؤال (3) صيغة لغاوس. ليكن $n \in \mathbb{N}^*$.

(أ) ليكن d قاسما للعدد n.

(i) بين أنه إذا كان $k \in \{1, \ldots, n\}$ فإن $k \wedge n = d$ إذا وفقط إذا وجد $u \in \{1, \ldots, \frac{n}{d}\}$ بحيث $k = du$ و$u \wedge \frac{n}{d} = 1$.

(ii) استنتج أن $\mathrm{Card}\{k \in \{1, \ldots, n\} \mid k \wedge n = d\} = \varphi\left(\dfrac{n}{d}\right)$.

(ب) بين أن $\{1, \ldots, n\} = \bigcup_{d|n} \{k \in \{1, \ldots, n\} \mid k \wedge n = d\}$، ثم استنتج صيغة غاوس

$$n = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d'|n} \varphi(d'). \tag{1}$$

السؤال (4) تطبيق أول لصيغة غاوس. ليكن $n \in \mathbb{N}^*$.

(أ) بين أنه إذا كان $d \in \{1, \ldots, n\}$ فإن عدد مضاعفات d المنتمية إلى $\{1, \ldots, n\}$ هو $\lfloor n/d \rfloor$.

(ب) بين أن $\displaystyle\sum_{d=1}^{n} \varphi(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{n} \sum_{d|k} \varphi(d)$.

(ج) استنتج الصيغة $\displaystyle\sum_{d=1}^{n} \varphi(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor = \frac{n(n+1)}{2}$.

السؤال (5) نتيجة للصيغة السابقة. نعتبر عددا صحيحا $n \geq 2$ ونضع $S(n) = \left\{k \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; \left\{\frac{n}{k}\right\} \geq \frac{1}{2}\right\}$.

(أ) علل أن المجموعة $S(n)$ منتهية.

(ب) ليكن $k \in \mathbb{N}^*$. بين أن $\left\lfloor \frac{2n}{k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \in \{0, 1\}$ وأن $\left\lfloor \frac{2n}{k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = 1$ إذا وفقط إذا كان $k \in S(n)$.

(ج) بين أن $\displaystyle\sum_{k \in S(n)} \varphi(k) = n^2$.

تعليق. صيغة غاوس : $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$. ونستنتج منها $\sum_{d \leq n} \varphi(d)\lfloor n/d \rfloor = \frac{n(n+1)}{2}$ والمتساوية المدهشة $\sum_{k \in S(n)} \varphi(k) = n^2$. الدوال τ وσ وφ جدائية : فهي محددة بقيمها على قوى الأعداد الأولية.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

Problème 45 — Session 2012

Formes quadratiques entières définies positives et leur équivalence

Partie 2 (traduit de l'arabe) © 2026 Saad Choukri

Définitions. Une *forme quadratique* sur $\mathbb{R}^2$ est une application $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pour laquelle il existe des réels a, b, c (ses *coefficients*) tels que $q(x,y) = ax^2+bxy+cy^2$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; elle est dite *entière* si ses coefficients sont des entiers relatifs. On lui associe la matrice $M_q = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ et son *discriminant* $d(q) = 4ac - b^2 = 4 \det M_q$. La forme q est *définie positive* si $q(x,y) > 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On note $\mathcal{Q}$ l'ensemble des formes quadratiques entières et $\mathcal{Q}^+$ celui des formes de $\mathcal{Q}$ définies positives. On note $\mathcal{L}(\mathbb{Z}^2)$ l'ensemble des applications linéaires $f : (x,y) \mapsto (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ telles que $f(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$, de matrice $M(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, et $\mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)$ le sous-ensemble de celles qui vérifient $\det M(f) = 1$.

> **Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine).** $f \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}^2)$ si et seulement si $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$ et $\det M(f) = \pm 1$; $(\mathcal{L}(\mathbb{Z}^2), \circ)$ est un groupe dont $(\mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2), \circ)$ est un sous-groupe ; $M(f \circ g) = M(f)M(g)$, $\det(AB) = \det A \det B$, ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

2.1. **Question (1) Exemples.**

2.1.1. **(a)** Montrer que la forme $q_1(x,y) = x^2 + y^2$ est définie positive.

2.1.2. **(b)** Montrer que la forme $q_2(x,y) = x^2 + xy + y^2$ est définie positive.

2.1.3. **(c)** La forme $q_3(x,y) = x^2 - y^2$ est-elle définie positive ?

2.2. **Question (2) Condition nécessaire et suffisante.** Soit $q(x,y) = ax^2+bxy+cy^2$ une forme quadratique, avec a, b, c réels.

2.2.1. **(a)** Calculer $q(1,0)$, $q(0,1)$ et $q(-b, 2a)$.

2.2.2. **(b)** Montrer que si $a \neq 0$, alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $q(x,y) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}y\right)^2 + \dfrac{d(q)}{4a}y^2$.

2.2.3. **(c)** En déduire que q est définie positive si et seulement si $a > 0$ et $d(q) > 0$.

2.3. **Question (3)** Soient $q \in \mathcal{Q}^+$ et n un entier naturel. Montrer que l'ensemble $E_q(n) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid q(x,y) = n\}$ est fini.

2.4. **Question (4)** Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}^2)$ et $q \in \mathcal{Q}^+$, avec $f(x,y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ et $q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. On considère $q' = q \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

2.4.1. **(a)** Montrer que q' est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$; on note a', b', c' ses coefficients.

2.4.2. **(b)** Calculer a', b', c' en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et de a, b, c, et montrer que ce sont des entiers.

2.4.3. **(c)** Vérifier que $M_{q'} = {}^tM(f)\, M_q\, M(f)$.

2.4.4. **(d)** Calculer $d(q')$ en fonction de $d(q)$, puis montrer que $q' \in \mathcal{Q}^+$.

2.5. **Question (5)** On garde les données de la question 2.4.

2.5.1. **(a)** Montrer que pour tout entier naturel n, $E_{q'}(n) = f^{-1}\big(E_q(n)\big)$, puis en déduire que $E_{q'}(n)$ et $E_q(n)$ ont le même nombre d'éléments.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

2.5.2. **(b)** On note $e(q)$ le pgcd des coefficients de la forme q. Montrer que $e(q') = e(q)$.

2.6. **Question (6)** Pour $q, q' \in \mathcal{Q}^+$, on considère l'ensemble $\mathcal{L}^+(q,q') = \{f \in \mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2) \mid q' = q \circ f\}$. Montrer que $\mathcal{L}^+(q,q')$ est fini.

2.7. **Question (7) Une relation d'équivalence sur $\mathcal{Q}^+$.** Soient $q, q' \in \mathcal{Q}^+$. On dit que q' est *équivalente* à q, et on note $q' \sim q$, s'il existe $f \in \mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)$ tel que $q' = q \circ f$, autrement dit si $\mathcal{L}^+(q,q') \neq \emptyset$.

2.7.1. **(a)** Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{Q}^+$ (réflexive, symétrique et transitive).

2.7.2. **(b)** Les formes q_1 et q_2 de la question 2.1 sont-elles équivalentes ? Justifier. *Indication : utiliser la question 2.4.4.*

2.7.3. **(c)** Soient q et q' deux formes équivalentes de $\mathcal{Q}^+$, avec $q' = q \circ f$ où $f \in \mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)$. Montrer que $\mathcal{L}^+(q',q') = \{f^{-1} \circ g \circ f \mid g \in \mathcal{L}^+(q,q)\}$, puis comparer les cardinaux de $\mathcal{L}^+(q',q')$ et de $\mathcal{L}^+(q,q)$.

2.7.4. **(d)** Soit f_1 l'élément de $\mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)$ de matrice $M(f_1) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, et $q_4 = q_1 \circ f_1$.

- Vérifier que les formes q_1 et q_4 sont équivalentes, puis calculer $q_1(0,1)$ et $q_4(0,1)$.
- Déterminer les éléments de $E_{q_1}(2)$ et en déduire ceux de $E_{q_4}(2)$.
- Déterminer les éléments des ensembles $\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid q_1(x,y) = 2\}$ et $\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid q_4(x,y) = 2\}$. Ont-ils le même nombre d'éléments ?

Commentaire. L'équivalence des formes quadratiques sous $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ conserve le discriminant et les nombres représentés. Par exemple x^2+y^2 et x^2+xy+y^2 ne sont pas équivalentes (discriminants 4 et 3). En 2.7.4, $q_4 = q_1 \circ f_1$ représente 2 autant de fois que q_1 (quatre fois), mais pas avec les mêmes couples d'entiers naturels.

النسخة العربية

الصيغ التربيعية الصحيحة الموجبة قطعا وتكافؤها

دورة 2012 ▪ الجزء 2 (النص الأصلي) ▪ © 2026 سعد شكري

تعاريف. نسمي صيغة تربيعية على $\mathbb{R}^2$ كل تطبيق $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ بحيث توجد أعداد حقيقية a, b, c (معاملاتها) تحقق $q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$؛ وتكون صحيحة إذا كانت معاملاتها أعدادا صحيحة نسبية. نربط بها المصفوفة $M_q = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ ومميزها $d(q) = 4ac - b^2 = 4 \det M_q$. تكون الصيغة q موجبة قطعا إذا كان $q(x,y) > 0$ لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. نرمز بـ $\mathcal{Q}$ لمجموعة الصيغ التربيعية الصحيحة وبـ $\mathcal{Q}^+$ لمجموعة الصيغ الموجبة قطعا منها.

نرمز بـ $\mathcal{L}(\mathbb{Z}^2)$ لمجموعة التطبيقات الخطية $f : (x,y) \mapsto (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ التي تحقق $f(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$، ومصفوفتها $M(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$، وبـ $\mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)$ للجزء المكون من التي تحقق $\det M(f) = 1$.

نتائج مقبولة (مُثبتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). $f \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}^2)$ إذا وفقط إذا كان $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$ و$\det M(f) = \pm 1$؛ $(\mathcal{L}(\mathbb{Z}^2), \circ)$ زمرة و$(\mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2), \circ)$ زمرة جزئية منها؛ $M(f \circ g) = M(f)M(g)$، $\det(AB) = \det A \det B$، ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

السؤال (1) أمثلة.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri ▪ جميع الحقوق محفوظة ▪ يُمنع النسخ أو إعادة النشر دون إذن كتابي من المؤلف

(أ) بين أن الصيغة $q_1(x,y) = x^2 + y^2$ موجبة قطعا.

(ب) بين أن الصيغة $q_2(x,y) = x^2 + xy + y^2$ موجبة قطعا.

(ج) هل الصيغة $q_3(x,y) = x^2 - y^2$ موجبة قطعا؟

السؤال (2) شرط لازم وكاف. لتكن $q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ صيغة تربيعية حيث a, b, c أعداد حقيقية.

(أ) احسب $q(1,0)$ و$q(0,1)$ و$q(-b, 2a)$.

(ب) بين أنه إذا كان $a \neq 0$ فإن لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $q(x,y) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}y\right)^2 + \dfrac{d(q)}{4a}y^2$.

(ج) استنتج أن q موجبة قطعا إذا وفقط إذا كان $a > 0$ و$d(q) > 0$.

السؤال (3) لتكن $q \in \mathcal{Q}^+$ وn عددا صحيحا طبيعيا. بين أن المجموعة $E_q(n) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid q(x,y) = n\}$ منتهية.

السؤال (4) لتكن $f \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}^2)$ و$q \in \mathcal{Q}^+$ مع $f(x,y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ و$q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. نعتبر $q' = q \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(أ) بين أن q' صيغة تربيعية على $\mathbb{R}^2$؛ نرمز بـ a', b', c' لمعاملاتها.

(ب) احسب a', b', c' بدلالة a, b, c و$\alpha, \beta, \gamma, \delta$، وبين أنها أعداد صحيحة.

(ج) تحقق من أن $M_{q'} = {}^tM(f)\, M_q\, M(f)$.

(د) احسب $d(q')$ بدلالة $d(q)$، ثم بين أن $q' \in \mathcal{Q}^+$.

السؤال (5) نحتفظ بمعطيات السؤال 2.4.

(أ) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n: $E_{q'}(n) = f^{-1}\big(E_q(n)\big)$، ثم استنتج أن للمجموعتين $E_{q'}(n)$ و$E_q(n)$ نفس عدد العناصر.

(ب) نرمز بـ $e(q)$ للقاسم المشترك الأكبر لمعاملات الصيغة q. بين أن $e(q') = e(q)$.

السؤال (6) من أجل $q, q' \in \mathcal{Q}^+$ نعتبر المجموعة $\mathcal{L}^+(q,q') = \{f \in \mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2) \mid q' = q \circ f\}$. بين أن $\mathcal{L}^+(q,q')$ منتهية.

السؤال (7) علاقة تكافؤ على $\mathcal{Q}^+$. ليكن $q, q' \in \mathcal{Q}^+$. نقول إن q' تكافئ q ونكتب $q' \sim q$ إذا وجد $f \in \mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)$ بحيث $q' = q \circ f$، أي إذا كان $\mathcal{L}^+(q,q') \neq \emptyset$.

(أ) بين أن $\sim$ علاقة تكافؤ على $\mathcal{Q}^+$ (انعكاسية وتماثلية ومتعدية).

(ب) هل الصيغتان q_1 وq_2 من السؤال 2.1 متكافئتان؟ علل. إرشاد : استعمل السؤال 2.4.4.

(ج) لتكن q وq' صيغتين متكافئتين من $\mathcal{Q}^+$ مع $q' = q \circ f$ حيث $f \in \mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)$. بين أن $\mathcal{L}^+(q',q') = \{f^{-1} \circ g \circ f \mid g \in \mathcal{L}^+(q,q)\}$، ثم قارن رئيسيي $\mathcal{L}^+(q',q')$ و$\mathcal{L}^+(q,q)$.

(د) ليكن f_1 عنصر $\mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)$ ذا المصفوفة $M(f_1) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$، و$q_4 = q_1 \circ f_1$.

- تحقق من أن الصيغتين q_1 وq_4 متكافئتان، ثم احسب $q_1(0,1)$ و$q_4(0,1)$.
- حدد عناصر $E_{q_1}(2)$ واستنتج عناصر $E_{q_4}(2)$.
- حدد عناصر المجموعتين $\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid q_1(x,y) = 2\}$ و$\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid q_4(x,y) = 2\}$. هل لهما نفس عدد العناصر؟

تعليق. يحافظ تكافؤ الصيغ التربيعية بواسطة $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ على المميز وعلى الأعداد الممثلة. مثلا $x^2 + y^2$ و$x^2 + xy + y^2$ غير متكافئتين (مميزاهما 4 و3). وفي 2.7.4 تمثل $q_4 = q_1 \circ f_1$ العدد 2 بنفس عدد المرات التي تمثله بها q_1 (أربع مرات)، لكن ليس بنفس أزواج الأعداد الصحيحة الطبيعية.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri

Problème 46 — Session 2013

Un critère d'irréductibilité dans $\mathbb{Z}[X]$: le polynôme des chiffres d'un nombre premier

Exercice 2, Partie 3 (traduit de l'arabe) © 2026 Saad Choukri

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). (a) Si $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ est un polynôme de degré $n \geq 2$ à coefficients réels, avec $a_n \geq 1$, $a_{n-1} \geq 0$ et $|a_k| \leq M$ pour $0 \leq k \leq n-2$ ($M > 0$), alors toute racine z de P vérifie $\mathrm{Re}(z) < 0$ ou $|z| < \frac{1+\sqrt{1+4M}}{2}$.
(b) Si Q est un polynôme non constant à coefficients réels dont toutes les racines appartiennent au demi-plan $\Pi_b = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < b\}$, alors la fonction $x \mapsto |Q(x)|$ est strictement croissante sur $[b, +\infty[$.

Soit q un nombre **premier** tel que $q \geq 11$. On écrit q dans le système décimal :

$$q = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k, \qquad a_0, \ldots, a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\},\ a_n \neq 0,$$

et l'on considère le polynôme $P(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $z \in \mathbb{C}$.

3.1. **Question (1)** On considère les ensembles $D = \left\{ z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < \dfrac{1+\sqrt{37}}{2} \right\}$ et $\Pi_0 = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}(z) < 0\}$. Montrer que les racines du polynôme P appartiennent à la réunion $D \cup \Pi_0$, puis représenter l'image de l'ensemble $D \cup \Pi_0$ dans le plan complexe.

3.2. **Question (2)** On suppose qu'il existe deux polynômes R et Q, de degrés supérieurs ou égaux à 1 et à coefficients **entiers**, tels que $P(z) = R(z)Q(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

3.2.1. **(a)** Montrer que les racines des polynômes R et Q appartiennent à Π_4, puis en déduire les inégalités $|R(4)| < |R(10)|$ et $|Q(4)| < |Q(10)|$. *Indication : remarquer que* $D \cup \Pi_0 \subset \Pi_4$.

3.2.2. **(b)** Montrer que $|R(10)| > 1$ et $|Q(10)| > 1$, puis en déduire que le polynôme P ne peut pas s'écrire comme produit de deux polynômes de degrés supérieurs ou égaux à 1 à coefficients entiers.

Conclusion : le polynôme P est irréductible dans l'anneau $\mathbb{Z}[X]$.

Commentaire. Résultat de Brillhart, Filaseta et Odlyzko (1981) : si q est premier, le polynôme dont les coefficients sont les chiffres décimaux de q est irréductible sur $\mathbb{Z}$. Par exemple, $P(x) = x^2 + x + 3$ (pour $q = 113$) est irréductible. La preuve combine localisation des racines (analyse complexe) et arithmétique.

النسخة العربية

معيار لعدم الاختزال في $\mathbb{Z}[X]$: حدودية أرقام عدد أولي

دورة 2013 ▪ التمرين 2، الجزء 3 (النص الأصلي) ▪ 2026 © سعد شكري

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

نتائج مقبولة (مُثبتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). (a) إذا كانت $P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ حدودية درجتها $n \geq 2$ معاملاتها حقيقية، مع $a_n \geq 1$ و$a_{n-1} \geq 0$ و$|a_k| \leq M$ من أجل $0 \leq k \leq n-2$ $(M>0)$، فإن كل جذر z لـ P يحقق $\mathrm{Re}(z)<0$ أو $|z|<\frac{1+\sqrt{1+4M}}{2}$.
(b) إذا كانت Q حدودية غير ثابتة معاملاتها حقيقية وجميع جذورها تنتمي إلى نصف المستوى $\Pi_b=\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z)<b\}$، فإن الدالة $x \mapsto |Q(x)|$ تزايدية قطعا على $]b,+\infty[$.

ليكن q عددا **أوليا** بحيث $q \geq 11$. نكتب q في النظام العشري :

$$q=\sum_{k=0}^{n} a_k 10^k, \qquad a_0,\dots,a_n \in \{0,1,2,\dots,9\},\ a_n \neq 0,$$

ونعتبر الحدودية $P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$، $z\in\mathbb{C}$.

السؤال (1) نعتبر المجموعتين $D=\left\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z|<\dfrac{1+\sqrt{37}}{2}\right\}$ و$\Pi_0=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}(z)<0\}$. بين أن جذور الحدودية P تنتمي إلى الاتحاد $D\cup\Pi_0$، ثم مثل المجموعة $D\cup\Pi_0$ في المستوى العقدي.

السؤال (2) نفترض أنه توجد حدوديتان R وQ درجتاهما أكبر من أو تساويان 1 ومعاملاتهما **صحيحة** بحيث $P(z)=R(z)Q(z)$ لكل $z\in\mathbb{C}$.

(أ) بين أن جذور الحدوديتين R وQ تنتمي إلى Π_4، ثم استنتج المتفاوتتين $|R(4)|<|R(10)|$ و$|Q(4)|<|Q(10)|$.
إرشاد : لاحظ أن $D\cup\Pi_0\subset\Pi_4$.

(ب) بين أن $|R(10)|>1$ و$|Q(10)|>1$، ثم استنتج أن الحدودية P لا يمكن أن تكتب جداء لحدوديتين درجتاهما أكبر من أو تساويان 1 ومعاملاتهما صحيحة.

خلاصة : الحدودية P غير قابلة للاختزال في الحلقة $\mathbb{Z}[X]$.

تعليق. نتيجة بريلهارت وفيلاسيتا وأوديزكو (1981) : إذا كان q أوليا فإن الحدودية التي معاملاتها الأرقام العشرية للعدد q غير قابلة للاختزال على $\mathbb{Z}$. مثلا $P(x)=x^2+x+3$ (من أجل $q=113$) غير قابلة للاختزال. ويجمع البرهان بين تحديد موضع الجذور (تحليل عقدي) والحسابيات.

Problème 47 — Session 2014

L'ordre multiplicatif d'un entier et applications

Partie 2 © 2026 Saad Choukri

Notations. $a\wedge b$ désigne le pgcd de a et b, et φ l'indicatrice d'Euler : $\varphi(n)=\mathrm{Card}\{k\in\{1,\dots,n\} \mid k\wedge n=1\}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{\bar{0},\bar{1},\dots,\overline{n-1}\}$ l'anneau des classes de congruence modulo n, muni des lois $\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}$ et $\bar{a}\times\bar{b}=\overline{ab}$, et

$$\mathbb{Z}_n^*=\{\bar{a}\in\mathbb{Z}_n \mid \exists \bar{b}\in\mathbb{Z}_n,\ \bar{a}\times\bar{b}=\bar{1}\}$$

l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}_n$.

2.1. **Question (1)** Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $a\in\mathbb{Z}^*$. Montrer que $\bar{a}\in\mathbb{Z}_n^* \iff n\wedge a=1$.

2.2. **Question (2)** Soit p un nombre premier. Montrer que $\mathbb{Z}_p^*=\{\bar{1},\dots,\overline{p-1}\}$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

2.3. **Question (3)** Montrer que $(\mathbb{Z}_n^*, \times)$ est un groupe à $\varphi(n)$ éléments.

2.4. **Question (4)** Soit $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $a \wedge n = 1$. On écrit $\mathbb{Z}_n^* = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{\varphi(n)}\}$.

2.4.1. **(a)** Montrer que pour tout $j \in \{1, \ldots, \varphi(n)\}$, il existe un unique $i \in \{1, \ldots, \varphi(n)\}$ tel que $\bar{a} \times \bar{u}_j = \bar{u}_i$.

2.4.2. **(b)** En déduire que $a^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$ (théorème d'Euler).

2.5. **Question (5)** Soit p un nombre premier. Montrer que pour tout entier naturel a premier avec p, $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$ (petit théorème de Fermat).

2.6. **Question (6)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}^* : a \wedge n = 1 \iff \exists k \in \mathbb{N}^*,\ a^k \equiv 1\ [n]$.

2.7. **Question (7)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a tel que $a \wedge n = 1$. On définit l'*ordre multiplicatif* de a modulo n par

$$w_n(a) = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid a^k \equiv 1\ [n]\}$$

(le minimum d'une partie non vide de $\mathbb{N}^*$).

2.7.1. **(a)** Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^* : w_n(a) = r \iff \begin{cases} a^r \equiv 1\ [n], \\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ a^k \equiv 1\ [n] \Longrightarrow r \mid k. \end{cases}$

2.7.2. **(b)** Montrer que $w_n(a)$ divise $\varphi(n)$.

2.7.3. **(c)** Montrer que si n est premier, alors $w_n(a)$ divise $n-1$.

2.7.4. **(d)** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $w_n(a^k) = \dfrac{w_n(a)}{k \wedge w_n(a)}$.

2.8. **Question (8)** Soient a et b deux entiers naturels tels que $a \wedge n = b \wedge n = 1$ et $w_n(a) \wedge w_n(b) = 1$. Montrer que $w_n(ab) = w_n(a)\, w_n(b)$.

2.9. **Question (9)** **Première application.** Soient p et q deux nombres premiers distincts tels que q divise $3^p - 2^p$.

2.9.1. **(a)** Montrer que $q \geq 5$.

2.9.2. **(b)** Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{N}^*$ tel que $u \wedge q = 1$ et $3 \equiv 2u\ [q]$, puis en déduire que $w_q(u) \mid p$.

2.9.3. **(c)** En déduire que $p \mid (q-1)$.

2.10. **Question (10)** **Deuxième application.**

2.10.1. **(a)** Soit k un entier naturel. Déterminer tous les restes possibles de la division euclidienne de k^3 par 9.

2.10.2. **(b)** Calculer $w_9(7)$, puis montrer qu'il n'existe aucun entier naturel n tel que $7^n + n^3$ soit divisible par 9.

2.11. **Question (11)** **Troisième application.** Soit p un nombre premier différent de 2. On pose $m = \dfrac{p^p - 1}{p-1}$.

2.11.1. **(a)** Montrer que m est un entier naturel impair.

2.11.2. **(b)** Soit q un nombre premier divisant m. Montrer que $q \neq p$ et que $p \mid (q-1)$ (on pourra considérer $w_q(p)$), puis en déduire que q s'écrit $q = 2lp + 1$ avec $l \in \mathbb{N}^*$.

2.11.3. **(c)** Soit r un entier naturel impair. Montrer que $p^p - 1$ n'est pas divisible par $rp + 1$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

Commentaire. L'ordre multiplicatif $w_n(a)$ divise $\varphi(n)$ (théorème d'Euler) ; c'est l'outil de base de nombreux problèmes d'olympiades. Applications : tout diviseur premier $q \neq p$ de $3^p - 2^p$ vérifie $q \equiv 1\ [p]$; $7^n + n^3$ n'est jamais divisible par 9 ($w_9(7) = 3$ et les cubes valent 0 ou ± 1 modulo 9).

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

النسخة العربية

الرتبة الضربية لعدد صحيح وتطبيقات

دورة 2014 ▪ الجزء 2 ▪ © 2026 سعد شكري

ترميزات. $a \wedge b$ القاسم المشترك الأكبر لـ a وb، وφ دالة أولر : $\varphi(n) = \mathrm{Card}\{k \in \{1, \ldots, n\} \mid k \wedge n = 1\}$. من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ نرمز بـ $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ لحلقة أصناف التوافق بتردد n، المزودة بالقانونين $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$ و$\bar{a} \times \bar{b} = \overline{ab}$، وبـ

$$\mathbb{Z}_n^* = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}_n \mid \exists \bar{b} \in \mathbb{Z}_n,\ \bar{a} \times \bar{b} = \bar{1}\}$$

لمجموعة العناصر القابلة للقلب في $\mathbb{Z}_n$.

السؤال (1) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ و$a \in \mathbb{Z}^*$. بين أن $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n^* \iff n \wedge a = 1$.

السؤال (2) ليكن p عددا أوليا. بين أن $\mathbb{Z}_p^* = \{\bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$.

السؤال (3) بين أن $(\mathbb{Z}_n^*, \times)$ زمرة عدد عناصرها $\varphi(n)$.

السؤال (4) ليكن $a \in \mathbb{N}^*$ بحيث $a \wedge n = 1$. نكتب $\mathbb{Z}_n^* = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{\varphi(n)}\}$.

(أ) بين أنه لكل $j \in \{1, \ldots, \varphi(n)\}$ يوجد $i \in \{1, \ldots, \varphi(n)\}$ وحيد بحيث $\bar{a} \times \bar{u}_j = \bar{u}_i$.

(ب) استنتج أن $a^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$ (مبرهنة أولر).

السؤال (5) ليكن p عددا أوليا. بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي a أولي مع p : $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$ (مبرهنة فيرما الصغرى).

السؤال (6) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. بين أنه لكل $a \in \mathbb{N}^*$: $a \wedge n = 1 \iff \exists k \in \mathbb{N}^*,\ a^k \equiv 1\ [n]$.

السؤال (7) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ وa بحيث $a \wedge n = 1$. نعرف الرتبة الضربية لـ a بتردد n بـ

$$w_n(a) = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid a^k \equiv 1\ [n]\}$$

(أصغر عنصر لجزء غير فارغ من $\mathbb{N}^*$).

(أ) بين أنه لكل $r \in \mathbb{N}^*$:

$$w_n(a) = r \iff \begin{cases} a^r \equiv 1\ [n], \\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ a^k \equiv 1\ [n] \Longrightarrow r \mid k. \end{cases}$$

(ب) بين أن $w_n(a)$ يقسم $\varphi(n)$.

(ج) بين أنه إذا كان n أوليا فإن $w_n(a)$ يقسم $n - 1$.

(د) بين أنه لكل $k \in \mathbb{N}^*$: $w_n(a^k) = \dfrac{w_n(a)}{k \wedge w_n(a)}$.

السؤال (8) ليكن a وb عددين صحيحين طبيعيين بحيث $a \wedge n = b \wedge n = 1$ و$w_n(a) \wedge w_n(b) = 1$. بين أن $w_n(ab) = w_n(a)\, w_n(b)$.

السؤال (9) تطبيق أول. ليكن p وq عددين أوليين مختلفين بحيث يقسم q العدد $3^p - 2^p$.

(أ) بين أن $q \geq 5$.

(ب) بين أنه يوجد $u \in \mathbb{N}^*$ بحيث $u \wedge q = 1$ و$3 \equiv 2u\ [q]$، ثم استنتج أن $w_q(u) \mid p$.

(ج) استنتج أن $p \mid (q - 1)$.

السؤال (10) تطبيق ثان.

(أ) ليكن k عددا صحيحا طبيعيا. حدد جميع البواقي الممكنة للقسمة الأقليدية لـ k^3 على 9.

(ب) احسب $w_9(7)$، ثم بين أنه لا يوجد أي عدد صحيح طبيعي n بحيث يقبل العدد $7^n + n^3$ القسمة على 9.

السؤال (11) تطبيق ثالث. ليكن p عددا أوليا مخالفا لـ 2. نضع $m = \dfrac{p^p - 1}{p - 1}$.

(أ) بين أن m عدد صحيح طبيعي فردي.

(ب) ليكن q عددا أوليا يقسم m. بين أن $q \neq p$ وأن $p \mid (q-1)$ (يمكن اعتبار $w_q(p)$)، ثم استنتج أن q يكتب على الشكل $q = 2lp + 1$ حيث $l \in \mathbb{N}^*$.

(ج) ليكن r عددا صحيحا طبيعيا فرديا. بين أن $p^p - 1$ لا يقبل القسمة على $rp + 1$.

تعليق. الرتبة الضربية $w_n(a)$ تقسم $\varphi(n)$ (مبرهنة أولر)؛ وهي الأداة الأساسية في كثير من مسائل الأولمبياد. تطبيقات : كل قاسم أولي $q \neq p$ للعدد $3^p - 2^p$ يحقق $q \equiv 1\ [p]$؛ والعدد $7^n + n^3$ لا يقبل القسمة على 9 أبدا ($w_9(7) = 3$ والمكعبات تساوي 0 أو ± 1 بتردد 9).

Problème 48 — Session 2015

Une suite d'entiers définie par PGCD et PPCM

Exercice © 2026 Saad Choukri

On note $\mathrm{PGCD}(a, b)$ le plus grand commun diviseur et $\mathrm{PPCM}(a, b)$ le plus petit commun multiple de deux entiers naturels a et b. Soient $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ deux suites d'entiers naturels non nuls, non stationnaires, vérifiant

$$\begin{cases} p_0 \geq 2,\ q_0 \geq 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = \mathrm{PGCD}(p_n, q_n) + 1, \quad q_{n+1} = \mathrm{PPCM}(p_n, q_n) - 1. \end{cases}$$

L'objectif est de démontrer qu'il existe deux entiers naturels N et $c > 0$ tels que $\forall n \geq N,\ p_{n+c} = p_n$.

Pour cela, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = p_n + q_n$ et $\mathcal{R}_n = \{m \in \mathbb{N}^* \mid m \geq p_n \text{ et } m \nmid s_n\}$.

Partie 1 : construction d'une suite décroissante d'entiers naturels

1.1. **Question (1)** Montrer que $\mathcal{R}_n \neq \emptyset$ pour tout entier naturel n. On note alors $r_n = \min \mathcal{R}_n$.

1.2. **Question (2)** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_n \mid q_n$. Déterminer p_{n+1} et q_{n+1} en fonction de p_n et q_n, puis s_{n+1} en fonction de s_n.

On vise à démontrer que la suite $(r_k)_{k\geq 0}$ est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1.3. **Question (3)** On suppose que $p_n \mid q_n$. Montrer que $p_n \notin \mathcal{R}_n$, puis en déduire que $r_{n+1} = r_n$.

1.4. **Question (4)** On suppose que $p_n \nmid q_n$.

1.4.1. **(a)** Montrer que $r_n = p_n$.

1.4.2. **(b)** Montrer que $p_{n+1} \leq p_n$.

1.4.3. **(c)** Montrer que $p_n \in \mathcal{R}_{n+1}$, puis en déduire que $r_{n+1} \leq r_n$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

Partie 2 : étude d'une suite stationnaire

2.1. **Question (5)** Montrer que la suite $(r_k)_{k\geq 0}$ est convergente.

2.2. **Question (6)** Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $r_n = r_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$.

On pose $r = \min\{r_k \mid k \geq 0\}$ et, pour tout $n \geq 0$, $y_n = \mathrm{PGCD}(r, s_n)$.

2.3. **Question (7)** Justifier l'existence de r, puis montrer qu'il existe un entier naturel N tel que $r = r_N$.

2.4. **Question (8)** Montrer que pour tout $n \geq N$, on a $r = r_n$.

2.5. **Question (9)** On veut montrer que la suite $(y_n)_{n\geq N}$ est constante, c'est-à-dire que $y_{n+1} = y_n$ pour tout $n \geq N$. Soit $n \geq N$.

2.5.1. **(a)** On suppose que $p_n \mid q_n$; montrer que $y_{n+1} = y_n$.

2.5.2. **(b)** On suppose que $p_n \nmid q_n$; montrer que $s_{n+1} = y_n + \dfrac{p_n q_n}{y_n}$, et en déduire que $y_{n+1} = y_n$.

2.6. **Question (10)** Conclure en démontrant le résultat annoncé.

N.B. : l'original demande en 1.4.3 de montrer que $p_n \in \mathcal{R}_n$; c'est l'appartenance $p_n \in \mathcal{R}_{n+1}$ qui permet de conclure $r_{n+1} \leq p_n = r_n$. Le texte de 2.5 a été reformulé : on montre que (y_n) est constante à partir du rang N.

Commentaire. Le point remarquable est la construction d'un « invariant » : la suite d'entiers r_n décroît, donc stationne ; ensuite le pgcd $y_n = \mathrm{PGCD}(r, s_n)$ est constant et force la périodicité de (p_n). C'est la stratégie classique « monovariant puis invariant » des problèmes d'olympiades.

النسخة العربية

متتالية أعداد صحيحة معرفة بالقاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر

دورة 2015 ▪ التمرين ▪ 2026 © سعد شكري

نرمز بـ $\mathrm{PGCD}(a,b)$ للقاسم المشترك الأكبر وبـ $\mathrm{PPCM}(a,b)$ للمضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين طبيعيين a وb.
لتكن $(p_n)_{n\geq 0}$ و$(q_n)_{n\geq 0}$ متتاليتين لأعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة، غير ثابتة ابتداء من رتبة ما، تحققان

$$\begin{cases} p_0 \geq 2,\ q_0 \geq 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = \mathrm{PGCD}(p_n, q_n) + 1, \quad q_{n+1} = \mathrm{PPCM}(p_n, q_n) - 1. \end{cases}$$

الهدف هو إثبات وجود عددين صحيحين طبيعيين N و$c > 0$ بحيث $\forall n \geq N,\ p_{n+c} = p_n$.
لذلك نضع لكل $n \in \mathbb{N}$: $s_n = p_n + q_n$ و$\mathcal{R}_n = \{m \in \mathbb{N}^* \mid m \geq p_n \text{ و } m \nmid s_n\}$.

الجزء 1 : إنشاء متتالية تناقصية لأعداد صحيحة طبيعية

السؤال (1) بين أن $\mathcal{R}_n \neq \emptyset$ لكل عدد صحيح طبيعي n. نرمز إذن بـ $r_n = \min \mathcal{R}_n$.

السؤال (2) ليكن $n \in \mathbb{N}$ بحيث $p_n \mid q_n$. حدد p_{n+1} وq_{n+1} بدلالة p_n وq_n، ثم s_{n+1} بدلالة s_n.
نهدف إلى إثبات أن المتتالية $(r_k)_{k\geq 0}$ تناقصية. ليكن $n \in \mathbb{N}$.

السؤال (3) نفترض أن $p_n \mid q_n$. بين أن $p_n \notin \mathcal{R}_n$، ثم استنتج أن $r_{n+1} = r_n$.

السؤال (4) نفترض أن $p_n \nmid q_n$.

(أ) بين أن $r_n = p_n$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

(ب) بين أن $p_{n+1} \leq p_n$.

(ج) بين أن $p_n \in \mathcal{R}_{n+1}$، ثم استنتج أن $r_{n+1} \leq r_n$.

الجزء 2 : دراسة متتالية ثابتة ابتداء من رتبة ما

السؤال (5) بين أن المتتالية $(r_k)_{k\geq 0}$ متقاربة.

السؤال (6) بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي n_0 بحيث $r_n = r_{n_0}$ لكل $n \geq n_0$.
نضع $r = \min\{r_k \mid k \geq 0\}$ ولكل $n \geq 0$: $y_n = \mathrm{PGCD}(r, s_n)$.

السؤال (7) علل وجود r، ثم بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي N بحيث $r = r_N$.

السؤال (8) بين أنه لكل $n \geq N$: $r = r_n$.

السؤال (9) نريد أن نبين أن المتتالية $(y_n)_{n\geq N}$ ثابتة، أي أن $y_{n+1} = y_n$ لكل $n \geq N$. ليكن $n \geq N$.

(أ) نفترض أن $p_n \mid q_n$؛ بين أن $y_{n+1} = y_n$.

(ب) نفترض أن $p_n \nmid q_n$؛ بين أن $s_{n+1} = y_n + \dfrac{p_n q_n}{y_n}$، واستنتج أن $y_{n+1} = y_n$.

السؤال (10) استنتج النتيجة المعلنة.

ملاحظة : يطلب الأصل في 1.4.3 إثبات أن $p_n \in \mathcal{R}_n$؛ والانتماء $p_n \in \mathcal{R}_{n+1}$ هو الذي يسمح باستنتاج $r_{n+1} \leq p_n = r_n$.
وأعيدت صياغة 2.5 : نبين أن (y_n) ثابتة ابتداء من الرتبة N.

تعليق. النقطة البارزة هي إنشاء «لامتغير» : متتالية الأعداد الصحيحة r_n تناقصية فتصير ثابتة؛ ثم يكون القاسم المشترك الأكبر $y_n = \mathrm{PGCD}(r, s_n)$ ثابتا ويفرض دورية (p_n). إنها الاستراتيجية الكلاسيكية «متغير رتيب ثم لامتغير» في مسائل الأولمبياد.

Problème 49 — Session 2021

Résolution de l'équation $\cos(r\pi) = s$ en rationnels non entiers

Partie 2 © 2026 Saad Choukri

On note $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Tchebychev : $T_0 = 1$, $T_1(x) = x$, $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, et $p \wedge q$ le pgcd de deux entiers.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel θ, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$; T_n est à coefficients entiers, de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.

On cherche les rationnels non entiers r et s tels que $\cos(r\pi) = s$. On écrit $r = \frac{m}{n}$ et $s = \frac{p}{q}$ avec $(p, m) \in \mathbb{Z}^2$, $(q, n) \in \mathbb{N}^2$, $n \geq 2$, $q \geq 2$ et $p \wedge q = m \wedge n = 1$.

2.1. **Question (1)** Montrer que $T_n\left(\dfrac{p}{q}\right) = (-1)^m$.

2.2. **Question (2)** Montrer que l'entier q divise 2^{n-1}. *On remarquera que T_n est à coefficients entiers.*

2.3. **Question (3)** En déduire qu'il existe $e \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $q = 2^e$. Que peut-on alors dire de la parité de l'entier p ?

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

2.4. **Question (4)** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $e_k \in \{1, \ldots, n-1\}$ et un entier impair p_k tels que $\cos(2^k r\pi) = \dfrac{p_k}{2^{e_k}}$.

2.5. **Question (5)** Exprimer e_{k+1} en fonction de e_k pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis en déduire l'expression de e_k en fonction de e et de k.

2.6. **Question (6)** Montrer alors que $e = 1$ et $p = \pm 1$, puis donner les valeurs possibles des rationnels s et r.

Commentaire. Le résultat (théorème de Niven, 1956) : si r et $\cos(r\pi)$ sont tous deux rationnels, alors $\cos(r\pi) \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$. Ici, pour r et s non entiers, on trouve $s = \pm\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $r \equiv \pm\frac{1}{3}$ ou $\pm\frac{2}{3}$ modulo 2. La preuve exploite le fait que $2T_n(x/2)$ est unitaire à coefficients entiers.

النسخة العربية

حل المعادلة $s = \cos(r\pi)$ في الأعداد الجذرية غير الصحيحة

دورة 2021 ▪ الجزء 2 ▪ 2026 © سعد شكري

نرمز بـ $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ لمتتالية حدوديات تشيبيشيف : $T_0 = 1$، $T_1(x) = x$، $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$، وبـ $p \wedge q$ للقاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين.

نتائج مقبولة (مُثبَتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ولكل عدد حقيقي θ : $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$؛ معاملات T_n صحيحة ودرجتها n ومعاملها الرئيسي 2^{n-1}.

نبحث عن الأعداد الجذرية غير الصحيحة r وs بحيث $\cos(r\pi) = s$. نكتب $r = \frac{m}{n}$ و$s = \frac{p}{q}$ مع $(p, m) \in \mathbb{Z}^2$ و$(q, n) \in \mathbb{N}^2$ و$n \geq 2$ و$q \geq 2$ و$p \wedge q = m \wedge n = 1$.

السؤال (1) بين أن $T_n\left(\dfrac{p}{q}\right) = (-1)^m$.

السؤال (2) بين أن العدد الصحيح q يقسم 2^{n-1}. لاحظ أن معاملات الحدودية T_n صحيحة.

السؤال (3) استنتج أنه يوجد $e \in \{1, \ldots, n-1\}$ بحيث $q = 2^e$. ماذا يمكن القول عن زوجية العدد p؟

السؤال (4) بين أنه لكل $k \in \mathbb{N}$ يوجد $e_k \in \{1, \ldots, n-1\}$ وعدد صحيح فردي p_k بحيث $\cos(2^k r\pi) = \dfrac{p_k}{2^{e_k}}$.

السؤال (5) عبر عن e_{k+1} بدلالة e_k لكل $k \in \mathbb{N}$، ثم استنتج تعبير e_k بدلالة e وk.

السؤال (6) بين إذن أن $e = 1$ و$p = \pm 1$، ثم أعط القيم الممكنة للعددين الجذريين s وr.

تعليق. النتيجة (مبرهنة نيفن، 1956) : إذا كان r و$\cos(r\pi)$ جذريين معا فإن $\cos(r\pi) \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$. وهنا، من أجل r وs غير صحيحين، نجد $s = \pm\frac{1}{2}$، أي $r \equiv \pm\frac{1}{3}$ أو $\pm\frac{2}{3}$ بترديد 2. ويستغل البرهان كون $2T_n(x/2)$ واحدية ومعاملاتها صحيحة.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

Problème 50 — Session 2023

Encadrement du nombre $p(n)$ de nombres premiers inférieurs à n (estimations de Tchebychev)

Problème 2, Parties 2 et 3 © 2026 Saad Choukri

Notations. $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers ; pour $n \geq 2$, $\mathcal{P}(n)$ est l'ensemble des nombres premiers $\leq n$ et $p(n)$ son cardinal. Pour p premier, $v_p(n)$ est l'exposant de p dans n.

> **Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine).** Formule de Legendre : $v_p(n!) = \sum_{k\geq 1} \lfloor n/p^k \rfloor$; pour tous réels x, y, $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}$.

Partie 2 : une minoration de $p(n)$

2.1. **Question (1)** Soient $n \in \mathbb{N}$, j un entier compris entre 0 et n et p un nombre premier.

2.1.1. **(a)** Montrer que $v_p\left(\binom{n}{j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-j}{p^k} \right\rfloor \right)$.

2.1.2. **(b)** En déduire que $v_p\left(\binom{n}{j}\right) \leq \dfrac{\ln n}{\ln p}$ et que $p^{v_p\left(\binom{n}{j}\right)} \leq n$.

2.2. **Question (2)** **Majoration des coefficients binomiaux.** Soit $n \geq 2$ et j un entier compris entre 0 et n.

2.2.1. **(a)** Montrer que les diviseurs premiers de $\binom{n}{j}$ sont inférieurs ou égaux à n.

2.2.2. **(b)** En utilisant la décomposition de $\binom{n}{j}$ en produit de facteurs premiers, établir une majoration de $\binom{n}{j}$ en fonction de n et de $p(n)$.

2.3. **Question (3)** Soit $n \geq 2$. Montrer que $2^n \leq n \cdot n^{p(n)}$ et en déduire une minoration de $p(n)$.

Partie 3 : majoration du produit des nombres premiers $\leq n$; encadrement de $p(n)$

Soit $n \geq 2$; on note $A(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}(n)} p = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq n}} p$.

3.1. **Question (4)** À l'aide d'une minoration de $\prod_{\substack{p \in \mathcal{P}(n) \\ p \geq \sqrt{n}}} p$, montrer que $A(n) \geq \sqrt{n}^{\,p(n)-\sqrt{n}}$.

3.2. **Question (5)** **Majoration de produits de nombres premiers.** Soit $m \in \mathbb{N}^*$; on note $B(m)$ le produit de tous les nombres premiers p tels que $m+2 \leq p \leq 2m+1$.

3.2.1. **(a)** Montrer que $B(m)$ divise $\binom{2m+1}{m}$.

3.2.2. **(b)** Montrer que $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$, puis en déduire un majorant de $B(m)$.

3.2.3. **(c)** À l'aide des questions précédentes, montrer par récurrence que $A(n) \leq 4^{n-1}$.

3.3. **Question (6)** **Une majoration, puis un encadrement de $p(n)$.**

3.3.1. **(a)** Déduire des résultats précédents une majoration de $p(n)$.

3.3.2. **(b)** Donner alors un encadrement de $p(n)$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

3.3.3. **(c)** Quel meilleur encadrement de la forme $a\dfrac{n}{\ln n} \leq 3p(n) \leq b\dfrac{n}{\ln n}$, pour n assez grand, avec $a, b \in \mathbb{N}^*$, peut-on obtenir à l'aide des résultats précédents ?

N.B. : les sous-questions de 2.2 sont numérotées 2.1.1 et 2.1.2 dans l'original. En 2.3, l'inégalité $2^n \leq n \cdot n^{p(n)}$ s'obtient en regroupant les deux termes $\binom{n}{0} + \binom{n}{n} = 2 \leq n^{p(n)}$.

Commentaire. Estimations de Tchebychev (1852) : $c_1 \frac{n}{\ln n} \leq p(n) \leq c_2 \frac{n}{\ln n}$. Le théorème des nombres premiers (Hadamard et de la Vallée Poussin, 1896) précise que $p(n) \sim \frac{n}{\ln n}$, mais sa preuve demande l'analyse complexe de la fonction ζ. La majoration $\prod_{p \leq n} p \leq 4^{n-1}$ est due à Erdős et Kalmár.

النسخة العربية

تأطير عدد الأعداد الأولية $p(n)$ الأصغر من n (تقديرات تشيبيشيف)

دورة 2023 ▪ المسألة 2، الجزءان 2 و3 ▪ 2026 © سعد شكري

ترميزات. $\mathcal{P}$ مجموعة الأعداد الأولية؛ من أجل $n \geq 2$، $\mathcal{P}(n)$ مجموعة الأعداد الأولية الأصغر من أو تساوي n و$p(n)$ رئيسيها. من أجل عدد أولي p، $v_p(n)$ أس p في n.

نتائج مقبولة (مُثبَتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). صيغة لوجاندر : $v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \lfloor n/p^k \rfloor$؛ لكل عددين حقيقيين x, y : $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}$.

الجزء 2 : مصغور لـ $p(n)$

السؤال (1) ليكن $n \in \mathbb{N}$ وj عددا صحيحا محصورا بين 0 وn وp عددا أوليا.

(أ) بين أن $v_p\left(\binom{n}{j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-j}{p^k} \right\rfloor \right)$.

(ب) استنتج أن $v_p\left(\binom{n}{j}\right) \leq \dfrac{\ln n}{\ln p}$ وأن $p^{v_p\left(\binom{n}{j}\right)} \leq n$.

السؤال (2) **مكبورة المعاملات الحدانية.** ليكن $n \geq 2$ وj عددا صحيحا محصورا بين 0 وn.

(أ) بين أن القواسم الأولية لـ $\binom{n}{j}$ أصغر من أو تساوي n.

(ب) باستعمال تفكيك $\binom{n}{j}$ إلى جداء عوامل أولية، أعط مكبورا لـ $\binom{n}{j}$ بدلالة n و$p(n)$.

السؤال (3) ليكن $n \geq 2$. بين أن $2^n \leq n \cdot n^{p(n)}$ واستنتج مصغورا لـ $p(n)$.

الجزء 3 : مكبورة جداء الأعداد الأولية الأصغر من n؛ تأطير $p(n)$

ليكن $n \geq 2$؛ نضع $A(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}(n)} p = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq n}} p$.

السؤال (4) باستعمال مصغور لـ $\prod_{\substack{p \in \mathcal{P}(n) \\ p \geq \sqrt{n}}} p$، بين أن $A(n) \geq \sqrt{n}^{\,p(n) - \sqrt{n}}$.

السؤال (5) **مكبورة جداءات أعداد أولية.** ليكن $m \in \mathbb{N}^*$؛ نرمز بـ $B(m)$ لجداء جميع الأعداد الأولية p التي تحقق $m+2 \leq p \leq 2m+1$.

(أ) بين أن $B(m)$ يقسم $\binom{2m+1}{m}$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

(ب) بين أن $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$، ثم استنتج مكبورا لـ $B(m)$.

(ج) باستعمال نتائج الأسئلة السابقة، بين بالترجع أن $A(n) \leq 4^{n-1}$.

السؤال (6) مكبورة ثم تأطير لـ $p(n)$.

(أ) استنتج من النتائج السابقة مكبورا لـ $p(n)$.

(ب) أعط إذن تأطيرا لـ $p(n)$.

(ج) ما أفضل تأطير من الشكل $a\frac{n}{\ln n} \leq 3p(n) \leq b\frac{n}{\ln n}$، من أجل n كبير بما يكفي، مع $a, b \in \mathbb{N}^*$، يمكن الحصول عليه بواسطة النتائج السابقة؟

ملاحظة : رقمت الأسئلة الفرعية لـ 2.2 في الأصل بـ 2.1.1 و2.1.2. وفي 2.3 نحصل على المتفاوتة $2^n \leq n \cdot n^{p(n)}$ بجمع الحدين $\binom{n}{0} + \binom{n}{n} = 2 \leq n^{p(n)}$.

تعليق. تقديرات تشيبيشيف (1852) : $c_1\frac{n}{\ln n} \leq p(n) \leq c_2\frac{n}{\ln n}$. وتنص مبرهنة الأعداد الأولية (هادامار ودولافالي بوسان، 1896) على أن $p(n) \sim \frac{n}{\ln n}$، لكن برهانها يتطلب التحليل العقدي للدالة ζ. والمكبورة $\prod_{p\leq n} p \leq 4^{n-1}$ تعود إلى إردوس وكالمار.

Problème 51 — Session 2024

Formule d'inversion de Möbius ; nombres de Fermat

Problème 2, Partie 2 © 2026 Saad Choukri

Notations. Une fonction arithmétique est une application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$; on note $\mathscr{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$ leur ensemble. Le *produit de convolution* de deux fonctions arithmétiques f et g est la fonction $f*g$ définie par $f*g(n) = \sum_{d|n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right)$. φ désigne l'indicatrice d'Euler et $a \wedge b$ le pgcd.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). Formule de Gauss : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

Si $m = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$ est la décomposition en facteurs premiers d'un entier $m \geq 2$, on définit la *fonction de Möbius* μ par : $\mu(1) = 1$; $\mu(m) = (-1)^r$ si $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 1$ (c'est-à-dire si m est sans facteur carré) ; $\mu(m) = 0$ sinon. Par exemple $\mu(30) = (-1)^3 = -1$ puisque $30 = 2 \times 3 \times 5$, et $\mu(12) = 0$ puisque $12 = 2^2 \times 3$.

2.1. **Question (1)** Montrer que la fonction μ est multiplicative.

2.2. **Question (2)** Montrer que pour tout entier $m \geq 2$, $\sum_{d|m} \mu(d) = 0$.

2.3. **Question (3)** **Produit de convolution.** On note ν et χ les fonctions arithmétiques définies par $\nu(n) = 1$ pour tout n, et $\chi(1) = 1$, $\chi(n) = 0$ pour $n \geq 2$.

2.3.1. **(a)** Vérifier que $*$ est une loi de composition interne sur $\mathscr{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$, et montrer qu'elle est commutative et associative.

2.3.2. **(b)** Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$. Calculer $f * \chi$ et en déduire que la loi $*$ possède un élément neutre à préciser.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

2.3.3. **(c)** Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$. Montrer que f est inversible pour la loi $*$ si, et seulement si, $f(1) \neq 0$.

2.4. **Question (4) Formule d'inversion de Möbius.** Soient f et g deux fonctions arithmétiques telles que $g(m) = \sum_{d|m} f(d)$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

2.4.1. **(a)** Montrer que $\mu * \nu = \chi$. Que peut-on alors dire de ν vis-à-vis de μ ?

2.4.2. **(b)** Exprimer g en fonction de f et de ν.

2.4.3. **(c)** En déduire la formule d'inversion de Möbius :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad f(m) = \sum_{d|m} \mu\Big(\frac{m}{d}\Big)\, g(d). \tag{2}$$

2.5. **Question (5) Application à la fonction φ d'Euler.**

2.5.1. **(a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\, d = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$. *On pourra penser à la formule de Gauss.*

2.5.2. **(b)** Montrer que si $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$ est la décomposition en facteurs premiers d'un entier $n \geq 2$, alors

$$\varphi(n) = n \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right). \tag{3}$$

2.5.3. **(c)** Montrer que la fonction φ est multiplicative.

2.6. **Question (6) Une application de la fonction φ : les nombres de Fermat.** Pour tout entier naturel n, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$, appelé n-ième nombre de Fermat.

2.6.1. **(a)** Vérifier que F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4 sont des nombres premiers.

2.6.2. **(b)** Montrer que 641 divise F_5. *On pourra remarquer que* $641 = 640 + 1 = 2^7 \times 5 + 1$ *et que* $641 = 625 + 16$, *puis utiliser une congruence.*

2.6.3. **(c)** Montrer que si n et m sont deux entiers naturels distincts, alors $F_n \wedge F_m = 1$.

2.6.4. **(d)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{2^{n+1}} - 1 = F_0 \times F_1 \times \cdots \times F_n$.

2.6.5. **(e)** Déterminer tous les entiers naturels non nuls n tels que $\varphi\big(2^{2^n} - 1\big) = \varphi\big(2^{2^n}\big)$.

N.B. : dans l'original, les questions sur les nombres de Fermat sont numérotées 2.5.1 à 2.5.5 sous le titre 2.6. On trouve en 2.6.5 : $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (l'égalité équivaut à la primalité de $F_0, \ldots, F_{n-1}$).

Commentaire. La formule d'inversion de Möbius exprime f à partir de $g = f * \nu$; appliquée à la formule de Gauss, elle donne $\varphi(n) = n \prod_{p|n}(1 - \frac{1}{p})$. Fermat conjecturait que tous les $F_n = 2^{2^n} + 1$ étaient premiers ; Euler a montré en 1732 que $641 \mid F_5$. On ne connaît aucun nombre de Fermat premier au-delà de F_4.

النسخة العربية

صيغة قلب موبيوس؛ أعداد فيرما

دورة 2024 ▪ المسألة 2، الجزء 2 ▪ 2026 © سعد شكري

ترميزات. الدالة الحسابية تطبيق $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$؛ نرمز بـ $\mathscr{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$ لمجموعتها. جداء الالتفاف لدالتين حسابيتين f وg هو $f * g(n) = \sum_{d|n} f(d)\, g\big(\frac{n}{d}\big)$. φ دالة أولر و$a \wedge b$ القاسم المشترك الأكبر.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri ▪ جميع الحقوق محفوظة ▪ يُمنع النسخ أو إعادة النشر دون إذن مسبق من المؤلف

نتائج مقبولة (مُثبتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). صيغة غاوس : لكل $n \in \mathbb{N}^* : n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

إذا كان $m = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$ تفكيك عدد صحيح $m \geq 2$ إلى عوامل أولية، نعرف دالة موبيوس μ بـ : $\mu(1) = 1$؛ $\mu(m) = (-1)^r$ إذا كان $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 1$ (أي m خال من المربعات)؛ $\mu(m) = 0$ في الحالات الأخرى. مثلا $\mu(30) = (-1)^3 = -1$ لأن $30 = 2 \times 3 \times 5$، و$\mu(12) = 0$ لأن $12 = 2^2 \times 3$.

السؤال (1) بين أن الدالة μ جدائية.

السؤال (2) بين أنه لكل عدد صحيح $m \geq 2$: $\sum_{d|m} \mu(d) = 0$.

السؤال (3) دراسة جداء الالتفاف. نرمز بـ ν وχ للدالتين الحسابيتين المعرفتين بـ $\nu(n) = 1$ لكل n، و$\chi(1) = 1$ و$\chi(n) = 0$ من أجل $n \geq 2$.

(أ) تحقق من أن $*$ قانون تركيب داخلي في $\mathscr{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$ وبين أنه تبادلي وتجميعي.

(ب) لتكن $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$. احسب $f * \chi$ واستنتج أن للقانون $*$ عنصرا محايدا ينبغي تحديده.

(ج) لتكن $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$. بين أن f قابلة للقلب بالنسبة للقانون $*$ إذا وفقط إذا كان $f(1) \neq 0$.

السؤال (4) صيغة قلب موبيوس. لتكن f وg دالتين حسابيتين بحيث $g(m) = \sum_{d|m} f(d)$ لكل $m \in \mathbb{N}^*$.

(أ) بين أن $\mu * \nu = \chi$. ماذا يمكن القول عن ν بالنسبة لـ μ؟

(ب) عبر عن g بدلالة f وν.

(ج) استنتج صيغة قلب موبيوس :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad f(m) = \sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) g(d). \tag{2}$$

السؤال (5) تطبيق على دالة أولر φ.

(أ) بين أنه لكل $n \in \mathbb{N}^*$: $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$. يمكن التفكير في صيغة غاوس.

(ب) بين أنه إذا كان $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$ تفكيك عدد صحيح $n \geq 2$ إلى عوامل أولية فإن

$$\varphi(n) = n \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right). \tag{3}$$

(ج) بين أن الدالة φ جدائية.

السؤال (6) تطبيق للدالة φ : أعداد فيرما. لكل عدد صحيح طبيعي n نضع $F_n = 2^{2^n} + 1$، ويسمى عدد فيرما رقم n.

(أ) تحقق من أن F_0 وF_1 وF_2 وF_3 وF_4 أعداد أولية.

(ب) بين أن 641 يقسم F_5. يمكن ملاحظة أن $641 = 640 + 1 = 2^7 \times 5 + 1$ وأن $641 = 625 + 16$، ثم استعمال توافق.

(ج) بين أنه إذا كان n وm عددين صحيحين طبيعيين مختلفين فإن $F_n \wedge F_m = 1$.

(د) بين أنه لكل $n \in \mathbb{N}$: $2^{2^{n+1}} - 1 = F_0 \times F_1 \times \cdots \times F_n$.

(هـ) حدد جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية غير المنعدمة n التي تحقق $\varphi\left(2^{2^n} - 1\right) = \varphi\left(2^{2^n}\right)$.

ملاحظة : في الأصل رقمت الأسئلة المتعلقة بأعداد فيرما من 2.5.1 إلى 2.5.5 تحت العنوان 2.6. نجد في 2.6.5 : $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (المتساوية تكافئ أولية $(F_0, \ldots, F_{n-1})$).

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri
© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

تعليق. تعبر صيغة قلب موبيوس عن f انطلاقا من $g = f * \nu$؛ وبتطبيقها على صيغة غاوس نحصل على $\varphi(n) = n\prod_{p|n}(1-\frac{1}{p})$. كان فيرما يخمن أن جميع الأعداد $F_n = 2^{2^n}+1$ أولية؛ وبين أولر سنة 1732 أن $641 \mid F_5$. ولا يعرف أي عدد فيرما أولي بعد F_4.

Problème 52 — Session 2012

Formes quadratiques entières réduites et réduction de Gauss

Partie 3 (traduit de l'arabe) © 2026 Saad Choukri

Notations. $\mathcal{Q}^+$ désigne l'ensemble des formes quadratiques $q(x,y) = ax^2+bxy+cy^2$ à coefficients entiers et définies positives ; $d(q) = 4ac-b^2$ est leur discriminant. $\mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)$ est le groupe des applications linéaires $f : (x,y) \mapsto (\alpha x+\beta y, \gamma x+\delta y)$ à coefficients entiers et de déterminant $\alpha\delta-\beta\gamma = 1$. Pour $q, q' \in \mathcal{Q}^+$, on pose $\mathcal{L}^+(q,q') = \{f \in \mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2) \mid q' = q\circ f\}$, et l'on dit que q' est équivalente à q ($q' \sim q$) si $\mathcal{L}^+(q,q') \neq \emptyset$.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{Q}^+$; si $q' \sim q$, alors $d(q') = d(q)$; une forme q de $\mathcal{Q}^+$ vérifie $a > 0$ et $d(q) > 0$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid q(x,y) = n\}$ est fini.

Définition. On dit que $q : (x,y) \mapsto ax^2+bxy+cy^2$ de $\mathcal{Q}^+$ est une forme *réduite* si ses coefficients vérifient :

- $|b| \leq a \leq c$;
- si $|b| = a$ ou $a = c$, alors $b \geq 0$.

Exemple. Les formes $q_1(x,y) = x^2+y^2$ et $q_2(x,y) = x^2+xy+y^2$ sont réduites, alors que $q_5(x,y) = 3x^2-2xy+y^2$ ne l'est pas.

3.1. **Question (1)** Soit $q : (x,y) \mapsto ax^2+bxy+cy^2$ une forme réduite.

3.1.1. **(a)** Montrer que $a \leq \sqrt{\dfrac{d(q)}{3}}$ et que $\dfrac{\sqrt{d(q)}}{2} \leq c \leq \dfrac{d(q)}{3a}$.

3.1.2. **(b)** Étudier les cas d'égalité dans chacune des trois inégalités précédentes.

3.2. **Question (2)** Soit $q : (x,y) \mapsto ax^2+bxy+cy^2$ une forme réduite. On rappelle que $4a\,q(x,y) = (2ax+by)^2 + d(q)y^2$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

3.2.1. **(a)** Vérifier que l'ensemble $\{q(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}\}$ admet un plus petit élément, noté m. Déterminer m et tous les couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tels que $m = q(x,y)$. *Indication : on pourra distinguer les trois cas $a \neq c$; $b = 0$ et $a = c$; $a = b = c$.*

3.2.2. **(b)** Vérifier que l'ensemble $\{q(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\setminus\{0\})\}$ admet un plus petit élément, noté m_1. Déterminer m_1 et tous les couples $(x,y) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ tels que $m_1 = q(x,y)$.

3.3. **Question (3)** **Définition.** Pour $q \in \mathcal{Q}^+$, on note $C(q) = \{q' \in \mathcal{Q}^+ \mid q' \sim q\}$ la *classe d'équivalence* de q. L'objectif des questions suivantes est de montrer que toute forme $q \in \mathcal{Q}^+$ est équivalente à une forme réduite, autrement dit que toute classe $C(q)$ contient une forme réduite.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

3.3.1. **(a)** Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $q(x_0, y_0) = m$, où m est le plus petit élément de $\{q(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}\}$. Montrer que x_0 et y_0 sont premiers entre eux, puis en déduire qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $ux_0 - vy_0 = 1$.

3.3.2. **(b)** On considère l'application $f_0 \in \mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)$ de matrice $\begin{pmatrix} x_0 & v \\ y_0 & u \end{pmatrix}$. Montrer que la forme $q' = q \circ f_0$ est équivalente à q et que ses coefficients a', b', c' vérifient $a' = m$ et $a' \leq c'$.

3.3.3. **(c)** Vérifier qu'il existe un entier relatif n tel que $-m < b' + 2mn \leq m$. On considère l'application $g_n \in \mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)$ définie par $g_n(x,y) = (x + ny,\, y)$. Montrer que la forme $q'' = q' \circ g_n$ est équivalente à q, que ses coefficients a'', b'', c'' vérifient $a'' = m$, $|b''| \leq m$ et $a'' \leq c''$, et que $|b''| = m$ si, et seulement si, $b'' = m$.

3.3.4. **(d)** On garde les données de la question 3.3.3.

(i) **(i)** On suppose que $c'' \neq m$ ou que $b'' \geq 0$. Montrer que q'' est une forme réduite.

(ii) **(ii)** On suppose que $c'' = m$ et $b'' < 0$. Montrer que la forme $q''' : (x,y) \mapsto q''(y, -x)$ est réduite et appartient à la classe $C(q)$.

3.4. **Question (4)** Déduire de ce qui précède qu'il existe une forme réduite équivalente à q, et montrer que cette forme réduite est unique.

3.5. **Question (5) Applications.**

3.5.1. **(a)** Déterminer la forme réduite équivalente à la forme $q_6 : (x,y) \mapsto 11x^2 + 7xy + 4y^2$.

3.5.2. **(b)** Même question pour la forme $q_7 : (x,y) \mapsto 2x^2 + 10xy + 13y^2$.

3.6. **Question (6)** Montrer que le discriminant de toute forme quadratique entière est congru à 0 ou à 3 modulo 4, puis déterminer toutes les formes réduites dont le discriminant est inférieur ou égal à 12. *Indication : utiliser les inégalités de la question 3.1.1.*

3.7. **Question (7)** Soit $q : (x,y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2$ une forme réduite. Déterminer, suivant les valeurs de a, b, c, toutes les matrices associées aux éléments de $\mathcal{L}^+(q,q)$. *Indication : distinguer les trois cas $a \neq c$; $b = 0$ et $a = c$; $a = b = c$.*

3.8. **Question (8)** Soient $q \in \mathcal{Q}^+$ et m un entier naturel non nul ; on suppose qu'il existe deux entiers x et y tels que $m = q(x,y)$. On dit que $m = q(x,y)$ est une *représentation propre* de m par q si x et y sont premiers entre eux.

3.8.1. **(a)** Montrer que m admet une représentation propre par q si, et seulement si, q est équivalente à une forme $q' \in \mathcal{Q}^+$ définie par $q'(x,y) = mx^2 + bxy + cy^2$ avec $-m < b \leq m$.

N.B. : en 3.3.4 (i), l'original écrit « on suppose $|b''| \neq m$ » ; la seule situation où q'' n'est pas réduite est $c'' = m$ et $b'' < 0$, d'où la reformulation. Le sujet numérisé s'arrête à la question 3.8.1. Pour vérification : $q_6 \sim 4x^2 + xy + 8y^2$ et $q_7 \sim x^2 + y^2$; les formes réduites de discriminant ≤ 12 sont $x^2 + xy + y^2$, $x^2 + y^2$, $x^2 + xy + 2y^2$, $x^2 + 2y^2$, $x^2 + xy + 3y^2$, $x^2 + 3y^2$ et $2x^2 + 2xy + 2y^2$.

Commentaire. Théorème de réduction de Gauss (*Disquisitiones*, 1801) : toute forme quadratique entière définie positive est équivalente à une unique forme réduite. Comme les formes réduites de discriminant d sont en nombre fini ($a \leq \sqrt{d/3}$), le nombre de classes $h(d)$ est fini. On trouve par exemple $q_6 \sim 4x^2 + xy + 8y^2$ et $q_7 \sim x^2 + y^2$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri

النسخة العربية
الصيغ التربيعية الصحيحة المختزلة واختزال غاوس

دورة 2012 ▪ الجزء 3 (النص الأصلي) ▪ © 2026 سعد شكري

ترميزات. نرمز بـ $\mathcal{Q}^+$ لمجموعة الصيغ التربيعية $q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ ذات المعاملات الصحيحة والموجبة قطعا، وبـ $d(q)=4ac-b^2$ لمميزها. $\mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)$ زمرة التطبيقات الخطية $f:(x,y)\mapsto(\alpha x+\beta y,\gamma x+\delta y)$ ذات المعاملات الصحيحة والمحددة $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. من أجل $q,q'\in\mathcal{Q}^+$ نضع $\mathcal{L}^+(q,q')=\{f\in\mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)\mid q'=q\circ f\}$، ونقول إن q' تكافئ q ($q'\sim q$) إذا كان $\mathcal{L}^+(q,q')\neq\emptyset$.

نتائج مقبولة (مُثبتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). $\sim$ علاقة تكافؤ على $\mathcal{Q}^+$؛ إذا كان $q'\sim q$ فإن $d(q')=d(q)$؛ كل صيغة q من $\mathcal{Q}^+$ تحقق $a>0$ و$d(q)>0$؛ لكل $n\in\mathbb{N}$، المجموعة $\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2\mid q(x,y)=n\}$ منتهية.

تعريف. نقول إن الصيغة $q:(x,y)\mapsto ax^2+bxy+cy^2$ من $\mathcal{Q}^+$ مختزلة إذا حققت معاملاتها :

- $|b|\le a\le c$؛
- إذا كان $|b|=a$ أو $a=c$ فإن $b\ge 0$.

مثال. الصيغتان $q_1(x,y)=x^2+y^2$ و$q_2(x,y)=x^2+xy+y^2$ مختزلتان، بينما $q_5(x,y)=3x^2-2xy+y^2$ ليست مختزلة.

السؤال (1) لتكن $q:(x,y)\mapsto ax^2+bxy+cy^2$ صيغة مختزلة.

(أ) بين أن $a\le\sqrt{\dfrac{d(q)}{3}}$ وأن $\dfrac{\sqrt{d(q)}}{2}\le c\le\dfrac{d(q)}{3a}$.

(ب) ادرس حالات التساوي في كل من المتفاوتات الثلاث السابقة.

السؤال (2) لتكن $q:(x,y)\mapsto ax^2+bxy+cy^2$ صيغة مختزلة. نذكر أن $4a\,q(x,y)=(2ax+by)^2+d(q)y^2$ لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

(أ) تحقق من أن المجموعة $\{q(x,y)\mid(x,y)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}\}$ تقبل أصغر عنصر، نرمز له بـ m. حدد m وجميع الأزواج $(x,y)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}$ بحيث $m=q(x,y)$. إرشاد : يمكن التمييز بين الحالات الثلاث $a=c$؛ $b=0$؛ $a\neq c$ و$a=b=c$.

(ب) تحقق من أن المجموعة $\{q(x,y)\mid(x,y)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})\}$ تقبل أصغر عنصر، نرمز له بـ m_1. حدد m_1 وجميع الأزواج $(x,y)\in\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ بحيث $m_1=q(x,y)$.

السؤال (3) تعريف. من أجل $q\in\mathcal{Q}^+$ نرمز بـ $C(q)=\{q'\in\mathcal{Q}^+\mid q'\sim q\}$ لـ صنف تكافؤ q. الهدف من الأسئلة الموالية إثبات أن كل صيغة $q\in\mathcal{Q}^+$ تكافئ صيغة مختزلة، أي أن كل صنف $C(q)$ يحتوي على صيغة مختزلة.

(أ) ليكن $(x_0,y_0)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}$ بحيث $q(x_0,y_0)=m$، حيث m أصغر عنصر في $\{q(x,y)\mid(x,y)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}\}$. بين أن x_0 وy_0 أوليان فيما بينهما، ثم استنتج أنه يوجد عددان صحيحان نسبيان u وv بحيث $ux_0-vy_0=1$.

(ب) نعتبر التطبيق $f_0\in\mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)$ الذي مصفوفته $\begin{pmatrix}x_0 & v\\ y_0 & u\end{pmatrix}$. بين أن الصيغة $q'=q\circ f_0$ تكافئ q وأن معاملاتها a',b',c' تحقق $a'=m$ و$a'\le c'$.

(ج) تحقق من أنه يوجد عدد صحيح نسبي n بحيث $-m<b'+2mn\le m$. نعتبر التطبيق $g_n\in\mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)$ المعرف بـ $g_n(x,y)=(x+ny,y)$. بين أن الصيغة $q''=q'\circ g_n$ تكافئ q، وأن معاملاتها a'',b'',c'' تحقق $a''=m$ و$|b''|\le m$، وأن $|b''|=m$ إذا وفقط إذا كان $a''\le c''$.

(د) نحتفظ بمعطيات السؤال 3.3.3.

(i) نفترض أن $c''\neq m$ أو أن $b''\ge 0$. بين أن q'' صيغة مختزلة.

(ii) نفترض أن $c''=m$ و$b''<0$. بين أن الصيغة $q'''(x,y)\mapsto q''(y,-x)$ مختزلة وتنتمي إلى الصنف $C(q)$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

السؤال (4) استنتج مما سبق أنه توجد صيغة مختزلة تكافئ q، وبين أن هذه الصيغة المختزلة وحيدة.

السؤال (5) تطبيقات.

(أ) حدد الصيغة المختزلة المكافئة للصيغة $q_6 : (x,y) \mapsto 11x^2 + 7xy + 4y^2$.

(ب) نفس السؤال بالنسبة للصيغة $q_7 : (x,y) \mapsto 2x^2 + 10xy + 13y^2$.

السؤال (6) بين أن مميز كل صيغة تربيعية صحيحة يوافق 0 أو 3 بتردد 4، ثم حدد جميع الصيغ المختزلة التي مميزها أصغر من أو يساوي 12. إرشاد : استعمل متفاوتات السؤال 3.1.1.

السؤال (7) لتكن $q : (x,y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2$ صيغة مختزلة. حدد، حسب قيم a, b, c، جميع المصفوفات المرتبطة بعناصر $\mathcal{L}^+(q,q)$. إرشاد : ميز بين الحالات الثلاث $a \neq c$؛ $b = 0$ و$a = c$؛ $a = b = c$.

السؤال (8) لتكن $q \in \mathcal{Q}^+$ وm عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم؛ نفترض أنه يوجد عددان صحيحان x وy بحيث $m = q(x,y)$. نقول إن $m = q(x,y)$ تمثيل أصلي لـ m بواسطة q إذا كان x وy أوليين فيما بينهما.

(أ) بين أن لـ m تمثيلا أصليا بواسطة q إذا وفقط إذا كانت q تكافئ صيغة $q' \in \mathcal{Q}^+$ معرفة بـ $q'(x,y) = mx^2 + bxy + cy^2$ مع $-m < b \leq m$.

ملاحظة : في 3.3.4 (i) يكتب الأصل « نفترض $|b''| \neq m$ »؛ والحالة الوحيدة التي لا تكون فيها q'' مختزلة هي $c'' = m$ و$b'' < 0$، ومن هنا إعادة الصياغة. ويتوقف النص الممسوح عند السؤال 3.8.1. للتحقق : $q_6 \sim 4x^2 + xy + 8y^2$ و$q_7 \sim x^2 + y^2$؛ والصيغ المختزلة ذات المميز ≤ 12 هي $x^2 + xy + y^2$ و$x^2 + y^2$ و$x^2 + xy + 2y^2$ و$x^2 + 2y^2$ و$x^2 + xy + 3y^2$ و$x^2 + 3y^2$ و$2x^2 + 2xy + 2y^2$.

تعليق. مبرهنة الاختزال لغاوس (Disquisitiones، 1801) : كل صيغة تربيعية صحيحة موجبة قطعا تكافئ صيغة مختزلة وحيدة. وبما أن عدد الصيغ المختزلة ذات المميز d منته ($a \leq \sqrt{d/3}$)، فإن عدد الأصناف $h(d)$ منته. نجد مثلا $q_6 \sim 4x^2 + xy + 8y^2$ و$q_7 \sim x^2 + y^2$.

Problème 53 — Session 2014

Les nombres de Carmichael

Partie 4 © 2026 Saad Choukri

Notations. $a \wedge b$ désigne le pgcd de a et b. Pour a premier avec n, $w_n(a) = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid a^k \equiv 1\ [n]\}$ est l'ordre multiplicatif de a modulo n.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). Si $a^k \equiv 1\ [n]$, alors $w_n(a) \mid k$. Pour tout nombre premier impair p et tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$, il existe $y \in \mathbb{N}^*$, premier avec p, tel que $w_{p^\alpha}(y) = p^{\alpha-1}(p-1)$. Petit théorème de Fermat.

Définition. On appelle *nombre de Carmichael* tout entier naturel $n \geq 2$ vérifiant :

- n n'est pas premier ;
- pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $k \wedge n = 1$, on a $k^{n-1} \equiv 1\ [n]$.

4.1. **Question (1)** Soient $p_1, \ldots, p_s$ des nombres premiers impairs distincts, avec $s \geq 3$. On pose $n = p_1 \cdots p_s$ et on suppose que pour tout $j \in \{1, \ldots, s\}$, $(p_j - 1) \mid (n-1)$. Montrer que n est un nombre de Carmichael.

4.2. **Question (2)** Montrer que 561 est un nombre de Carmichael.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

Soit n un nombre de Carmichael, de décomposition en facteurs premiers $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, où $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers deux à deux distincts.

4.3. **Question (3)** Montrer que les nombres $p_1, \ldots, p_r$ sont impairs.

4.4. **Question (4)** Soient $i \in \{1, \ldots, r\}$ et $a_i \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tels que $a_i \wedge p_i = 1$ et $w_{p_i^{\alpha_i}}(a_i) = p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1)$.

4.4.1. **(a)** Justifier l'existence de a_i, et montrer qu'il existe $t \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tel que

$$t \equiv a_i \ [p_i^{\alpha_i}] \qquad \text{et} \qquad t \equiv 1 \ [p_j^{\alpha_j}] \text{ pour tout } j \neq i.$$

4.4.2. **(b)** Montrer que $t^{n-1} \equiv 1 \ [n]$, puis en déduire que $p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1) \mid (n - 1)$.

4.4.3. **(c)** Montrer que $\alpha_i = 1$ et que $(p_i - 1) \mid (n - 1)$.

4.4.4. **(d)** Montrer que $r \geq 3$.

4.5. **Question (5)** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $85x - 16y = 1$, puis trouver le plus petit nombre de Carmichael divisible par 5 et par 17.

N.B. : l'original saute le numéro 4.3 (les questions 4.4 à 4.6 sont ici renumérotées 4.3 à 4.5) et inverse l'ordre logique de 4.4.2 : c'est la congruence $t^{n-1} \equiv 1 \ [n]$ (vraie car $t \wedge n = 1$ et n est de Carmichael) qui entraîne la divisibilité. La réponse attendue en 4.5 est $1105 = 5 \times 13 \times 17$.

Commentaire. Critère de Korselt (1899) : n composé est de Carmichael si et seulement s'il est sans facteur carré et si $p - 1 \mid n - 1$ pour tout premier $p \mid n$; un tel n a au moins trois facteurs premiers. Le plus petit est $561 = 3 \times 11 \times 17$, et le plus petit divisible par 5 et 17 est $1105 = 5 \times 13 \times 17$. Alford, Granville et Pomerance ont prouvé en 1994 qu'il en existe une infinité.

النسخة العربية

أعداد كارمايكل

دورة 2014 ▪ الجزء 4 ▪ © 2026 سعد شكري

ترميزات. $a \wedge b$ القاسم المشترك الأكبر لـ a وb. من أجل a أولي مع n، $w_n(a) = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid a^k \equiv 1 \ [n]\}$ هي الرتبة الضربية لـ a بتردد n.

نتائج مقبولة (مُثبتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). إذا كان $a^k \equiv 1 \ [n]$ فإن $w_n(a) \mid k$. لكل عدد أولي فردي p ولكل $\alpha \in \mathbb{N}^*$ يوجد $y \in \mathbb{N}^*$ أولي مع p بحيث $w_{p^\alpha}(y) = p^{\alpha-1}(p-1)$. مبرهنة فيرما الصغرى.

تعريف. نسمي عدد كارمايكل كل عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$ يحقق :

- n ليس أوليا؛
- لكل $k \in \mathbb{Z}^*$ بحيث $k \wedge n = 1$ لدينا $k^{n-1} \equiv 1 \ [n]$.

السؤال (1) لتكن $p_1, \ldots, p_s$ أعدادا أولية فردية مختلفة مع $s \geq 3$. نضع $n = p_1 \cdots p_s$ ونفترض أنه لكل $j \in \{1, \ldots, s\} : (p_j - 1) \mid (n - 1)$. بين أن n عدد كارمايكل.

السؤال (2) بين أن 561 عدد كارمايكل.

ليكن n عدد كارمايكل تفكيكه إلى عوامل أولية $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ حيث $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$ و$p_1, \ldots, p_r$ أعداد أولية مختلفة مثنى مثنى.

السؤال (3) بين أن الأعداد $p_1, \ldots, p_r$ فردية.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

السؤال (4) ليكن $i \in \{1, \dots, r\}$ و$a_i \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ بحيث $a_i \wedge p_i = 1$ و$w_{p_i^{\alpha_i}}(a_i) = p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1)$.

(أ) علل وجود a_i، وبين أنه يوجد $t \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ بحيث

$$t \equiv a_i \left[p_i^{\alpha_i}\right] \quad \text{و} \quad t \equiv 1 \left[p_j^{\alpha_j}\right] \text{ لكل } j \neq i.$$

(ب) بين أن $t^{n-1} \equiv 1\,[n]$، ثم استنتج أن $p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1) \mid (n-1)$.

(ج) بين أن $\alpha_i = 1$ وأن $(p_i - 1) \mid (n-1)$.

(د) بين أن $r \geq 3$.

السؤال (5) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $85x - 16y = 1$، ثم أوجد أصغر عدد كارمايكل يقبل القسمة على 5 وعلى 17.

ملاحظة : يقفز الأصل على الرقم 4.3 (رقمت هنا الأسئلة من 4.4 إلى 4.6 بـ 4.3 إلى 4.5) ويعكس الترتيب المنطقي لـ 4.4.2 : التوافق $t^{n-1} \equiv 1\,[n]$ (الصحيح لأن $t \wedge n = 1$ وn عدد كارمايكل) هو الذي يستلزم قابلية القسمة. والجواب المنتظر في 4.5 هو $1105 = 5 \times 13 \times 17$.

تعليق. معيار كورسلت (1899) : يكون العدد المؤلف n عدد كارمايكل إذا وفقط إذا كان خاليا من المربعات و$p - 1 \mid n - 1$ لكل عدد أولي $p \mid n$؛ ولمثل هذا العدد ثلاثة عوامل أولية على الأقل. أصغرها $561 = 3 \times 11 \times 17$، وأصغر عدد منها يقبل القسمة على 5 و17 هو $1105 = 5 \times 13 \times 17$. وأثبت ألفورد وغرانفيل وبوميرانس سنة 1994 أن عددها لا منته.

Problème 54 — Session 2023

Le postulat de Bertrand : la preuve d'Erdős

Problème 2, Partie 4 © 2026 Saad Choukri

Notations. $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers, $v_p(n)$ l'exposant du nombre premier p dans l'entier n.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). Pour tout nombre premier p et $0 \leq j \leq n$: $v_p\binom{n}{j} = \sum_{k \geq 1} \left(\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor - \lfloor \frac{j}{p^k} \rfloor - \lfloor \frac{n-j}{p^k} \rfloor\right)$, chaque terme valant 0 ou 1, et $p^{v_p\binom{n}{j}} \leq n$. Pour tout réel $x \geq 2$, le produit des nombres premiers $\leq x$ est majoré par 4^{x-1}.

Le but est de démontrer le *postulat de Bertrand* : pour tout entier naturel non nul m, il existe un nombre premier dans l'ensemble $\{m+1, m+2, \dots, 2m\}$. Ce postulat a été démontré en 1851 par Tchebychev ; la preuve proposée ici est due à Erdős. Le postulat étant trivialement vérifié pour $m \in \{1,2\}$, on considère un entier naturel $n \geq 3$.

4.1. **Question (1) Majoration de coefficients binomiaux.**

4.1.1. **(a)** Montrer que pour tout entier naturel $k < n$, $\binom{2n}{k} < \binom{2n}{k+1}$.

4.1.2. **(b)** En déduire que $\dfrac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n}$.

4.2. **Question (2) Majoration d'un coefficient binomial.**

4.2.1. **(a)** Justifier que pour tout nombre premier p, $p^{v_p\binom{2n}{n}} \leq 2n$.

4.2.2. **(b)** Montrer que pour tout nombre premier $p > \sqrt{2n}$, $v_p\binom{2n}{n} \leq 1$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

4.2.3. **(c)** Montrer que pour tout nombre premier p tel que $\frac{2}{3}n < p \leq n$, on a $p \geq 3$ et $v_p\binom{2n}{n} = 0$.

4.2.4. **(d)** En déduire que

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}} \left(\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ \sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n}} p \right) \left(\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ n < p \leq 2n}} p \right).$$

Dans la suite, on cherche à établir le postulat de Bertrand pour l'entier n. Raisonnant par l'absurde, on suppose que l'ensemble $\{n+1, \ldots, 2n\}$ ne contient aucun nombre premier.

4.3. **Question (3)** Montrer que $\dfrac{4^n}{2n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}}\, 4^{\frac{2}{3}n}$.

4.4. **Question (4)** **Une inégalité utile.**

4.4.1. **(a)** Justifier que pour tout entier $m \geq 2$, $2^m > m+1$.

4.4.2. **(b)** Montrer que $2n \leq 2^{6\sqrt[6]{2n}}$.

4.5. **Question (5)** Sous l'hypothèse faite ci-dessus, montrer que si $n \geq 50$, alors $2^{2n} < 2^{20(2n)^{2/3}}$, puis en déduire que $n < 4000$.

4.6. **Question (6)** En considérant les nombres $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 13$, $p_6 = 23$, $p_7 = 43$, $p_8 = 83$, $p_9 = 163$, $p_{10} = 317$, $p_{11} = 631$, $p_{12} = 1259$, $p_{13} = 2503$ et $p_{14} = 4001$, dont on admet qu'ils sont tous premiers, et qui vérifient $p_{k+1} < 2p_k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, 13\}$, démontrer que le postulat de Bertrand est vrai pour $n \leq 4000$.

4.7. **Question (7)** Conclure.

N.B. : les numéros 4.2.1 et 4.2.2 de l'original, placés sous 4.4, ont été renumérotés 4.4.1 et 4.4.2. Les inégalités $p_{k+1} < 2p_k$ et la primalité des p_k ont été vérifiées.

Commentaire. Postulat de Bertrand (conjecturé en 1845, prouvé par Tchebychev en 1852) : pour tout $m \geq 1$, il existe un nombre premier entre $m+1$ et $2m$. La preuve d'Erdős (1932), sa toute première publication à 19 ans, majore $\binom{2n}{n}$ en l'absence de premier dans $]n, 2n]$ et obtient une contradiction pour $n \geq 4000$; les cas restants sont réglés par la chaîne de premiers $2, 3, 5, 7, 13, 23, \ldots, 4001$.

النسخة العربية

مسلمة برتران : برهان إردوس

دورة 2023 ▪ المسألة 2، الجزء 4 ▪ © 2026 سعد شكري

ترميزات. $\mathcal{P}$ مجموعة الأعداد الأولية، و$v_p(n)$ أس العدد الأولي p في العدد الصحيح n.

نتائج مقبولة (مُثبتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). لكل عدد أولي p ولكل $0 \leq j \leq n$: $v_p\binom{n}{j} = \sum_{k \geq 1} \left(\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor - \lfloor \frac{j}{p^k} \rfloor - \lfloor \frac{n-j}{p^k} \rfloor \right)$، حيث كل حد يساوي 0 أو 1، و$p^{v_p\binom{n}{j}} \leq n$. لكل عدد حقيقي $x \geq 2$، جداء الأعداد الأولية الأصغر من أو تساوي x مكبور بـ 4^{x-1}.

الهدف هو إثبات مسلمة برتران : لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم m يوجد عدد أولي في المجموعة $\{m+1, m+2, \ldots, 2m\}$. أثبت تشيبيشيف هذه المسلمة سنة 1851، والبرهان المقترح هنا لإردوس. وبما أن المسلمة صحيحة بديهيا من أجل $m \in \{1, 2\}$، نعتبر عددا صحيحا طبيعيا $n \geq 3$.

السؤال (1) مكبورة معاملات حدانية.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

(أ) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي $k < n$: $\binom{2n}{k} < \binom{2n}{k+1}$.

(ب) استنتج أن $\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n}$.

السؤال (2) مكبورة معامل حداني.

(أ) علل أنه لكل عدد أولي p : $p^{v_p\binom{2n}{n}} \leq 2n$.

(ب) بين أنه لكل عدد أولي $p > \sqrt{2n}$: $v_p\binom{2n}{n} \leq 1$.

(ج) بين أنه لكل عدد أولي p يحقق $\frac{2}{3}n < p \leq n$ لدينا $p \geq 3$ و $v_p\binom{2n}{n} = 0$.

(د) استنتج أن

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}} \left(\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ \sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n}} p \right) \left(\prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ n < p \leq 2n}} p \right).$$

فيما يلي نسعى لإثبات مسلمة برتران من أجل العدد n. باستعمال البرهان بالخلف، نفترض أن المجموعة $\{n+1, \ldots, 2n\}$ لا تحتوي على أي عدد أولي.

السؤال (3) بين أن $\frac{4^n}{2n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}}\, 4^{\frac{2}{3}n}$.

السؤال (4) متفاوتة مفيدة.

(أ) علل أنه لكل عدد صحيح $m \geq 2$: $2^m > m + 1$.

(ب) بين أن $2n \leq 2^{6\sqrt[6]{2n}}$.

السؤال (5) تحت الافتراض السابق، بين أنه إذا كان $n \geq 50$ فإن $2^{2n} < 2^{20(2n)^{2/3}}$، ثم استنتج أن $n < 4000$.

السؤال (6) باعتبار الأعداد $p_1 = 2$، $p_2 = 3$، $p_3 = 5$، $p_4 = 7$، $p_5 = 13$، $p_6 = 23$، $p_7 = 43$، $p_8 = 83$، $p_9 = 163$، $p_{10} = 317$، $p_{11} = 631$، $p_{12} = 1259$، $p_{13} = 2503$ و$p_{14} = 4001$، التي نقبل أنها كلها أولية وتحقق $p_{k+1} < 2p_k$ لكل $k \in \{1, \ldots, 13\}$، برهن أن مسلمة برتران صحيحة من أجل $n \leq 4000$.

السؤال (7) استنتج.

ملاحظة : أعيد ترقيم السؤالين 4.2.1 و4.2.2 من الأصل، الواردين تحت 4.4، بـ 4.4.1 و4.4.2. وتم التحقق من المتفاوتات $p_{k+1} < 2p_k$ ومن أولية الأعداد p_k.

تعليق. مسلمة برتران (خمنت سنة 1845 وبرهنها تشيبيشيف سنة 1852) : لكل $m \geq 1$ يوجد عدد أولي بين $m+1$ و$2m$. برهان إردوس (1932)، وهو أول منشور له في سن التاسعة عشرة، يكبر $\binom{2n}{n}$ في غياب عدد أولي في $]n, 2n[$ ويحصل على تناقض من أجل $n \geq 4000$؛ وتعالج الحالات المتبقية بسلسلة الأعداد الأولية $2, 3, 5, 7, 13, 23, \ldots, 4001$.

Problème 55 — Session 2017

Transcendance du nombre e (méthode d'Hermite)

Parties 3 et 4 © 2026 Saad Choukri

Notations. $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des polynômes réels. Pour tout $P \in \mathcal{P}$ de degré $n \geq 0$, on pose $Q_P = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} = P + P' + \cdots + P^{(n)}$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). Formule de Taylor pour les polynômes ; formule de Leibniz $(fg)^{(k)} = \sum_j \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)}$; si x_0 est racine d'ordre r de P, alors $P^{(k)}(x_0) = 0$ pour $k < r$; pour tout réel λ, $\lambda^n/n! \to 0$.

Partie 3 : quelques résultats sur les polynômes

3.1. **Question (1)** Vérifier que pour tout polynôme P, $Q_P - Q'_P = P$.

3.2. **Question (2)** On veut montrer que pour tout polynôme P de degré $n \geq 0$,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad a \int_0^1 e^{a(1-t)} P(at)\,\mathrm{d}t = e^a Q_P(0) - Q_P(a). \tag{4}$$

3.2.1. **(a)** Vérifier que l'identité (4) est vraie pour tout polynôme P de degré 0.

3.2.2. **(b)** En déduire, par récurrence sur n, que l'identité (4) est vraie pour tout polynôme P de degré n.

3.3. **Question (3)** Soit $V(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients entiers. Soit $p \geq 2$ un entier ; on considère le polynôme $F(x) = \dfrac{1}{(p-1)!} x^{p-1} V(x)$.

3.3.1. **(a)** Déterminer le degré de F.

3.3.2. **(b)** Soit m le degré de F et $a_0, \ldots, a_m$ ses coefficients : $F(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$. Exprimer $a_0, \ldots, a_m$ en fonction des entiers $b_0, \ldots, b_n$.

3.3.3. **(c)** Montrer que $Q_F(0)$ est un entier. *Indication : on pourra utiliser la formule de Taylor.*

3.3.4. **(d)** Montrer que l'entier $Q_F(0) - V(0)$ est divisible par p.

3.4. **Question (4)** Soit W un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients entiers et $p \geq 2$ un entier. On pose $P(x) = \dfrac{1}{(p-1)!} x^{p-1} \big(W(x)\big)^p$.

3.4.1. **(a)** Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, (n+1)p - 1\}$ et tout réel x,

$$P^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{\min(k,p-1)} \binom{k}{j} \frac{1}{(p-j-1)!} x^{p-j-1} \big(W^p\big)^{(k-j)}(x).$$

3.4.2. **(b)** En déduire que $P^{(p-1)}(0) = \big(W(0)\big)^p$.

3.4.3. **(c)** Montrer que pour tout $r \geq p$, les coefficients de $P^{(r)}$ sont des entiers divisibles par p.

Partie 4 : transcendance du nombre e

Définitions. Un réel α est dit *algébrique* s'il existe un polynôme non nul à coefficients entiers dont α est racine. Un réel qui n'est pas algébrique est dit *transcendant*.

4.1. **Question (5)** Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est un nombre algébrique.

Le but des questions suivantes est de démontrer, par l'absurde, que e est transcendant. On suppose donc qu'il existe un entier $n \geq 1$ et des entiers relatifs $a_0, \ldots, a_n$, avec $a_0 a_n \neq 0$, tels que $a_0 + a_1 e + \cdots + a_n e^n = 0$. On fixe un nombre premier p et on définit

$$P(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (x-1)^p \cdots (x-n)^p, \qquad R_P(\alpha) = \alpha \int_0^1 e^{\alpha(1-t)} P(\alpha t)\,\mathrm{d}t \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

4.2. **Question (6)** Vérifier que $\sum_{j=0}^{n} a_j e^j Q_P(0) = 0$, puis montrer que $\sum_{j=0}^{n} a_j \big(Q_P(j)+R_P(j)\big) = 0$. *Indication : utiliser la formule (4).*

4.3. **Question (7)** Montrer que pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, $|R_P(j)| \leq \dfrac{(n!\,n)^p e^n}{(p-1)!}$.

4.4. **Question (8)** On pose $M = \max_{1\leq j\leq n} |a_j|$.

4.4.1. **(a)** Montrer que $\Big|\sum_{j=0}^{n} a_j R_P(j)\Big| = \Big|\sum_{j=1}^{n} a_j R_P(j)\Big| \leq M n^2\, n!\, e^n \dfrac{(n!\,n)^{p-1}}{(p-1)!}$.

4.4.2. **(b)** Montrer qu'on peut choisir le nombre premier p de sorte que $\Big|\sum_{j=1}^{n} a_j R_P(j)\Big| < 1$.

4.5. **Question (9)** Montrer que $Q_P(1),\dots,Q_P(n)$ sont des entiers divisibles par p.

4.6. **Question (10)** Montrer que $Q_P(0) - (-1)^{np}(n!)^p$ est un entier divisible par p.

4.7. **Question (11)** Montrer que si $p > \max(n, |a_0|)$, alors $a_0 Q_P(0)$ n'est pas divisible par p, puis en déduire que

$$\sum_{j=0}^{n} a_j Q_P(j) = a_0 Q_P(0) + \sum_{j=1}^{n} a_j Q_P(j) \neq 0.$$

4.8. **Question (12)** En choisissant convenablement le nombre premier p, obtenir une contradiction et conclure que le nombre e est transcendant.

N.B. : corrections : la question 3.1 de l'original répète la définition de Q_P ; on demande ici la relation $Q_P - Q'_P = P$ qui sert en 3.2. En 4.1 (définition de P), l'original écrit x^p au lieu de x^{p-1} ; c'est avec x^{p-1} que l'on obtient $P^{(p-1)}(0) = (-1)^{np}(n!)^p$ utilisé en 4.6. La majoration de 4.3 repose sur $\prod_{k=1}^{n} |s-k| \leq n!$ pour $s \in [0,n]$.

Commentaire. Le théorème d'Hermite (1873) : e est transcendant. La méthode a été étendue par Lindemann (1882) pour prouver la transcendance de π, ce qui résout le problème de la quadrature du cercle. Par Lindemann–Weierstrass, e^a est transcendant pour tout algébrique $a \neq 0$.

النسخة العربية

تسام العدد e (طريقة هيرميت)

دورة 2017 ▪ الجزءان 3 و4 ▪ 2026 © سعد شكري

ترميزات. نرمز بـ $\mathcal{P}$ لمجموعة الحدوديات الحقيقية. لكل $P \in \mathcal{P}$ درجتها $n \geq 0$ نضع $Q_P = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} = P + P' + \cdots + P^{(n)}$.

نتائج مقبولة (مُثبَتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). صيغة تايلور للحدوديات؛ صيغة لايبنيز $(fg)^{(k)} = \sum_j \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)}$؛ إذا كان x_0 جذرا من الرتبة r لـ P فإن $P^{(k)}(x_0) = 0$ من أجل $k < r$؛ لكل عدد حقيقي λ : $\lambda^n/n! \to 0$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

الجزء 3 : بعض النتائج حول الحدوديات

السؤال (1) تحقق من أنه لكل حدودية P : $Q_P - Q'_P = P$.

السؤال (2) نريد أن نبين أنه لكل حدودية P درجتها $n \geq 0$:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad a\int_0^1 e^{a(1-t)}P(at)\,\mathrm{d}t = e^a Q_P(0) - Q_P(a). \tag{4}$$

(أ) تحقق من أن المتساوية (4) صحيحة لكل حدودية P درجتها 0.

(ب) استنتج، بالترجع على n، أن المتساوية (4) صحيحة لكل حدودية P درجتها n.

السؤال (3) لتكن $V(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ حدودية درجتها $n \geq 1$ ومعاملاتها صحيحة. ليكن $p \geq 2$ عددا صحيحا؛ نعتبر الحدودية $F(x) = \dfrac{1}{(p-1)!}x^{p-1}V(x)$.

(أ) حدد درجة F.

(ب) لتكن m درجة F و$a_0, \ldots, a_m$ معاملاتها : $F(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$. عبر عن $a_0, \ldots, a_m$ بدلالة الأعداد الصحيحة $b_0, \ldots, b_n$.

(ج) بين أن $Q_F(0)$ عدد صحيح. إرشاد : يمكن استعمال صيغة تايلور.

(د) بين أن العدد الصحيح $Q_F(0) - V(0)$ يقبل القسمة على p.

السؤال (4) لتكن W حدودية درجتها $n \geq 1$ ومعاملاتها صحيحة و$p \geq 2$ عددا صحيحا. نضع $P(x) = \dfrac{1}{(p-1)!}x^{p-1}\big(W(x)\big)^p$.

(أ) بين أنه لكل $k \in \{1, \ldots, (n+1)p-1\}$ ولكل عدد حقيقي x :

$$P^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{\min(k,p-1)} \binom{k}{j} \frac{1}{(p-j-1)!}x^{p-j-1}\big(W^p\big)^{(k-j)}(x).$$

(ب) استنتج أن $P^{(p-1)}(0) = \big(W(0)\big)^p$.

(ج) بين أنه لكل $r \geq p$، معاملات $P^{(r)}$ أعداد صحيحة تقبل القسمة على p.

الجزء 4 : تسامي العدد e

تعاريف. نقول إن عددا حقيقيا α جبري إذا وجدت حدودية غير منعدمة معاملاتها صحيحة يكون α جذرا لها. ونقول عن عدد حقيقي غير جبري إنه متسام.

السؤال (5) بين أن $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ عدد جبري.

الهدف من الأسئلة الموالية إثبات، بالخلف، أن e متسام. نفترض إذن أنه يوجد عدد صحيح $n \geq 1$ وأعداد صحيحة نسبية $a_0, \ldots, a_n$ مع $a_0a_n \neq 0$ بحيث $a_0 + a_1e + \cdots + a_ne^n = 0$. نثبت عددا أوليا p ونعرف

$$P(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(x-1)^p \cdots (x-n)^p, \qquad R_P(\alpha) = \alpha\int_0^1 e^{\alpha(1-t)}P(\alpha t)\,\mathrm{d}t \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

السؤال (6) تحقق من أن $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_je^jQ_P(0) = 0$، ثم بين أن $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j\big(Q_P(j) + R_P(j)\big) = 0$. إرشاد : استعمل الصيغة (4).

السؤال (7) بين أنه لكل $j \in \{1, \ldots, n\}$: $|R_P(j)| \leq \dfrac{(n!\,n)^pe^n}{(p-1)!}$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

السؤال (8) نضع $M = \max_{1\le j\le n} |a_j|$.

(أ) بين أن $\left|\sum_{j=0}^{n} a_j R_P(j)\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_j R_P(j)\right| \le M n^2\, n!\, e^n \dfrac{(n!\, n)^{p-1}}{(p-1)!}$.

(ب) بين أنه يمكن اختيار العدد الأولي p بحيث $\left|\sum_{j=1}^{n} a_j R_P(j)\right| < 1$.

السؤال (9) بين أن $Q_P(1), \dots, Q_P(n)$ أعداد صحيحة تقبل القسمة على p.

السؤال (10) بين أن $Q_P(0) - (-1)^{np}(n!)^p$ عدد صحيح يقبل القسمة على p.

السؤال (11) بين أنه إذا كان $p > \max(n, |a_0|)$ فإن $a_0 Q_P(0)$ لا يقبل القسمة على p، ثم استنتج أن

$$\sum_{j=0}^{n} a_j Q_P(j) = a_0 Q_P(0) + \sum_{j=1}^{n} a_j Q_P(j) \neq 0.$$

السؤال (12) باختيار مناسب للعدد الأولي p، توصل إلى تناقض واستنتج أن العدد e متسام.

ملاحظة : تصحيحات : السؤال 3.1 من الأصل يكرر تعريف Q_P؛ ونطلب هنا العلاقة $Q_P - Q'_P = P$ التي تستعمل في 3.2. وفي تعريف P يكتب الأصل x^p عوض x^{p-1}؛ وبـ x^{p-1} نحصل على $P^{(p-1)}(0) = (-1)^{np}(n!)^p$ المستعملة في 4.6. وترتكز مكبورة 4.3 على $\prod_{k=1}^{n} |s-k| \le n!$ من أجل $s \in [0, n]$.

تعليق. مبرهنة هيرميت (1873) : العدد e متسام. وعمم ليندمان هذه الطريقة (1882) لإثبات تسامي π، مما حسم مسألة تربيع الدائرة. وحسب مبرهنة ليندمان--فايرشتراس، e^a متسام لكل عدد جبري $a \neq 0$.

Problème 56 — Session 2026

Théorème de von Staudt–Clausen : B_{2n} n'a pas de racine entière

Partie 2 (sections 2.2 à 2.9) © 2026 Saad Choukri

Notations. $\mathscr{P}$ désigne l'ensemble des polynômes réels. (B_n) est la suite des polynômes de Bernoulli : $B_0 = 1$, $B'_{n+1} = (n+1)B_n$ et $\int_0^1 B_{n+1} = 0$; $b_n = B_n(0)$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{N}$, on note $\binom{x}{q} = \frac{x(x-1)\cdots(x-q+1)}{q!}$ (et $\binom{x}{0} = 1$), expression polynomiale en x.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$; $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$; $b_{2n+1} = 0$ pour $n \ge 1$; les B_n sont à coefficients rationnels ; si deux polynômes de degré $\le n$ coïncident en $n+1$ points, ils sont égaux.

2.2. **Question (1)** Montrer que pour tout triplet $(k, r, s) \in \mathbb{N}^3$ (avec $s \le r \le k$), $\binom{k}{r}\binom{r}{s} = \binom{k}{s}\binom{k-s}{r-s}$.

2.3. **Question (2)** Soit $p \in \mathbb{N}$; pour tout $r \in \mathbb{N}$, on pose $a_{p,r} = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s}\binom{r}{s} s^p$.

2.3.1. **(a)** Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$, $k^p = \sum_{r=0}^{p} a_{p,r}\binom{k}{r}$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

2.3.2. **(b)** En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^p = \sum_{r=0}^{p} a_{p,r} \binom{x}{r}$. *On remarquera que pour tout $q \in \mathbb{N}$, l'expression $\binom{x}{q}$ est polynomiale en x.*

2.3.3. **(c)** Montrer que pour tout $r \in \{0, \dots, p\}$, $\dfrac{a_{p,r}}{r!} \in \mathbb{Z}$.

2.4. **Question (3)** Soit $p \in \mathbb{N}$; on considère l'équation fonctionnelle, d'inconnue $f \in \mathscr{P}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) - f(x) = x^p. \tag{$\mathcal{E}_p$}$$

Montrer que les solutions dans $\mathscr{P}$ de $(\mathcal{E}_p)$ sont exactement les fonctions $f_\alpha : x \mapsto \alpha + \sum_{r=0}^{p} a_{p,r} \binom{x}{r+1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.5. **Question (4)** Soit $(p, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

2.5.1. **(a)** Montrer que $B_{p+1}(x) = b_{p+1} + (p+1) \sum_{r=0}^{p} a_{p,r} \binom{x}{r+1}$.

2.5.2. **(b)** En déduire que $b_p = \sum_{r=0}^{p} \dfrac{1}{r+1} \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} s^p$.

2.6. **Question (5)** Soit $r \geq 5$ un entier tel que $r+1$ ne soit pas premier. Montrer que l'entier $r!$ est divisible par $r+1$.

2.7. **Question (6)** Soit $r \geq 1$ un entier tel que $r+1$ soit premier.

2.7.1. **(a)** Soit $p \in \mathbb{N}$; on suppose que r ne divise pas p, et l'on note t le reste de la division euclidienne de p par r.

(i) **(i)** Montrer que pour tout $x \in \{1, \dots, r\}$, $x^p \equiv x^t \ [r+1]$.

(ii) **(ii)** Montrer que l'équation $x^t \equiv 1 \ [r+1]$, d'inconnue x, admet au plus t solutions dans $\{1, \dots, r\}$.

(iii) **(iii)** En déduire qu'il existe $a \in \{1, \dots, r\}$ tel que $a^p \not\equiv 1 \ [r+1]$.

(iv) **(iv)** Montrer que $\sum_{s=0}^{r} s^p \equiv \sum_{s=0}^{r} (as)^p \ [r+1]$.

(v) **(v)** En déduire que $\sum_{s=0}^{r} s^p \equiv 0 \ [r+1]$.

2.7.2. **(b)** Montrer que pour tout $s \in \{0, \dots, r\}$, $(-1)^s \binom{r}{s} \equiv 1 \ [r+1]$.

2.7.3. **(c)** En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} s^p \equiv \sum_{s=0}^{r} s^p \equiv \begin{cases} r \ [r+1] & \text{si } r \mid p, \\ 0 \ [r+1] & \text{si } r \nmid p. \end{cases}$$

2.8. **Question (7)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Q_n l'ensemble des nombres premiers p tels que $(p-1) \mid 2n$. Montrer le théorème de von Staudt–Clausen :

$$b_{2n} + \sum_{p \in Q_n} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}.$$

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

2.9. **Question (8) Application : le polynôme B_{2n} n'a pas de racine entière.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on suppose qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $B_{2n}(a) = 0$.

2.9.1. **(a)** Montrer que $b_{2n} \notin \mathbb{Z}$ et que $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$.

2.9.2. **(b)** On suppose que $a \geq 2$. Montrer que $b_{2n} = -2n \sum_{k=1}^{a-1} k^{2n-1}$ et conclure.

2.9.3. **(c)** On suppose que $a \leq -1$. Montrer que $B_{2n}(1-a) = 0$ et conclure.

N.B. : la question 2.6 de l'original suppose $r \geq 5$; elle est fausse pour $r = 3$ ($r + 1 = 4$ ne divise pas $3! = 6$), d'où l'importance de l'hypothèse. En 2.3.1 la formule est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, et en 2.4 la somme des $a_{p,r}\binom{x}{r+1}$ s'arrête à $r = p$ car $a_{p,r} = 0$ pour $r > p$.

Commentaire. Théorème de von Staudt–Clausen (1840) : $b_{2n} + \sum_{(p-1)|2n} \frac{1}{p}$ est un entier ; ainsi le dénominateur de b_{2n} est le produit des premiers p tels que $p - 1 \mid 2n$ (par exemple $b_{12} = -\frac{691}{2730}$ et $2730 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$). Application : B_{2n} n'a aucune racine entière.

النسخة العربية

مبرهنة فون شتاوت--كلاوزن : B_{2n} لا تقبل جذرا صحيحا

دورة 2026 ▪ الجزء 2 (الفقرات من 2.2 إلى 2.9) ▪ 2026 © سعد شكري

ترميزات. نرمز بـ $\mathscr{P}$ لمجموعة الحدوديات الحقيقية. (B_n) متتالية حدوديات برنولي : $B_0 = 1$، $B'_{n+1} = (n+1)B_n$ و$\int_0^1 B_{n+1} = 0$ ؛ $b_n = B_n(0)$. من أجل $x \in \mathbb{R}$ و$q \in \mathbb{N}$ نرمز بـ $\binom{x}{q} = \frac{x(x-1)\cdots(x-q+1)}{q!}$ (و$\binom{x}{0} = 1$)، وهو تعبير حدودي في x.

نتائج مقبولة (مُثبَتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$ ؛ $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$ ؛ $b_{2n+1} = 0$ من أجل $n \geq 1$ ؛ معاملات B_n جذرية ؛ إذا تطابقت حدوديتان درجتاهما $\leq n$ في $n+1$ نقطة فإنهما متساويتان.

السؤال (1) بين أنه لكل ثلاثي $(k, r, s) \in \mathbb{N}^3$ (مع $s \leq r \leq k$) : $\binom{k}{r}\binom{r}{s} = \binom{k}{s}\binom{k-s}{r-s}$.

السؤال (2) ليكن $p \in \mathbb{N}$ ؛ لكل $r \in \mathbb{N}$ نضع $a_{p,r} = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} s^p$.

(أ) بين أنه لكل $k \in \{0, \ldots, p\}$: $k^p = \sum_{r=0}^{p} a_{p,r} \binom{k}{r}$.

(ب) استنتج أنه لكل $x \in \mathbb{R}$: $x^p = \sum_{r=0}^{p} a_{p,r} \binom{x}{r}$. لاحظ أنه لكل $q \in \mathbb{N}$، التعبير $\binom{x}{q}$ حدودي في x.

(ج) بين أنه لكل $r \in \{0, \ldots, p\}$: $\frac{a_{p,r}}{r!} \in \mathbb{Z}$.

السؤال (3) ليكن $p \in \mathbb{N}$ ؛ نعتبر المعادلة الدالية ذات المجهول $f \in \mathscr{P}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) - f(x) = x^p. \qquad (\mathcal{E}_p)$$

بين أن حلول $(\mathcal{E}_p)$ في $\mathscr{P}$ هي بالضبط الدوال $f_\alpha : x \mapsto \alpha + \sum_{r=0}^{p} a_{p,r} \binom{x}{r+1}$، $\alpha \in \mathbb{R}$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

السؤال (4) ليكن $(p,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}$.

(أ) بين أن $B_{p+1}(x)=b_{p+1}+(p+1)\sum_{r=0}^{p}a_{p,r}\binom{x}{r+1}$.

(ب) استنتج أن $b_p=\sum_{r=0}^{p}\frac{1}{r+1}\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}s^p$.

السؤال (5) ليكن $r\geq 5$ عددا صحيحا بحيث $r+1$ ليس أوليا. بين أن العدد الصحيح $r!$ يقبل القسمة على $r+1$.

السؤال (6) ليكن $r\geq 1$ عددا صحيحا بحيث $r+1$ أولي.

(أ) ليكن $p\in\mathbb{N}$؛ نفترض أن r لا يقسم p، ونرمز بـ t لباقي القسمة الأقليدية لـ p على r.

(i) بين أنه لكل $x\in\{1,\dots,r\}$: $x^p\equiv x^t\ [r+1]$.

(ii) بين أن المعادلة $x^t\equiv 1\ [r+1]$ ذات المجهول x تقبل على الأكثر t حلا في $\{1,\dots,r\}$.

(iii) استنتج أنه يوجد $a\in\{1,\dots,r\}$ بحيث $a^p\not\equiv 1\ [r+1]$.

(iv) بين أن $\sum_{s=0}^{r}s^p\equiv\sum_{s=0}^{r}(as)^p\ [r+1]$.

(v) استنتج أن $\sum_{s=0}^{r}s^p\equiv 0\ [r+1]$.

(ب) بين أنه لكل $s\in\{0,\dots,r\}$: $(-1)^s\binom{r}{s}\equiv 1\ [r+1]$.

(ج) استنتج أنه لكل $p\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}s^p\equiv\sum_{s=0}^{r}s^p\equiv\begin{cases}r\ [r+1] & \text{إذا كان } r\mid p,\\ 0\ [r+1] & \text{إذا كان } r\nmid p.\end{cases}$$

السؤال (7) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$. نرمز بـ Q_n لمجموعة الأعداد الأولية p بحيث $(p-1)\mid 2n$. برهن مبرهنة فون شتاوت--كلاوزن :

$$b_{2n}+\sum_{p\in Q_n}\frac{1}{p}\in\mathbb{Z}.$$

السؤال (8) **تطبيق : الحدودية B_{2n} لا تقبل جذرا صحيحا.** ليكن $n\in\mathbb{N}^*$؛ نفترض أنه يوجد $a\in\mathbb{Z}$ بحيث $B_{2n}(a)=0$.

(أ) بين أن $b_{2n}\notin\mathbb{Z}$ وأن $a\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}$.

(ب) نفترض أن $a\geq 2$. بين أن $b_{2n}=-2n\sum_{k=1}^{a-1}k^{2n-1}$ واستنتج.

(ج) نفترض أن $a\leq -1$. بين أن $B_{2n}(1-a)=0$ واستنتج.

ملاحظة : يفترض السؤال 2.6 من الأصل $r\geq 5$؛ وهو خاطئ من أجل $r=3$ ($r+1=4$ لا يقسم $3!=6$)، ومن هنا أهمية الفرضية. وفي 2.3.1 الصيغة صحيحة لكل $k\in\mathbb{N}$، وفي 2.4 يتوقف مجموع الحدود $a_{p,r}\binom{x}{r+1}$ عند $r=p$ لأن $a_{p,r}=0$ من أجل $r>p$.

تعليق. مبرهنة فون شتاوت--كلاوزن (1840) : $b_{2n}+\sum_{(p-1)\mid 2n}\frac{1}{p}$ عدد صحيح؛ وبالتالي مقام b_{2n} هو جداء الأعداد الأولية p التي تحقق $p-1\mid 2n$ (مثلا $b_{12}=-\frac{691}{2730}$ و$2730=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13$). تطبيق : الحدودية B_{2n} لا تقبل أي جذر صحيح.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri

VI

Probabilités

Problème 57 — Session 2014

Indicatrice d'Euler et calcul des probabilités

Partie 1 © 2026 Saad Choukri

Notations. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, avec la convention $\binom{r}{k} = 0$ si $k > r$. Pour deux entiers a, b, on note $a \wedge b$ leur plus grand commun diviseur. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\varphi(n) = \text{Card}\{k \in \{1, \dots, n\} \mid k \wedge n = 1\}$$

(la fonction $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est l'*indicatrice d'Euler*).

1.1. **Question (1)** Calculer $\varphi(1)$, $\varphi(13)$ et $\varphi(20)$.

1.2. **Question (2)** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que $\varphi(n) = n - 1$ si et seulement si n est un nombre premier.

1.3. **Question (3)** Soit p un nombre premier.

1.3.1. **(a)** Soient k et m deux entiers naturels non nuls. Montrer que $m \wedge p^k \neq 1$ si et seulement si p divise m.

1.3.2. **(b)** En déduire que $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

L'objectif de la suite est d'établir des propriétés de φ à l'aide du calcul des probabilités. Soit n un entier naturel, décomposé en produit de facteurs premiers sous la forme $n = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \dots, p_r$ sont des nombres premiers deux à deux distincts et $r \geq 2$. Une boîte contient n boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à n ; on tire une boule au hasard.

1.4. **Question (4)** Pour $k \in \{1, \dots, r\}$, on considère l'événement A_k : « la boule tirée porte un numéro multiple de p_k ».

1.4.1. **(a)** Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$, $P(A_k) = \dfrac{1}{p_k}$.

1.4.2. **(b)** Montrer que pour tout $k \in \{2, \dots, r\}$ et toute partie $\{i_1, \dots, i_k\}$ de $\{1, \dots, r\}$ à k éléments,

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_k}).$$

1.4.3. **(c)** On note $\overline{A_k}$ l'événement contraire de A_k. Montrer que $P\left(\overline{A_{i_1}} \cap \cdots \cap \overline{A_{i_k}}\right) = P\left(\overline{A_{i_1}}\right) \times \cdots \times P\left(\overline{A_{i_k}}\right)$.

1.5. **Question (5)** On considère l'événement A : « tirer une boule portant un numéro premier avec n ».

1.5.1. **(a)** Montrer que $P(A) = \dfrac{\varphi(n)}{n}$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

1.5.2. **(b)** Montrer que $A = \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_r}$, puis en déduire que $\varphi(n) = n \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.

1.6. **Question (6)** Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, décomposé sous la forme $m = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_s^{\alpha_s}$ ($\alpha_i \in \mathbb{N}^*$, p_i premiers deux à deux distincts). Montrer que $\varphi(m) = m \prod_{k=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.

1.7. **Question (7)** Soient m_1 et m_2 deux éléments de $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

1.7.1. **(a)** On suppose que $m_1 \wedge m_2 = 1$; montrer que $\varphi(m_1 m_2) = \varphi(m_1)\varphi(m_2)$.

1.7.2. **(b)** On pose $d = m_1 \wedge m_2$. Exprimer $\varphi(m_1 m_2)$ en fonction de d, $\varphi(m_1)$, $\varphi(m_2)$ et $\varphi(d)$.

1.8. **Question (8)** Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée (on rappelle que $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$).

1.8.1. **(a)** Soient $a, m \in \mathbb{N}^*$ et d un diviseur de m. Montrer que : $a \wedge m = d \iff \exists k \in \mathbb{N}^*,\ a = kd$ et $k \wedge \frac{m}{d} = 1$.

1.8.2. **(b)** Soit d un diviseur de n ; on pose $\Delta_d = \{a \in \{1, \ldots, n\} \mid a \wedge n = d\}$. Montrer que $\mathrm{Card}(\Delta_d) = \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$.

1.8.3. **(c)** Soit d un diviseur de n et C_d l'événement « $X \wedge n = d$ ». Exprimer $P(C_d)$ en fonction de d et n.

1.8.4. **(d)** En déduire l'identité d'Euler : $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

N.B. : dans l'original, les sous-questions de 1.8 sont numérotées 1.7.1 à 1.7.4 et la formule de 1.6 est écrite avec n au lieu de m ; ces coquilles sont corrigées.

Commentaire. La formule $\varphi(n) = n \prod_{p|n}(1 - \frac{1}{p})$ s'interprète en probabilités : les événements « être divisible par p_k » sont indépendants pour la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$. On obtient aussi l'identité d'Euler $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ et $\varphi(m_1 m_2) = \frac{d\,\varphi(m_1)\varphi(m_2)}{\varphi(d)}$ avec $d = m_1 \wedge m_2$.

النسخة العربية

دالة أولر وحساب الاحتمالات

دورة 2014 ▪ الجزء 1 ▪ 2026 © سعد شكري

ترميزات. من أجل $n \in \mathbb{N}$ و$k \in \{0, \ldots, n\}$: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$، مع الاصطلاح $\binom{r}{k} = 0$ إذا كان $k > r$. من أجل عددين صحيحين a, b نرمز بـ $a \wedge b$ لقاسمهما المشترك الأكبر. لكل $n \in \mathbb{N}^*$ نضع

$$\varphi(n) = \mathrm{Card}\{k \in \{1, \ldots, n\} \mid k \wedge n = 1\}$$

(الدالة $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ هي دالة أولر).

السؤال (1) احسب $\varphi(1)$ و$\varphi(13)$ و$\varphi(20)$.

السؤال (2) ليكن $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. بين أن $\varphi(n) = n - 1$ إذا وفقط إذا كان n عددا أوليا.

السؤال (3) ليكن p عددا أوليا.

(أ) ليكن k وm عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين. بين أن $m \wedge p^k \neq 1$ إذا وفقط إذا كان p يقسم m.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

(ب) استنتج أن $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$ لكل $n \in \mathbb{N}^*$.

الهدف فيما يلي إثبات خاصيات للدالة φ بواسطة حساب الاحتمالات. ليكن n عددا صحيحا طبيعيا تفكيكه إلى جداء عوامل أولية $n = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}$، حيث $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$ و$p_1, \ldots, p_r$ أعداد أولية مختلفة مثنى مثنى و$r \geq 2$.
يحتوي صندوق على n كرة لا يمكن التمييز بينها باللمس، مرقمة من 1 إلى n؛ نسحب عشوائيا كرة واحدة.

السؤال (4) من أجل $k \in \{1, \ldots, r\}$ نعتبر الحدث A_k : «الكرة المسحوبة تحمل رقما مضاعفا لـ p_k».

(أ) بين أنه لكل $k \in \{1, \ldots, r\}$: $P(A_k) = \dfrac{1}{p_k}$.

(ب) بين أنه لكل $k \in \{2, \ldots, r\}$ ولكل جزء $\{i_1, \ldots, i_k\}$ من $\{1, \ldots, r\}$ ذي k عنصرا :

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_k}).$$

(ج) نرمز بـ $\overline{A_k}$ للحدث المضاد لـ A_k. بين أن $P\left(\overline{A_{i_1}} \cap \cdots \cap \overline{A_{i_k}}\right) = P\left(\overline{A_{i_1}}\right) \times \cdots \times P\left(\overline{A_{i_k}}\right)$.

السؤال (5) نعتبر الحدث A : «سحب كرة تحمل رقما أوليا مع n».

(أ) بين أن $P(A) = \dfrac{\varphi(n)}{n}$.

(ب) بين أن $A = \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_r}$، ثم استنتج أن $\varphi(n) = n \displaystyle\prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.

السؤال (6) ليكن $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ تفكيكه $m = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_s^{\alpha_s}$ ($\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ وp_i أعداد أولية مختلفة مثنى مثنى). بين أن $\varphi(m) = m \displaystyle\prod_{k=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.

السؤال (7) ليكن m_1 وm_2 عنصرين من $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

(أ) نفترض أن $m_1 \wedge m_2 = 1$؛ بين أن $\varphi(m_1 m_2) = \varphi(m_1)\varphi(m_2)$.

(ب) نضع $d = m_1 \wedge m_2$. عبر عن $\varphi(m_1 m_2)$ بدلالة d و$\varphi(m_1)$ و$\varphi(m_2)$ و$\varphi(d)$.

السؤال (8) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي رقم الكرة المسحوبة (نذكر أن $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$).

(أ) ليكن $a, m \in \mathbb{N}^*$ وd قاسما لـ m. بين أن : $a \wedge m = d \iff \exists k \in \mathbb{N}^*,\ a = kd$ و $k \wedge \dfrac{m}{d} = 1$.

(ب) ليكن d قاسما لـ n؛ نضع $\Delta_d = \{a \in \{1, \ldots, n\} \mid a \wedge n = d\}$. بين أن $\mathrm{Card}(\Delta_d) = \varphi\left(\dfrac{n}{d}\right)$.

(ج) ليكن d قاسما لـ n وC_d الحدث «$X \wedge n = d$». عبر عن $P(C_d)$ بدلالة d وn.

(د) استنتج متطابقة أولر : $\displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

ملاحظة : في الأصل رقمت الأسئلة الفرعية لـ 1.8 من 1.7.1 إلى 1.7.4، وكتبت صيغة 1.6 بـ n عوض m؛ تم تصحيح هذه الأخطاء المطبعية.

تعليق. للصيغة $\varphi(n) = n \prod_{p|n}(1 - \frac{1}{p})$ تأويل احتمالي : الأحداث «القابلية للقسمة على p_k» مستقلة بالنسبة للقانون المنتظم على $\{1, \ldots, n\}$. ونحصل أيضا على متطابقة أولر $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ وعلى $\varphi(m_1 m_2) = \frac{d\,\varphi(m_1)\varphi(m_2)}{\varphi(d)}$ مع $d = m_1 \wedge m_2$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

Problème 58 — Session 2022

Familles de parties deux à deux non incluses : exemples et dénombrements

Problème 2, notations, Parties 1 et 2 © 2026 Saad Choukri

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel ≥ 2.

Définition. Soit E un ensemble à n éléments et $p \geq 2$ un entier. On dit qu'une famille $(A_1, \ldots, A_p)$ de parties de E possède la *propriété* $\mathscr{S}$ si

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,p\}^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \not\subset A_j.$$

Exemple. Si $E = \{1,2,3,4\}$, $A_1 = \{1,2,3\}$, $A_2 = \{1,4\}$, $A_3 = \{2,4\}$ et $A'_3 = \{1,2\}$, la famille (A_1, A_2, A_3) possède la propriété $\mathscr{S}$, mais pas la famille (A_1, A_2, A'_3), puisque $A'_3 \subset A_1$.

Rappels. Si F est un ensemble à m éléments, l'ensemble $\mathscr{P}(F)$ de ses parties possède 2^m éléments, et pour tout $k \in \{0,\ldots,m\}$, le nombre de parties de F à k éléments est $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$. Si $A \subset B$ sont deux parties de F, alors $A = B$ si et seulement si $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} B$.

Partie 1 : premiers exemples et résultats utiles

Dans cette partie, E désigne un ensemble à n éléments.

1.1. **Question (1)** Écrire tous les couples (A_1, A_2) de parties de l'ensemble $\{1,2,3\}$ possédant la propriété $\mathscr{S}$.

1.2. **Question (2)** Soit $k \in \{1,\ldots,n-1\}$. Montrer que la famille (prise dans un ordre quelconque) de toutes les parties de E à k éléments possède la propriété $\mathscr{S}$. Quel est le nombre p d'éléments de cette famille ?

1.3. **Question (3)** **Calculs sur les coefficients binomiaux.** On pose $\omega(n) = \max_{0\leq j\leq n} \binom{n}{j}$.

1.3.1. **(a)** On suppose $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}^*$, et on considère $k \in \{1,\ldots,n\}$. Montrer que $\binom{n}{k-1} \leq \binom{n}{k} \iff k \leq m$. Quelle est, dans ce cas, la valeur de $\omega(n)$ en fonction de m ?

1.3.2. **(b)** On suppose $n = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}^*$, et on considère $k \in \{1,\ldots,n\}$. Montrer que $\binom{n}{k-1} \leq \binom{n}{k} \iff k \leq m+1$. Quelle est, dans ce cas, la valeur de $\omega(n)$ en fonction de m ?

1.3.3. **(c)** Montrer que $\omega(2n) = 2\,\omega(2n-1)$.

Partie 2 : familles vérifiant la propriété $\mathscr{S}$ et ayant 2 ou 3 éléments

Dans cette partie, E désigne un ensemble à n éléments.

2.1. **Question (4)** **Nombre de familles à deux éléments vérifiant $\mathscr{S}$.**

2.1.1. **(a)** Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$ en fonction de n. Justifier.

2.1.2. **(b)** Combien existe-t-il de couples (A, B) de parties de E avec $A \subset B$? Justifier.

2.1.3. **(c)** Combien existe-t-il de couples (A, B) de parties de E avec $B \subset A$ et $A \neq B$? Justifier.

2.1.4. **(d)** En déduire le nombre de couples (A_1, A_2) de parties de E possédant la propriété $\mathscr{S}$.

2.2. **Question (5)** **Familles à trois éléments.** On suppose ici $n \geq 5$. Combien existe-t-il de triplets (A_1, A_2, A_3) de parties de E avec $\operatorname{Card} A_1 = 1$, $\operatorname{Card} A_2 = 2$, $\operatorname{Card} A_3 = 3$, et possédant de plus la propriété $\mathscr{S}$?

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

On pourra remarquer que si (A_1, A_2, A_3) possède la propriété $\mathscr{S}$ avec $A_1 = \{x\}$ et $A_2 = \{y, z\}$, alors A_3 est soit de la forme $\{y, a, b\}$ ou $\{z, a, b\}$ avec $a \neq b$ et $a, b \in E \setminus \{x, y, z\}$, soit de la forme $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ avec α, β, γ distincts dans $E \setminus \{x, y, z\}$.

N.B. : l'indication de l'original écrit « $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset E \setminus \{x, y\}$ », ce qui autoriserait $z \in A_3$ (cas déjà compté dans la première forme) ; elle a été précisée. On trouve 3^n en 2.1.2 et $4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n$ en 2.1.4.

Commentaire. Il y a 3^n couples (A, B) avec $A \subset B$ (chaque élément est dans A, dans $B \setminus A$, ou hors de B), et donc $4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n$ couples possédant la propriété $\mathscr{S}$. Le coefficient binomial central $\omega(n) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ annonce la réponse du problème suivant.

النسخة العربية

عائلات أجزاء غير محتواة مثنى مثنى : أمثلة وعد

دورة 2022 ▪ المسألة 2، الترميزات والجزءان 1 و2 ▪ © 2026 سعد شكري

في هذه المسألة كلها يرمز n لعدد صحيح طبيعي ≥ 2.

تعريف. لتكن E مجموعة ذات n عنصرا و$p \geq 2$ عددا صحيحا. نقول إن عائلة $(A_1, \ldots, A_p)$ من أجزاء E تحقق الخاصية $\mathscr{S}$ إذا كان

$$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, p\}^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \not\subset A_j.$$

مثال. إذا كان $E = \{1, 2, 3, 4\}$ و$A_1 = \{1, 2, 3\}$ و$A_2 = \{1, 4\}$ و$A_3 = \{2, 4\}$ و$A'_3 = \{1, 2\}$، فإن العائلة (A_1, A_2, A_3) تحقق الخاصية $\mathscr{S}$، بينما العائلة (A_1, A_2, A'_3) لا تحققها لأن $A'_3 \subset A_1$.

تذكير. إذا كانت F مجموعة ذات m عنصرا، فإن مجموعة أجزائها $\mathscr{P}(F)$ تحتوي على 2^m عنصرا، ولكل $k \in \{0, \ldots, m\}$ عدد أجزاء F ذات k عنصرا هو $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$. إذا كان $A \subset B$ جزأين من F فإن $A = B$ إذا وفقط إذا كان $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} B$.

الجزء 1 : أمثلة أولى ونتائج مفيدة

في هذا الجزء، E مجموعة ذات n عنصرا.

السؤال (1) اكتب جميع الأزواج (A_1, A_2) من أجزاء المجموعة $\{1, 2, 3\}$ التي تحقق الخاصية $\mathscr{S}$.

السؤال (2) ليكن $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. بين أن عائلة جميع أجزاء E ذات k عنصرا (مأخوذة بترتيب ما) تحقق الخاصية $\mathscr{S}$. ما عدد عناصر p لهذه العائلة؟

السؤال (3) حسابات حول المعاملات الحدانية. نضع $\omega(n) = \max_{0 \leq j \leq n} \binom{n}{j}$.

(أ) نفترض أن $n = 2m$، $m \in \mathbb{N}^*$، ونعتبر $k \in \{1, \ldots, n\}$. بين أن $k \leq m \iff \binom{n}{k-1} \leq \binom{n}{k}$. ما قيمة $\omega(n)$ في هذه الحالة بدلالة m؟

(ب) نفترض أن $n = 2m + 1$، $m \in \mathbb{N}^*$، ونعتبر $k \in \{1, \ldots, n\}$. بين أن $k \leq m + 1 \iff \binom{n}{k-1} \leq \binom{n}{k}$. ما قيمة $\omega(n)$ في هذه الحالة بدلالة m؟

(ج) بين أن $\omega(2n) = 2\,\omega(2n-1)$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ أو الاستنساخ دون إذن مسبق من المؤلف

الجزء 2 : عائلات تحقق الخاصية $\mathscr{S}$ ذات عنصرين أو ثلاثة

في هذا الجزء، E مجموعة ذات n عنصرا.

السؤال (4) **عدد العائلات ذات العنصرين التي تحقق $\mathscr{S}$.**

(أ) عبر عن $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$ بدلالة n. علل.

(ب) كم يوجد من زوج (A, B) من أجزاء E بحيث $A \subset B$؟ علل.

(ج) كم يوجد من زوج (A, B) من أجزاء E بحيث $B \subset A$ و$A \neq B$؟ علل.

(د) استنتج عدد الأزواج (A_1, A_2) من أجزاء E التي تحقق الخاصية $\mathscr{S}$.

السؤال (5) **عائلات ذات ثلاثة عناصر.** نفترض هنا أن $n \geq 5$. كم يوجد من ثلاثي (A_1, A_2, A_3) من أجزاء E بحيث $\operatorname{Card} A_1 = 1$ و$\operatorname{Card} A_2 = 2$ و$\operatorname{Card} A_3 = 3$ ويحقق إضافة إلى ذلك الخاصية $\mathscr{S}$؟

يمكن ملاحظة أنه إذا كان (A_1, A_2, A_3) يحقق الخاصية $\mathscr{S}$ مع $A_1 = \{x\}$ و$A_2 = \{y, z\}$، فإن A_3 إما على الشكل $\{y, a, b\}$ أو $\{z, a, b\}$ مع $a \neq b$ و$a, b \in E \setminus \{x, y, z\}$، وإما على الشكل $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ مع α, β, γ مختلفة في $E \setminus \{x, y, z\}$.

ملاحظة : يكتب إرشاد الأصل « $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset E \setminus \{x, y\}$ »، مما يسمح بـ $z \in A_3$ (حالة سبق عدها في الشكل الأول)؛ وقد تم تدقيقه. نجد 3^n في 2.1.2 و$2^n - 2 \cdot 3^n + 4^n$ في 2.1.4.

تعليق. يوجد 3^n زوجا (A, B) بحيث $A \subset B$ (كل عنصر إما في A أو في $B \setminus A$ أو خارج B)، ومن ثم $2^n - 2 \cdot 3^n + 4^n$ زوجا يحقق الخاصية $\mathscr{S}$. والمعامل الحداني المركزي $\omega(n) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ يمهد لجواب المسألة الموالية.

Problème 59 — Session 2025

Dérangements d'un ensemble fini et problème des rencontres

Exercice © 2026 Saad Choukri

Notations. Si n est un entier naturel non nul, on pose $E_n = \{1, \dots, n\}$. Une *permutation* de E_n est une bijection de E_n sur lui-même ; on la note $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$. Un *point fixe* de σ est un élément $k \in E_n$ tel que $\sigma(k) = k$; un *dérangement* de E_n est une permutation sans point fixe. On note $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des permutations de E_n (on rappelle que $\operatorname{Card} \mathscr{S}_n = n!$), $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des dérangements de E_n et $d_n = \operatorname{Card} \mathscr{D}_n$; par convention, $d_0 = 1$.

1.1. **Question (1)** Écrire la liste des éléments de chacun des ensembles $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$.

1.2. **Question (2)** Donner les valeurs de d_1, d_2 et d_3.

1.3. **Question (3)** **Une première expression du nombre de dérangements.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$; pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on note $\mathscr{F}_k$ l'ensemble des permutations de E_n ayant exactement k points fixes, et l'on pose $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1.3.1. **(a)** Soit $p \in \{0, \dots, n\}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

1.3.2. **(b)** Montrer que les ensembles $\mathscr{F}_0, \ldots, \mathscr{F}_n$ sont deux à deux disjoints et que $n! = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(\mathscr{F}_k)$.

1.3.3. **(c)** Déterminer $\mathrm{Card}(\mathscr{F}_n)$ et $\mathrm{Card}(\mathscr{F}_0)$, puis montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{Card}(\mathscr{F}_k) = \binom{n}{k} d_{n-k}$.

1.3.4. **(d)** En déduire que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.

1.3.5. **(e)** Déduire de ce qui précède que $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

1.4. **Question (4) Une deuxième expression du nombre de dérangements.** Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

1.4.1. **(a)** Montrer que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont adjacentes ; on note l leur limite commune.

1.4.2. **(b)** Montrer que la suite (x_n) converge vers l.

1.4.3. **(c)** Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $|x_n - l| \leq \dfrac{1}{(n+1)!}$.

1.4.4. **(d)** On admet que $l = \frac{1}{e}$. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, d_n est la partie entière du réel $\dfrac{n!}{e} + \dfrac{1}{2}$.

1.5. **Question (5) Probabilité qu'une permutation soit un dérangement.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on note p_n la probabilité qu'une permutation choisie au hasard (de façon équiprobable) dans $\mathscr{S}_n$ soit un dérangement.

1.5.1. **(a)** Exprimer p_n en fonction de n.

1.5.2. **(b)** La suite $(p_n)_{n\geq 1}$ admet-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

1.6. **Question (6) Une application probabiliste.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On répartit au hasard n boules numérotées de 1 à n dans n urnes également numérotées de 1 à n, en plaçant une seule boule par urne. On note X_n la variable aléatoire qui à une telle répartition associe le nombre de coïncidences entre le numéro de l'urne et celui de la boule qu'elle reçoit.

1.6.1. **(a)** Déterminer la probabilité $P(X_n = 0)$ et en déduire une expression de $P(X_n \geq 1)$.

1.6.2. **(b)** Démontrer que pour tout entier $q \in \{0, \ldots, n\}$, $P(X_n = q) = \dfrac{1}{q!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-q} \frac{(-1)^k}{k!}$.

1.6.3. **(c)** Montrer que l'espérance de la variable aléatoire X_n est indépendante de l'entier n.

N.B. : l'original écrit en 1.3.5 « $n! = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = d_n$ » ; la formule correcte est $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. La convention $d_0 = 1$ est nécessaire en 1.3.3–1.3.4, et les questions de 1.6 sont numérotées 1.5.1 à 1.5.3 dans l'original. On trouve $d_1 = 0$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2$ et $E(X_n) = 1$.

Commentaire. Le nombre de dérangements est $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$, entier le plus proche de $\frac{n!}{e}$; on a $d_1 = 0$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2$, $d_4 = 9$. La probabilité qu'une permutation n'ait pas de point fixe tend vers $\frac{1}{e} \approx 0{,}368$ (problème des rencontres de Montmort, 1708), et le nombre moyen de points fixes vaut toujours 1.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 - Saad Choukri

النسخة العربية

تبديلات مجموعة منتهية بدون نقط صامدة ومسألة التطابقات

دورة 2025 ▪ التمرين ▪ 2026 © سعد شكري

ترميزات. إذا كان n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم نضع $E_n = \{1, \dots, n\}$. التبديلة لـ E_n تقابل من E_n نحو نفسها؛ نرمز لها بـ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$. النقطة الصامدة لـ σ عنصر $k \in E_n$ بحيث $\sigma(k) = k$؛ والاضطراب لـ E_n تبديلة بدون نقطة صامدة. نرمز بـ $\mathscr{S}_n$ لمجموعة تبديلات E_n (نذكر أن $\operatorname{Card} \mathscr{S}_n = n!$)، وبـ $\mathscr{D}_n$ لمجموعة اضطرابات E_n وبـ $d_n = \operatorname{Card} \mathscr{D}_n$؛ واصطلاحا $d_0 = 1$.

السؤال (1) اكتب لائحة عناصر كل من المجموعتين $\mathscr{S}_1$ و$\mathscr{S}_2$.

السؤال (2) أعط قيم d_1 وd_2 وd_3.

السؤال (3) تعبير أول لعدد الاضطرابات. ليكن $n \in \mathbb{N}^*$؛ لكل $k \in \{0, \dots, n\}$ نرمز بـ $\mathscr{F}_k$ لمجموعة تبديلات E_n التي لها بالضبط k نقطة صامدة، ونضع $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(أ) ليكن $p \in \{0, \dots, n\}$. بين أن $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } p = 0, \\ 0 & \text{إذا كان } p \neq 0. \end{cases}$

(ب) بين أن المجموعات $\mathscr{F}_0, \dots, \mathscr{F}_n$ منفصلة مثنى مثنى وأن $n! = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Card}(\mathscr{F}_k)$.

(ج) حدد $\operatorname{Card}(\mathscr{F}_n)$ و$\operatorname{Card}(\mathscr{F}_0)$، ثم بين أنه لكل $k \in \{1, \dots, n\}$: $\operatorname{Card}(\mathscr{F}_k) = \binom{n}{k} d_{n-k}$.

(د) استنتج أن $\displaystyle n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.

(هـ) استنتج مما سبق أن $\displaystyle d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

السؤال (4) تعبير ثان لعدد الاضطرابات. لكل عدد صحيح $n \geq 0$ نضع $\displaystyle x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

(أ) بين أن المتتاليتين (x_{2n}) و(x_{2n+1}) متحاذيتان؛ نرمز بـ l لنهايتهما المشتركة.

(ب) بين أن المتتالية (x_n) تتقارب نحو l.

(ج) بين أنه لكل عدد صحيح $n \geq 1$: $|x_n - l| \leq \frac{1}{(n+1)!}$.

(د) نقبل أن $l = \frac{1}{e}$. بين أنه لكل عدد صحيح $n \geq 2$، d_n هو الجزء الصحيح للعدد الحقيقي $\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$.

السؤال (5) احتمال أن تكون تبديلة اضطرابا. ليكن $n \in \mathbb{N}^*$؛ نرمز بـ p_n لاحتمال أن تكون تبديلة مختارة عشوائيا (بكيفية متساوية الاحتمال) من $\mathscr{S}_n$ اضطرابا.

(أ) عبر عن p_n بدلالة n.

(ب) هل تقبل المتتالية $(p_n)_{n \geq 1}$ نهاية؟ إذا كان الجواب نعم، فما هي؟

السؤال (6) تطبيق احتمالي. ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. نوزع عشوائيا n كرة مرقمة من 1 إلى n في n صندوقا مرقمة أيضا من 1 إلى n، بوضع كرة واحدة في كل صندوق. نرمز بـ X_n للمتغير العشوائي الذي يربط كل توزيع بعدد التطابقات بين رقم الصندوق ورقم الكرة التي يتلقاها.

(أ) حدد الاحتمال $P(X_n = 0)$ واستنتج تعبيرا لـ $P(X_n \geq 1)$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ أو إعادة النشر دون إذن مسبق من المؤلف

(ب) برهن أنه لكل عدد صحيح $q \in \{0, \ldots, n\}$: $P(X_n = q) = \dfrac{1}{q!} \sum_{k=0}^{n-q} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

(ج) بين أن الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X_n لا يتعلق بالعدد الصحيح n.

ملاحظة : يكتب الأصل في 1.3.5 « $d_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = n!$ »؛ والصيغة الصحيحة هي $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. والاصطلاح $d_0 = 1$ ضروري في 1.3.3--1.3.4، وأسئلة 1.6 مرقمة في الأصل من 1.5.1 إلى 1.5.3. نجد $d_1 = 0$ و $d_2 = 1$ و $d_3 = 2$ و $E(X_n) = 1$.

تعليق. عدد الاضطرابات هو $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$، وهو العدد الصحيح الأقرب إلى $\frac{n!}{e}$؛ لدينا $d_1 = 0$ و $d_2 = 1$ و $d_3 = 2$ و $d_4 = 9$. احتمال ألا تقبل تبديلة أي نقطة صامدة يؤول إلى $\frac{1}{e} \approx 0{,}368$ (مسألة التطابقات لمونمور، 1708)، ومتوسط عدد النقط الصامدة يساوي دائما 1.

Problème 60 — Session 2022

Théorème de Sperner : taille maximale d'une antichaîne de parties

Problème 2, Partie 3 © 2026 Saad Choukri

Notations. E est un ensemble à $n \geq 2$ éléments. Une famille $(A_1, \ldots, A_p)$ $(p \geq 2)$ de parties de E possède la *propriété* $\mathscr{S}$ si $A_i \not\subset A_j$ pour tous $i \neq j$. On pose $\omega(n) = \max_{0 \leq j \leq n} \binom{n}{j}$.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). Pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, la famille des parties de E à k éléments possède la propriété $\mathscr{S}$; $\omega(n) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

On considère une famille $(A_1, \ldots, A_p)$ de parties de E possédant la propriété $\mathscr{S}$, et l'on cherche la valeur maximale de p.

Définition. On appelle *chaîne* de parties de E toute famille $(C_1, \ldots, C_n)$ de parties de E vérifiant $\operatorname{Card} C_i = i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $C_j \subset C_{j+1}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n-1\}$.

3.1. **Question (1)** Montrer que $p \leq 2^n - 2$.

3.2. **Question (2)** Déterminer toutes les chaînes de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

3.3. **Question (3)** On note s_n le nombre de chaînes d'un ensemble à n éléments.

3.3.1. **(a)** Vérifier que si B est une partie de E de cardinal $n-1$ et si $(B_1, \ldots, B_{n-1})$ est une chaîne de B, alors $(B_1, \ldots, B_{n-1}, E)$ est une chaîne de E.

3.3.2. **(b)** Établir que $s_n = n s_{n-1}$, puis justifier que $s_n = n!$.

3.4. **Question (4)** On prend $A_1 = \{2\}$, $A_2 = \{1, 3\}$, $A_3 = \{1, 4\}$, trois parties de $\{1, 2, 3, 4\}$; la famille (A_1, A_2, A_3) possède donc la propriété $\mathscr{S}$. Trouver une chaîne (D_1, D_2, D_3, D_4) de $\{1, 2, 3, 4\}$ telle que $\{A_1, A_2, A_3\} \cap \{D_1, D_2, D_3, D_4\} = \emptyset$, et une autre chaîne (C_1, C_2, C_3, C_4) telle que $\{A_1, A_2, A_3\} \cap \{C_1, C_2, C_3, C_4\} = \{A_2\}$.

3.5. **Question (5)** Soit $(C_1, \ldots, C_n)$ une chaîne de E. Montrer que $\operatorname{Card}\big(\{A_1, \ldots, A_p\} \cap \{C_1, \ldots, C_n\}\big) \leq 1$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

3.6. **Question (6) Détermination de la valeur maximale de p.** Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des chaînes $(C_1, \dots, C_n)$ de E vérifiant $\text{Card}\left(\{A_1, \dots, A_p\} \cap \{C_1, \dots, C_n\}\right) = 1$. On définit l'application $\Phi : \mathscr{F} \to \{A_1, \dots, A_p\}$ qui à toute chaîne $(C_1, \dots, C_n)$ de $\mathscr{F}$ associe l'unique élément de $\{A_1, \dots, A_p\} \cap \{C_1, \dots, C_n\}$.

3.6.1. **(a)** Soit $k \in \{1, \dots, p\}$; on écrit $A_k = \{x_1, \dots, x_\ell\}$ et $E \setminus A_k = \{x_{\ell+1}, \dots, x_n\}$, où ℓ est le cardinal de A_k. Construire une chaîne $(C_1, \dots, C_n)$ de E telle que $C_\ell = A_k$, et en déduire que Φ est surjective.

3.6.2. **(b)** Soit $k \in \{1, \dots, p\}$. Montrer que le cardinal de $\Phi^{-1}(\{A_k\})$ est égal à $\ell!\,(n-\ell)!$, où ℓ désigne le cardinal de A_k.

3.6.3. **(c)** Vérifier que les ensembles $\Phi^{-1}(\{A_1\}), \dots, \Phi^{-1}(\{A_p\})$ forment une partition de $\mathscr{F}$.

3.6.4. **(d)** On pose $n_k = \text{Card}\, A_k$. Exprimer le nombre d'éléments de $\mathscr{F}$ en fonction des cardinaux des ensembles $\Phi^{-1}(\{A_k\})$, puis en déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} n_k!\,(n-n_k)! \leq n!$.

3.6.5. **(e)** Déduire de la question précédente que $p \leq \omega(n)$.

3.6.6. **(f)** Existe-t-il une famille $(B_1, \dots, B_{\omega(n)})$ de parties de E possédant la propriété $\mathscr{S}$? Justifier.

3.6.7. **(g)** Conclure au sujet de la valeur maximale de l'entier p.

3.7. **Question (7) Une application.** Soit $E = \{1, 2, \dots, n\}$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs, non nécessairement distincts. On définit $f : \mathscr{P}(E) \to \mathbb{R}$ par $f(\emptyset) = 0$ et $f(A) = \sum_{i \in A} a_i$ pour $A \neq \emptyset$.

3.7.1. **(a)** Vérifier que si $A \subset B$ et $A \neq B$, alors $f(A) < f(B)$.

3.7.2. **(b)** Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le nombre $g(t)$ de parties A de E telles que $f(A) = t$ est inférieur ou égal à $\omega(n)$.

Commentaire. Théorème de Sperner (1928) : une famille de parties de $\{1, \dots, n\}$ deux à deux non incluses a au plus $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ éléments ; la borne est atteinte par les parties de cardinal $\lfloor n/2 \rfloor$. La preuve par les chaînes est due à Lubell (inégalité LYM). Application (Littlewood–Offord) : au plus $\omega(n)$ sous-sommes de $a_1, \dots, a_n > 0$ peuvent prendre une même valeur.

النسخة العربية

مبرهنة شبيرنر : الحجم الأقصى لعائلة أجزاء غير محتواة

دورة 2022 ▪ المسألة 2، الجزء 3 ▪ © 2026 سعد شكري

ترميزات. E مجموعة ذات $n \geq 2$ عنصرا. تحقق عائلة $(A_1, \dots, A_p)$ ($p \geq 2$) من أجزاء E الخاصية $\mathscr{S}$ إذا كان $A_i \not\subset A_j$ لكل $i \neq j$. نضع $\omega(n) = \max_{0 \leq j \leq n} \binom{n}{j}$.

نتائج مقبولة (مُثبتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). لكل $k \in \{1, \dots, n-1\}$، عائلة أجزاء E ذات k عنصرا تحقق الخاصية $\mathscr{S}$؛ $\omega(n) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

نعتبر عائلة $(A_1, \dots, A_p)$ من أجزاء E تحقق الخاصية $\mathscr{S}$، ونبحث عن القيمة القصوى لـ p.

تعريف. نسمي سلسلة أجزاء لـ E كل عائلة $(C_1, \dots, C_n)$ من أجزاء E تحقق $\text{Card}\, C_i = i$ لكل $i \in \{1, \dots, n\}$ و$C_j \subset C_{j+1}$ لكل $j \in \{1, \dots, n-1\}$.

السؤال (1) بين أن $p \leq 2^n - 2$.

السؤال (2) حدد جميع سلاسل المجموعة $\{1, 2, 3\}$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

السؤال (3) نرمز بـ s_n لعدد سلاسل مجموعة ذات n عنصرا.

(أ) تحقق من أنه إذا كان B جزءا من E رئيسيه $n-1$ وكانت $(B_1,\dots,B_{n-1})$ سلسلة لـ B، فإن $(B_1,\dots,B_{n-1},E)$ سلسلة لـ E.

(ب) أثبت أن $s_n = ns_{n-1}$، ثم علل أن $s_n = n!$.

السؤال (4) نأخذ $A_1=\{2\}$ و$A_2=\{1,3\}$ و$A_3=\{1,4\}$، ثلاثة أجزاء من $\{1,2,3,4\}$؛ فالعائلة (A_1,A_2,A_3) تحقق إذن الخاصية $\mathscr{S}$. أوجد سلسلة (D_1,D_2,D_3,D_4) لـ $\{1,2,3,4\}$ بحيث $\{A_1,A_2,A_3\}\cap\{D_1,D_2,D_3,D_4\}=\emptyset$، وسلسلة أخرى (C_1,C_2,C_3,C_4) بحيث $\{A_1,A_2,A_3\}\cap\{C_1,C_2,C_3,C_4\}=\{A_2\}$.

السؤال (5) لتكن $(C_1,\dots,C_n)$ سلسلة لـ E. بين أن $\operatorname{Card}\left(\{A_1,\dots,A_p\}\cap\{C_1,\dots,C_n\}\right)\le 1$.

السؤال (6) **تحديد القيمة القصوى لـ p.** لتكن $\mathscr{F}$ مجموعة سلاسل $(C_1,\dots,C_n)$ لـ E التي تحقق $\operatorname{Card}\left(\{A_1,\dots,A_p\}\cap\{C_1,\dots,C_n\}\right)=1$. نعرف التطبيق $\Phi:\mathscr{F}\to\{A_1,\dots,A_p\}$ الذي يربط كل سلسلة $(C_1,\dots,C_n)$ من $\mathscr{F}$ بالعنصر الوحيد لـ $\{A_1,\dots,A_p\}\cap\{C_1,\dots,C_n\}$.

(أ) ليكن $k\in\{1,\dots,p\}$؛ نكتب $A_k=\{x_1,\dots,x_\ell\}$ و$E\setminus A_k=\{x_{\ell+1},\dots,x_n\}$، حيث ℓ رئيسي A_k. أنشئ سلسلة $(C_1,\dots,C_n)$ لـ E بحيث $C_\ell=A_k$، واستنتج أن Φ شمولي.

(ب) ليكن $k\in\{1,\dots,p\}$. بين أن رئيسي $\Phi^{-1}(\{A_k\})$ يساوي $\ell!\,(n-\ell)!$، حيث ℓ رئيسي A_k.

(ج) تحقق من أن المجموعات $\Phi^{-1}(\{A_1\}),\dots,\Phi^{-1}(\{A_p\})$ تكون تجزيئا لـ $\mathscr{F}$.

(د) نضع $n_k=\operatorname{Card}A_k$. عبر عن عدد عناصر $\mathscr{F}$ بدلالة رئيسيات المجموعات $\Phi^{-1}(\{A_k\})$، ثم استنتج أن $\sum_{k=1}^{p} n_k!\,(n-n_k)!\le n!$.

(هـ) استنتج من السؤال السابق أن $p\le\omega(n)$.

(و) هل توجد عائلة $(B_1,\dots,B_{\omega(n)})$ من أجزاء E تحقق الخاصية $\mathscr{S}$؟ علل.

(ز) استنتج القيمة القصوى للعدد الصحيح p.

السؤال (7) **تطبيق.** لتكن $E=\{1,2,\dots,n\}$ و$a_1,\dots,a_n$ أعدادا حقيقية موجبة قطعا، ليست بالضرورة مختلفة. نعرف $f:\mathscr{P}(E)\to\mathbb{R}$ بـ $f(\emptyset)=0$ و$f(A)=\sum_{i\in A}a_i$ من أجل $A\neq\emptyset$.

(أ) تحقق من أنه إذا كان $A\subset B$ و$A\neq B$ فإن $f(A)<f(B)$.

(ب) بين أنه لكل $t\in\mathbb{R}$، عدد الأجزاء A من E بحيث $f(A)=t$، الذي نرمز له بـ $g(t)$، أصغر من أو يساوي $\omega(n)$.

تعليق. مبرهنة شبيرنر (1928) : عائلة أجزاء من $\{1,\dots,n\}$ غير محتواة مثنى مثنى لها على الأكثر $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$ عنصرا؛ ويبلغ هذا الحد بالأجزاء ذات الرئيسي $\lfloor n/2\rfloor$. البرهان بالسلاسل يعود إلى لوبل (متفاوتة .(LYM تطبيق (ليتلوود--أوفورد) : على الأكثر $\omega(n)$ مجموعا جزئيا لـ $a_1,\dots,a_n>0$ يمكن أن تأخذ نفس القيمة.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

VII

Nombres complexes

Problème 61 — Session 2013

Localisation des racines d'un polynôme à coefficients réels

Exercice 2, Partie 1 (traduit de l'arabe) © 2026 Saad Choukri

Soit P un polynôme de degré $n \geq 2$, d'une variable complexe, défini par

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \qquad z \in \mathbb{C},$$

où $a_0, \ldots, a_n$ sont des réels. On suppose qu'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$a_n \geq 1, \qquad a_{n-1} \geq 0, \qquad |a_k| \leq M \ \text{ pour } 0 \leq k \leq n-2.$$

1.1. **Question (1)** Soit z un nombre complexe. Montrer que $|z|^2 - |z| - M < 0 \iff |z| < \dfrac{1+\sqrt{1+4M}}{2}$.

1.2. **Question (2)** Soit z un nombre complexe tel que $|z| > 1$ et $\mathrm{Re}(z) \geq 0$. Montrer que

$$\left|\frac{P(z)}{z^n}\right| \geq \left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z}\right| - \left(\frac{|a_{n-2}|}{|z|^2} + \cdots + \frac{|a_0|}{|z|^n}\right) > 1 - \frac{M}{|z|^2 - |z|}.$$

1.3. **Question (3)** En déduire que toute racine $z \in \mathbb{C}$ du polynôme P vérifie : $\mathrm{Re}(z) < 0$, ou bien $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ et $|z| < \dfrac{1+\sqrt{1+4M}}{2}$.

Commentaire. Lemme de localisation : si le coefficient dominant vaut au moins 1, le suivant est positif et les autres sont bornés par M, toute racine de partie réelle positive est de module $< \frac{1+\sqrt{1+4M}}{2}$. Avec $M = 9$ (chiffres décimaux), on obtient $|z| < \frac{1+\sqrt{37}}{2} \approx 3{,}54$, ce qui sert au critère d'irréductibilité du thème V.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

النسخة العربية
تحديد موضع جذور حدودية ذات معاملات حقيقية

دورة 2013 ▪ التمرين 2، الجزء 1 (النص الأصلي) ▪ 2026 © سعد شكري

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

لتكن P حدودية درجتها $n \geq 2$ لمتغير عقدي، معرفة بـ

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \qquad z \in \mathbb{C},$$

حيث $a_0, \ldots, a_n$ أعداد حقيقية. نفترض أنه يوجد عدد حقيقي $M > 0$ بحيث

$$a_n \geq 1, \qquad a_{n-1} \geq 0, \qquad |a_k| \leq M \text{ من أجل } 0 \leq k \leq n-2.$$

السؤال (1) ليكن z عددا عقديا. بين أن $|z| < \dfrac{1+\sqrt{1+4M}}{2} \iff |z|^2 - |z| - M < 0$.

السؤال (2) ليكن z عددا عقديا بحيث $|z| > 1$ و$\mathrm{Re}(z) \geq 0$. بين أن

$$\left|\frac{P(z)}{z^n}\right| \geq \left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z}\right| - \left(\frac{|a_{n-2}|}{|z|^2} + \cdots + \frac{|a_0|}{|z|^n}\right) > 1 - \frac{M}{|z|^2 - |z|}.$$

السؤال (3) استنتج أن كل جذر $z \in \mathbb{C}$ للحدودية P يحقق: $\mathrm{Re}(z) < 0$، أو $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ و$|z| < \dfrac{1+\sqrt{1+4M}}{2}$.

تعليق. تمهيدية تحديد الموضع: إذا كان المعامل الرئيسي أكبر من أو يساوي 1 والمعامل الموالي موجبا والمعاملات الأخرى محدودة بـ M، فإن كل جذر جزؤه الحقيقي موجب يكون معياره أصغر من $\frac{1+\sqrt{1+4M}}{2}$. ومن أجل $M = 9$ (الأرقام العشرية) نحصل على $|z| < \frac{1+\sqrt{37}}{2} \approx 3{,}54$، وهذا ما يستعمل في معيار عدم الاختزال في المحور الخامس.

Problème 62 — Session 2013

L'inversion $M(z) \mapsto M(1/\bar{z})$: images des droites et des cercles

Exercice 1, Partie 1 (traduit de l'arabe) © 2026 Saad Choukri

Notations. Le plan complexe $\mathbb{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$; pour $z \in \mathbb{C}$, on note $M(z)$ le point d'affixe z (ainsi $O = M(0)$). On rappelle que pour tous $u, v \in \mathbb{C}$, $\big||u| - |v|\big| \leq |u - v| \leq |u| + |v|$. Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R > 0$, on note $\mathcal{C}(z_0, R) = \{M(z) \in \mathbb{P} \mid |z - z_0| = R\}$ le cercle de centre $M(z_0)$ et de rayon R ; l'ensemble $\{M(z) \mid |z - z_0| > R\}$ est appelé *extérieur* du cercle $\mathcal{C}$ et noté $\mathcal{C}^+$, et l'ensemble $\{M(z) \mid |z - z_0| < R\}$ est appelé *intérieur* du cercle et noté $\mathcal{C}^-$. Pour deux complexes distincts a et b, on note $D_{a,b}$ la droite passant par $M(a)$ et $M(b)$.

On considère la transformation $f : \mathbb{P} \setminus \{O\} \to \mathbb{P} \setminus \{O\}$ définie par $f\big(M(z)\big) = M\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right)$.

1.1. **Question (1)** Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

1.2. **Question (2)** Soient a et b deux nombres complexes distincts.

1.2.1. **(a)** Montrer que $M(z) \in D_{a,b} \iff z(\bar{a}-\bar{b}) - \bar{z}(a-b) = b\bar{a} - a\bar{b}$.

1.2.2. **(b)** En déduire que pour tout complexe non nul u et tout $z \neq 0$: $\dfrac{1}{u\bar{z}} - \dfrac{1}{z\bar{u}} = 0 \iff M(z) \in D_{u,0}$.

1.2.3. **(c)** Soit u un complexe non nul. Montrer que $f\big(D_{u,0} \setminus \{O\}\big) = D_{\frac{1}{\bar{u}},0} \setminus \{O\}$.

1.3. **Question (3)** Soient z_0 un complexe non nul et $R > 0$; on écrit $z_0 = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, et l'on pose $\mathcal{C} = \mathcal{C}(z_0, R)$.

1.3.1. **(a)** Montrer que $M(z) \in \mathcal{C} \iff z\bar{z} - z_0\bar{z} - z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0 = R^2$.

1.3.2. **(b)** On suppose que $O \in \mathcal{C}^+$. Montrer que $R < r$ et que

$$M(z) \in \mathcal{C} \iff z \neq 0 \text{ et } \left|\frac{1}{z} - \frac{\bar{z}_0}{r^2 - R^2}\right| = \frac{R}{r^2 - R^2}.$$

1.3.3. **(c)** En déduire que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(z_1, R_1)$ en précisant z_1 et R_1, puis vérifier que $O \in \mathcal{C}_1^+$.

1.3.4. **(d)** Montrer que $f(\mathcal{C}^-) = \mathcal{C}_1^- = f(\mathcal{C})^-$.

On pourra utiliser la propriété admise suivante : soit $\mathcal{C}$ un cercle tel que $O \in \mathcal{C}^+$ et $u \neq 0$; le point $M(u)$ appartient à $\mathcal{C}^-$ si, et seulement si, la droite passant par l'origine et par $M(u)$ coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points distincts $M(a)$ et $M(b)$ tels qu'il existe $t \in]0,1[$ vérifiant $u = ta + (1-t)b$.

Commentaire. L'inversion $z \mapsto 1/\bar{z}$ (inversion de centre O et de rapport 1) conserve les droites passant par O et transforme un cercle ne passant pas par O en un cercle, intérieur sur intérieur si O est extérieur au cercle. Plus généralement, elle échange droites et cercles passant par O : c'est l'outil de base de la géométrie anallagmatique.

النسخة العربية

التحويل $M(z) \mapsto M(1/\bar{z})$: صور المستقيمات والدوائر

دورة 2013 ▪ التمرين 1، الجزء 1 (النص الأصلي) ▪ © 2026 سعد شكري

ترميزات. المستوى العقدي $\mathbb{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$؛ من أجل $z \in \mathbb{C}$ نرمز بـ $M(z)$ للنقطة التي لحقها z (وبالتالي $O = M(0)$). نذكر أنه لكل $u, v \in \mathbb{C}$: $\big||u| - |v|\big| \leq |u - v| \leq |u| + |v|$. من أجل $z_0 \in \mathbb{C}$ و$R > 0$ نرمز بـ $\mathcal{C}(z_0, R) = \{M(z) \in \mathbb{P} \mid |z - z_0| = R\}$ للدائرة التي مركزها $M(z_0)$ وشعاعها R؛ تسمى المجموعة $\{M(z) \mid |z - z_0| > R\}$ خارج الدائرة $\mathcal{C}$ ونرمز لها بـ $\mathcal{C}^+$، وتسمى المجموعة $\{M(z) \mid |z - z_0| < R\}$ داخل الدائرة ونرمز لها بـ $\mathcal{C}^-$. من أجل عددين عقديين مختلفين a وb، نرمز بـ $D_{a,b}$ للمستقيم المار من $M(a)$ و$M(b)$.

نعتبر التحويل $f : \mathbb{P} \setminus \{O\} \to \mathbb{P} \setminus \{O\}$ المعرف بـ $f\big(M(z)\big) = M\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right)$.

السؤال (1) بين أن f تقابل وحدد تقابله العكسي.

السؤال (2) ليكن a وb عددين عقديين مختلفين.

(أ) بين أن $M(z) \in D_{a,b} \iff z(\bar{a}-\bar{b}) - \bar{z}(a-b) = b\bar{a} - a\bar{b}$.

(ب) استنتج أنه لكل عدد عقدي غير منعدم u ولكل $z \neq 0$: $M(z) \in D_{u,0} \iff \dfrac{1}{u\bar{z}} - \dfrac{1}{z\bar{u}} = 0$.

(ج) ليكن u عددا عقديا غير منعدم. بين أن $f\big(D_{u,0} \setminus \{O\}\big) = D_{\frac{1}{\bar{u}},0} \setminus \{O\}$.

السؤال (3) ليكن z_0 عددا عقديا غير منعدم و$R > 0$؛ نكتب $z_0 = re^{i\theta}$ مع $r > 0$ و$\theta \in \mathbb{R}$، ونضع $\mathcal{C} = \mathcal{C}(z_0, R)$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ أو الاستعمال دون إذن مسبق من المؤلف

(أ) بين أن $M(z) \in \mathcal{C} \iff z\bar{z} - z_0\bar{z} - z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0 = R^2$.

(ب) نفترض أن $O \in \mathcal{C}^+$. بين أن $R < r$ وأن

$$M(z) \in \mathcal{C} \iff z \neq 0 \text{ و } \left|\frac{1}{z} - \frac{\bar{z}_0}{r^2 - R^2}\right| = \frac{R}{r^2 - R^2}.$$

(ج) استنتج أن $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(z_1, R_1)$ مع تحديد z_1 وR_1، ثم تحقق من أن $O \in \mathcal{C}_1^+$.

(د) بين أن $f(\mathcal{C}^-) = \mathcal{C}_1^- = f(\mathcal{C})^-$.

يمكن استعمال الخاصية المقبولة التالية : لتكن $\mathcal{C}$ دائرة بحيث $O \in \mathcal{C}^+$ و$u \neq 0$؛ تنتمي النقطة $M(u)$ إلى $\mathcal{C}^-$ إذا وفقط إذا كان المستقيم المار من الأصل ومن $M(u)$ يقطع الدائرة $\mathcal{C}$ في نقطتين مختلفتين $M(a)$ و$M(b)$ بحيث يوجد $t \in]0,1[$ يحقق $u = ta + (1-t)b$.

تعليق. التحويل $z \mapsto 1/\bar{z}$ (الانعكاس الذي مركزه O ونسبته 1) يحافظ على المستقيمات المارة من O ويحول دائرة لا تمر من O إلى دائرة، والداخل إلى الداخل إذا كانت O خارج الدائرة. وبصفة أعم، يبادل المستقيمات والدوائر المارة من O : إنه الأداة الأساسية للهندسة الانعكاسية.

Problème 63 — Session 2019

Parties de $\mathbb{C}$ stables par produit et par somme de deux carrés : exemples $(\mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}[j])$

Problème 2, Parties 1 et 2 © 2026 Saad Choukri

Définition 1. Une partie $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}$ *vérifie la propriété* $\mathcal{P}$ si elle est non vide et si

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}, \quad z_1 z_2 \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad z_1^2 + z_2^2 \in \mathcal{A}.$$

Définition 2. Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$. Si l'ensemble $\{z \in \mathcal{A} \mid |z| \leq 1\}$ est fini, son cardinal est noté $\mathcal{C}(\mathcal{A})$; dans le cas contraire, on pose $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = +\infty$.

Partie 1 : premiers exemples

1.1. **Question (1)** Vérifier que les ensembles suivants sont des parties de $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$, et préciser pour chacun d'eux la valeur de $\mathcal{C}(A)$:

(a) $A = \mathbb{N}^*$; (b) $A = \mathbb{Z}$; (c) $A =]1, +\infty[$; (d) $A = \mathbb{C}$.

1.2. **Question (2)** Soit A une partie de $\mathbb{C}$ vérifiant $\mathcal{P}$; on note $\overline{A} = \{\bar{z} \mid z \in A\}$. Montrer que $\overline{A}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ et déterminer $\mathcal{C}(\overline{A})$ en fonction de $\mathcal{C}(A)$.

1.3. **Question (3) Les entiers de Gauss.** On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$; ses éléments sont appelés *entiers de Gauss*.

1.3.1. **(a)** Montrer que pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$, $z_1 + z_2 \in \mathbb{Z}[i]$ et $z_1 z_2 \in \mathbb{Z}[i]$.

1.3.2. **(b)** En déduire que $\mathbb{Z}[i]$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

1.3.3. **(c)** Déterminer tous les couples (a,b) d'entiers relatifs tels que $a^2 + b^2 \leq 1$, puis en déduire que $\mathcal{C}(\mathbb{Z}[i]) = 5$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

1.4. **Question (4) Un autre exemple.** On pose $A_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 \in \mathbb{Z}[i]\}$.

1.4.1. **(a)** Montrer que A_1 vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

1.4.2. **(b)** Pour $\alpha \in \{-1, 0, 1, i, -i\}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \alpha$, puis déterminer la valeur de $\mathcal{C}(A_1)$.

Partie 2 : étude de trois autres exemples

On considère $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\mathbb{Z}[j] = \{a + bj \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

2.1. **Question (5) Premier exemple.**

2.1.1. **(a)** Calculer j^3 et en déduire la valeur de $1 + j + j^2$.

2.1.2. **(b)** Montrer que pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[j]$, $z_1 + z_2 \in \mathbb{Z}[j]$ et $z_1 z_2 \in \mathbb{Z}[j]$.

2.1.3. **(c)** En déduire que $\mathbb{Z}[j]$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

2.1.4. **(d)** Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (a, b) vérifiant $(2a-b)^2+3b^2 \leq 4$, puis en déduire que $\mathcal{C}(\mathbb{Z}[j]) = 7$.

2.2. **Question (6) Deuxième exemple.** On considère $\mathbb{Z}[j]^* = \mathbb{Z}[j] \setminus \{0\}$.

2.2.1. **(a)** Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[j]$. Montrer que si $z_1^2 + z_2^2 = 0$, alors $z_1 = z_2 = 0$. *On pourra factoriser $z_1^2 + z_2^2$ et remarquer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.*

2.2.2. **(b)** Montrer que $\mathbb{Z}[j]^*$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

2.3. **Question (7) Troisième exemple.** On pose $A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 \in \mathbb{Z}[j]\}$. Montrer que A_2 vérifie la propriété $\mathcal{P}$, puis, pour tout $\beta \in \{0, \pm 1, \pm j, \pm j^2\}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \beta$ et déterminer la valeur de $\mathcal{C}(A_2)$.

N.B. : dans l'original, l'exemple (c) est écrit « $\{1, +\infty\}$ » (il s'agit de l'intervalle $]1, +\infty[$), la liste de 1.4.2 omet $-i$ (nécessaire pour obtenir $\mathcal{C}(A_1) = 9$), et l'ensemble A_2 de la question 2.2.3 n'est pas défini ; on l'a défini par analogie avec A_1 (on trouve $\mathcal{C}(A_2) = 13$). Remarquons que $\{z \mid z^2 \in \mathbb{Z}[j]^*\}$ ne vérifie pas $\mathcal{P}$ puisque $i^2 + 1^2 = 0$.

Commentaire. On obtient $\mathcal{C}(]1, +\infty[) = 0$, $\mathcal{C}(\mathbb{N}^*) = 1$, $\mathcal{C}(\mathbb{Z}) = 3$, $\mathcal{C}(\mathbb{Z}[i]) = 5$, $\mathcal{C}(\mathbb{Z}[j]) = 7$, $\mathcal{C}(A_1) = 9$ et $\mathcal{C}(A_2) = 13$, $\mathcal{C}(\mathbb{C}) = +\infty$. Les entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$ et d'Eisenstein $\mathbb{Z}[j]$ sont les deux anneaux d'entiers quadratiques imaginaires possédant le plus d'unités (4 et 6).

النسخة العربية

أجزاء من $\mathbb{C}$ مستقرة بالجداء وبمجموع مربعين : أمثلة ($\mathbb{Z}[i]$ و $\mathbb{Z}[j]$)

دورة 2019 ▪ المسألة 2، الجزءان 1 و2g ▪ © 2026 سعد شكري

تعريف 1. نقول إن جزءا $\mathcal{A}$ من $\mathbb{C}$ يحقق الخاصية $\mathcal{P}$ إذا كان غير فارغ و

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}, \quad z_1 z_2 \in \mathcal{A} \quad \text{و} \quad z_1^2 + z_2^2 \in \mathcal{A}.$$

تعريف 2. ليكن $\mathcal{A}$ جزءا من $\mathbb{C}$ يحقق الخاصية $\mathcal{P}$. إذا كانت المجموعة $\{z \in \mathcal{A} \mid |z| \leq 1\}$ منتهية نرمز لرئيسيها بـ $\mathcal{C}(\mathcal{A})$؛ وفي الحالة المعاكسة نضع $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = +\infty$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri

الجزء 1 : أمثلة أولى

السؤال (1) تحقق من أن المجموعات التالية أجزاء من $\mathbb{C}$ تحقق الخاصية $\mathcal{P}$، وحدد لكل منها قيمة $\mathcal{C}(A)$:

(a) $A=\mathbb{N}^*$; (b) $A=\mathbb{Z}$; (c) $A=]1,+\infty[$; (d) $A=\mathbb{C}$.

السؤال (2) ليكن A جزءا من $\mathbb{C}$ يحقق $\mathcal{P}$؛ نرمز بـ $\overline{A}=\{\bar{z}\mid z\in A\}$. بين أن $\overline{A}$ يحقق الخاصية $\mathcal{P}$ وحدد $\mathcal{C}(\overline{A})$ بدلالة $\mathcal{C}(A)$.

السؤال (3) **أعداد غاوس الصحيحة.** نرمز بـ $\mathbb{Z}[i]=\{a+ib\mid (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$؛ تسمى عناصره أعداد غاوس الصحيحة.

(أ) بين أنه لكل $z_1,z_2\in\mathbb{Z}[i]$: $z_1+z_2\in\mathbb{Z}[i]$ و$z_1z_2\in\mathbb{Z}[i]$.

(ب) استنتج أن $\mathbb{Z}[i]$ يحقق الخاصية $\mathcal{P}$.

(ج) حدد جميع الأزواج (a,b) من الأعداد الصحيحة النسبية بحيث $a^2+b^2\leq 1$، ثم استنتج أن $\mathcal{C}(\mathbb{Z}[i])=5$.

السؤال (4) **مثال آخر.** نضع $A_1=\{z\in\mathbb{C}\mid z^2\in\mathbb{Z}[i]\}$.

(أ) بين أن A_1 يحقق الخاصية $\mathcal{P}$.

(ب) من أجل $\alpha\in\{-1,0,1,i,-i\}$، حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2=\alpha$، ثم حدد قيمة $\mathcal{C}(A_1)$.

الجزء 2 : دراسة ثلاثة أمثلة أخرى

نعتبر $j=\exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و$\mathbb{Z}[j]=\{a+bj\mid (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$.

السؤال (5) **المثال الأول.**

(أ) احسب j^3 واستنتج قيمة $1+j+j^2$.

(ب) بين أنه لكل $z_1,z_2\in\mathbb{Z}[j]$: $z_1+z_2\in\mathbb{Z}[j]$ و$z_1z_2\in\mathbb{Z}[j]$.

(ج) استنتج أن $\mathbb{Z}[j]$ يحقق الخاصية $\mathcal{P}$.

(د) حدد جميع الأزواج (a,b) من الأعداد الصحيحة النسبية التي تحقق $(2a-b)^2+3b^2\leq 4$، ثم استنتج أن $\mathcal{C}(\mathbb{Z}[j])=7$.

السؤال (6) **المثال الثاني.** نعتبر $\mathbb{Z}[j]^*=\mathbb{Z}[j]\setminus\{0\}$.

(أ) ليكن $z_1,z_2\in\mathbb{Z}[j]$. بين أنه إذا كان $z_1^2+z_2^2=0$ فإن $z_1=z_2=0$. يمكن تعميل $z_1^2+z_2^2$ وملاحظة أن $\sqrt{3}$ عدد لاجذري.

(ب) بين أن $\mathbb{Z}[j]^*$ يحقق الخاصية $\mathcal{P}$.

السؤال (7) **المثال الثالث.** نضع $A_2=\{z\in\mathbb{C}\mid z^2\in\mathbb{Z}[j]\}$. بين أن A_2 يحقق الخاصية $\mathcal{P}$، ثم من أجل كل $\beta\in\{0,\pm1,\pm j,\pm j^2\}$ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2=\beta$ وحدد قيمة $\mathcal{C}(A_2)$.

ملاحظة : في الأصل كتب المثال (c) على الشكل « $\{1,+\infty\}$ » (والمقصود المجال $]1,+\infty[$)، وتغفل لائحة 1.4.2 العدد $-i$ (الضروري للحصول على $\mathcal{C}(A_1)=9$)، والمجموعة A_2 في السؤال 2.2.3 غير معرفة؛ وقد عرفناها قياسا على A_1 (نجد $\mathcal{C}(A_2)=13$). ونلاحظ أن $\{z\mid z^2\in\mathbb{Z}[j]^*\}$ لا تحقق $\mathcal{P}$ لأن $i^2+1^2=0$.

تعليق. نحصل على $\mathcal{C}(]1,+\infty[)=0$ و$\mathcal{C}(\mathbb{N}^*)=1$ و$\mathcal{C}(\mathbb{Z})=3$ و$\mathcal{C}(\mathbb{Z}[i])=5$ و$\mathcal{C}(\mathbb{Z}[j])=7$ و$\mathcal{C}(A_1)=9$ و$\mathcal{C}(A_2)=13$ و$\mathcal{C}(\mathbb{C})=+\infty$. أعداد غاوس الصحيحة $\mathbb{Z}[i]$ وأعداد آيزنشتاين $\mathbb{Z}[j]$ هما حلقتا الأعداد الصحيحة التربيعية التخيلية الأكثر وحدات (4 و6).

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri

Problème 64 — Session 2019

Valeurs possibles du nombre $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ pour une partie stable de $\mathbb{C}$

Problème 2, Partie 3 © 2026 Saad Choukri

Définitions. Une partie non vide $\mathcal{A}$ de $\mathbb{C}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si pour tous $z_1, z_2 \in \mathcal{A}$, $z_1 z_2 \in \mathcal{A}$ et $z_1^2 + z_2^2 \in \mathcal{A}$. On note $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ le cardinal de $\{z \in \mathcal{A} \mid |z| \leq 1\}$ s'il est fini, et $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = +\infty$ sinon.

Exemples (établis dans les parties précédentes du sujet) : $\mathcal{C}(]1, +\infty[) = 0, \mathcal{C}(\mathbb{N}^*) = 1, \mathcal{C}(\mathbb{Z}) = 3, \mathcal{C}(\mathbb{Z}[i]) = 5$, $\mathcal{C}(\mathbb{Z}[j]) = 7$ *avec* $j = e^{2i\pi/3}$, $\mathcal{C}(\{z \mid z^2 \in \mathbb{Z}[i]\}) = 9, \mathcal{C}(\mathbb{C}) = +\infty$.

Dans ce problème, A désigne une partie de $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$; on cherche les valeurs possibles de $\mathcal{C}(A)$.

3.1. **Question (1)** On suppose qu'il existe $a \in A$ tel que $0 < |a| < 1$.

3.1.1. **(a)** Montrer que pour tous entiers naturels $n \neq m$, $a^n \neq a^m$.

3.1.2. **(b)** Montrer alors que $\mathcal{C}(A) = +\infty$.

3.2. **Question (2)** **Quelques résultats utiles.** On considère un réel $\theta \in]-\pi, \pi[$ qui n'est ni de la forme $k\pi/6$, ni de la forme $k\pi/4$ ($k \in \mathbb{Z}$), et l'on pose $b = e^{i\theta}$. On remarquera que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $|b^{2p} + b^{4p}| = 2|\cos(p\theta)|$.

3.2.1. **(a)** Si $\theta \in]\pi/3, 2\pi/3[$, montrer que $0 < |b^2 + b^4| < 1$.

3.2.2. **(b)** Si $\theta \in]\pi/6, \pi/3[\cup]2\pi/3, 5\pi/6[$, montrer que $0 < |b^4 + b^8| < 1$.

3.2.3. **(c)** Si $\theta \in]0, \pi/6[$, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\theta \in]\pi/3, \pi/2[$, et en déduire que $0 < |b^{2n} + b^{4n}| < 1$.

3.2.4. **(d)** Si $\theta \in]-\pi/3, 0[$, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < |b^{2n} + b^{4n}| < 1$. *On pourra opérer une conjugaison.*

3.2.5. **(e)** Étudier les cas restants et montrer qu'il existe toujours $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < |b^{2p} + b^{4p}| < 1$.

3.3. **Question (3)** On suppose dans cette question que $\mathcal{C}(A)$ est fini et que $\mathcal{C}(A) \geq 2$.

3.3.1. **(a)** Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $|a| = 1$. Un tel a étant choisi, on l'écrit $a = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi]$.

3.3.2. **(b)** Montrer que θ est un multiple de $\pi/4$ ou de $\pi/6$.

3.3.3. **(c)** En déduire que $\mathcal{C}(A) \leq 17$.

3.4. **Question (4)** Quelles sont les valeurs possibles de $\mathcal{C}(A)$?

N.B. : l'original énonce 3.2.2 pour $\theta \in]\pi/6, 5\pi/6[$, ce qui est faux (pour θ proche de $\pi/2$, $|b^4 + b^8| = 2|\cos 2\theta|$ est proche de 2) ; l'intervalle a été restreint. En 3.2.3, « $n\theta \notin$ » a été corrigé en « $n\theta \in$ », et en 3.3 l'hypothèse « $\mathcal{C}(A) = 2$ » en « $\mathcal{C}(A) \geq 2$ ».

Commentaire. Une partie stable contenant un élément de module strictement compris entre 0 et 1 a une infinité d'éléments dans le disque unité. Sinon, les éléments de module 1 sont des racines de l'unité d'ordre divisant 8 ou 12, ce qui limite $\mathcal{C}(A)$ à au plus 17 (le point 0 et les 16 racines de l'unité d'ordre 8 ou 12 réunies, au plus).

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

النسخة العربية

القيم الممكنة للعدد $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ لجزء مستقر من $\mathbb{C}$

دورة 2019 ▪ المسألة 2، الجزء 3 ▪ 2026 © سعد شكري

تعاريف. يحقق جزء غير فارغ $\mathcal{A}$ من $\mathbb{C}$ الخاصية $\mathcal{P}$ إذا كان لكل $z_1, z_2 \in \mathcal{A}$: $z_1z_2 \in \mathcal{A}$ و $z_1^2 + z_2^2 \in \mathcal{A}$. نرمز بـ $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ لرئيسي $\{z \in \mathcal{A} \mid |z| \leq 1\}$ إذا كان منتهيا، و $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = +\infty$ في الحالة المعاكسة.

أمثلة (أثبتت في الأجزاء السابقة من الموضوع): $\mathcal{C}(]1, +\infty[) = 0$، $\mathcal{C}(\mathbb{N}^*) = 1$، $\mathcal{C}(\mathbb{Z}) = 3$، $\mathcal{C}(\mathbb{Z}[i]) = 5$، $\mathcal{C}(\mathbb{Z}[j]) = 7$ مع $j = e^{2i\pi/3}$، $\mathcal{C}(\{z \mid z^2 \in \mathbb{Z}[i]\}) = 9$، $\mathcal{C}(\mathbb{C}) = +\infty$.

في هذه المسألة يرمز A لجزء من $\mathbb{C}$ يحقق الخاصية $\mathcal{P}$؛ نبحث عن القيم الممكنة لـ $\mathcal{C}(A)$.

السؤال (1) نفترض أنه يوجد $a \in A$ بحيث $0 < |a| < 1$.

(أ) بين أنه لكل عددين صحيحين طبيعيين $n \neq m$: $a^n \neq a^m$.

(ب) بين إذن أن $\mathcal{C}(A) = +\infty$.

السؤال (2) **بعض النتائج المفيدة.** نعتبر عددا حقيقيا $\theta \in]-\pi, \pi[$ ليس على الشكل $k\pi/6$ ولا على الشكل $k\pi/4$ ($k \in \mathbb{Z}$)، ونضع $b = e^{i\theta}$. نلاحظ أنه لكل $p \in \mathbb{N}^*$: $|b^{2p} + b^{4p}| = 2|\cos(p\theta)|$.

(أ) إذا كان $\theta \in]\pi/3, 2\pi/3[$، بين أن $0 < |b^2 + b^4| < 1$.

(ب) إذا كان $\theta \in]\pi/6, \pi/3[\cup]2\pi/3, 5\pi/6[$، بين أن $0 < |b^4 + b^8| < 1$.

(ج) إذا كان $\theta \in]0, \pi/6[$، بين أنه يوجد $n \in \mathbb{N}^*$ بحيث $n\theta \in]\pi/3, \pi/2[$، واستنتج أن $0 < |b^{2n} + b^{4n}| < 1$.

(د) إذا كان $\theta \in]-\pi/3, 0[$، بين أنه يوجد $n \in \mathbb{N}^*$ بحيث $0 < |b^{2n} + b^{4n}| < 1$. يمكن استعمال المرافق.

(هـ) ادرس الحالات المتبقية وبين أنه يوجد دائما $p \in \mathbb{N}^*$ بحيث $0 < |b^{2p} + b^{4p}| < 1$.

السؤال (3) نفترض في هذا السؤال أن $\mathcal{C}(A)$ منته وأن $\mathcal{C}(A) \geq 2$.

(أ) بين أنه يوجد $a \in A$ بحيث $|a| = 1$. بعد اختيار مثل هذا العنصر a نكتبه $a = e^{i\theta}$ مع $\theta \in]-\pi, \pi]$.

(ب) بين أن θ مضاعف لـ $\pi/4$ أو لـ $\pi/6$.

(ج) استنتج أن $\mathcal{C}(A) \leq 17$.

السؤال (4) ما هي القيم الممكنة لـ $\mathcal{C}(A)$؟

ملاحظة : يعطي الأصل 3.2.2 من أجل $\theta \in]\pi/6, 5\pi/6[$، وهذا خاطئ (من أجل θ قريب من $\pi/2$ يكون $|b^4 + b^8| = 2|\cos 2\theta|$ قريبا من 2)؛ فتم تضييق المجال. وفي 3.2.3 صححت «$n\theta \notin$» إلى «$n\theta \in$»، وفي 3.3 صححت الفرضية «$\mathcal{C}(A) = 2$» إلى «$\mathcal{C}(A) \geq 2$».

تعليق. الجزء المستقر الذي يحتوي على عنصر معياره محصور قطعا بين 0 و1 له عدد لا منته من العناصر في القرص الوحدة. وإلا فإن العناصر ذات المعيار 1 جذور للوحدة رتبتها تقسم 8 أو 12، مما يحصر $\mathcal{C}(A)$ في 17 على الأكثر (النقطة 0 وعلى الأكثر 16 جذرا للوحدة من الرتبة 8 أو 12 مجتمعة).

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

VIII

Structures algébriques

Problème 65 — Session 2016

L'opérateur de différence $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ et les polynômes

Problème, Partie 1 © 2026 Saad Choukri

Notations. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, avec $\binom{r}{k} = 0$ si $k > r$. On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, et $\Delta : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ l'application qui à f associe la fonction $\Delta(f)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

On pose $\Delta^1 = \Delta$ et, pour tout entier $n \geq 2$, $\Delta^n(f) = \Delta\big(\Delta^{n-1}(f)\big)$. On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales réelles et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1.1. **Question (1)** Soient $f \in \mathscr{F}$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\Delta^2(f)(x)$ en fonction de $f(x)$, $f(x+1)$ et $f(x+2)$.

1.2. **Question (2)** Soient $f \in \mathscr{F}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\Delta^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k). \tag{2}$$

Indication : utiliser la formule de Pascal $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$, $1 \leq k \leq n-1$.

1.3. **Question (3)** Soit $P \in \mathscr{P}$ de degré $n \geq 1$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

1.3.1. **(a)** Montrer que $\Delta(P)$ est une fonction polynomiale de degré $n-1$, en identifiant son coefficient dominant.

1.3.2. **(b)** Déterminer le degré de la fonction polynomiale $\Delta^n(P)$, puis montrer que $\Delta^{n+1}(P) = 0$.

1.4. **Question (4)** Soit $P \in \mathscr{P}_{r-1}$, où $r \geq 2$. Montrer que $\Delta^r(P) = 0$, puis en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x+r) = \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^{r-1-k} \binom{r}{k} P(x+k). \tag{3}$$

1.5. **Question (5)** Soit $m \geq 1$ un entier. Déduire de 1.3.1 que $\Delta(\mathscr{P}_m) \subset \mathscr{P}_{m-1}$.

On veut démontrer l'inclusion réciproque $\mathscr{P}_{m-1} \subset \Delta(\mathscr{P}_m)$. Pour cela, on considère un polynôme $B \in \mathscr{P}_{m-1}$ donné, $B(x) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k$.

1.5.1. **(a)** Soit $A \in \mathscr{P}_m$, $A(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$. Démontrer l'équivalence

$$\Delta(A) = B \iff \forall r \in \{0, \dots, m-1\}, \quad b_r = \sum_{k=r+1}^{m} a_k \binom{k}{r}. \tag{4}$$

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

1.5.2. **(b)** On suppose ici que $m = 3$. Montrer que le système (4), d'inconnues (a_1, a_2, a_3), admet une unique solution.

1.5.3. **(c)** Montrer que $B \in \Delta(\mathscr{P}_m)$. *Indication : on peut montrer par récurrence que le système (4), d'inconnues $(a_1, \dots, a_m)$, admet une unique solution, en identifiant d'abord la valeur de a_m.*

1.6. **Question (6)** Soient $m \geq 1$ un entier et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrer que

$$\forall Q \in \mathscr{P}_m,\ \exists S \in \mathscr{P}_m,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad Q(x) = \alpha S(x+1) - S(x).$$

Indication : on peut utiliser la méthode de la question 1.5.1.

N.B. : l'original définit $\mathscr{F}$ comme l'ensemble des fonctions *bornées* sur $\mathbb{R}$, ce qui exclut les polynômes non constants ; on prend ici toutes les fonctions réelles. En 1.5, l'inclusion correcte est $\Delta(\mathscr{P}_m) \subset \mathscr{P}_{m-1}$ (l'original écrit $\mathscr{P}_m$).

Commentaire. L'opérateur de différence Δ envoie $\mathscr{P}_m$ sur $\mathscr{P}_{m-1}$ et diminue le degré de 1, comme la dérivation ; d'où $\Delta^{n+1}P = 0$ pour $\deg P = n$. C'est la base du calcul des différences finies et de la formule de Newton : $P(x+r)$ s'exprime à l'aide de $P(x), \dots, P(x+r-1)$.

النسخة العربية

مؤثر الفروق $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ والحدوديات

دورة 2016 ▪ المسألة، الجزء 1 ▪ 2026 © سعد شكري

ترميزات. من أجل $n \in \mathbb{N}$ و$k \in \{0, \dots, n\}$: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$، مع $\binom{r}{k} = 0$ إذا كان $k > r$. نرمز بـ $\mathscr{F}$ لمجموعة الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ وقيمها حقيقية، وبـ $\Delta : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ للتطبيق الذي يربط f بالدالة $\Delta(f)$ المعرفة بـ

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

نضع $\Delta^1 = \Delta$، ولكل عدد صحيح $n \geq 2$: $\Delta^n(f) = \Delta\big(\Delta^{n-1}(f)\big)$. نرمز بـ $\mathscr{P}$ لمجموعة الدوال الحدودية الحقيقية، ومن أجل $n \in \mathbb{N}$ بـ $\mathscr{P}_n$ لمجموعة الحدوديات التي درجتها أصغر من أو تساوي n.

السؤال (1) لتكن $f \in \mathscr{F}$ و$x \in \mathbb{R}$. احسب $\Delta^2(f)(x)$ بدلالة $f(x)$ و$f(x+1)$ و$f(x+2)$.

السؤال (2) لتكن $f \in \mathscr{F}$ و$x \in \mathbb{R}$. بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 1$:

$$\Delta^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k). \tag{2}$$

إرشاد : استعمل صيغة باسكال $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$، $1 \leq k \leq n-1$.

السؤال (3) لتكن $P \in \mathscr{P}$ درجتها $n \geq 1$، $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

(أ) بين أن $\Delta(P)$ دالة حدودية درجتها $n-1$، مع تحديد معاملها الرئيسي.

(ب) حدد درجة الدالة الحدودية $\Delta^n(P)$، ثم بين أن $\Delta^{n+1}(P) = 0$.

السؤال (4) لتكن $P \in \mathscr{P}_{r-1}$ حيث $r \geq 2$. بين أن $\Delta^r(P) = 0$، ثم استنتج أنه لكل $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x+r) = \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^{r-1-k} \binom{r}{k} P(x+k). \tag{3}$$

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

السؤال (5) ليكن $m \geq 1$ عددا صحيحا. استنتج من 1.3.1 أن $\Delta(\mathscr{P}_m) \subset \mathscr{P}_{m-1}$.
نريد إثبات الاحتواء العكسي $\mathscr{P}_{m-1} \subset \Delta(\mathscr{P}_m)$. لذلك نعتبر حدودية معطاة $B \in \mathscr{P}_{m-1}$، $B(x) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k$.

(أ) لتكن $A \in \mathscr{P}_m$، $A(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$. برهن التكافؤ

$$\Delta(A) = B \iff \forall r \in \{0, \dots, m-1\}, \quad b_r = \sum_{k=r+1}^{m} a_k \binom{k}{r}. \tag{4}$$

(ب) نفترض هنا أن $m = 3$. بين أن النظمة (4) ذات المجاهيل (a_1, a_2, a_3) تقبل حلا وحيدا.

(ج) بين أن $B \in \Delta(\mathscr{P}_m)$. إرشاد : يمكن أن نبين بالترجع أن النظمة (4) ذات المجاهيل $(a_1, \dots, a_m)$ تقبل حلا وحيدا، بتحديد قيمة a_m أولا.

السؤال (6) ليكن $m \geq 1$ عددا صحيحا و$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. بين أن

$$\forall Q \in \mathscr{P}_m, \exists S \in \mathscr{P}_m, \forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \alpha S(x+1) - S(x).$$

إرشاد : يمكن استعمال طريقة السؤال 1.5.1.

ملاحظة : يعرف الأصل $\mathscr{F}$ بأنها مجموعة الدوال المحدودة على $\mathbb{R}$، مما يقصي الحدوديات غير الثابتة؛ ونأخذ هنا جميع الدوال الحقيقية. وفي 1.5 الاحتواء الصحيح هو $\Delta(\mathscr{P}_m) \subset \mathscr{P}_{m-1}$ (يكتب الأصل $\mathscr{P}_m$).

تعليق. يرسل مؤثر الفروق Δ المجموعة $\mathscr{P}_m$ على $\mathscr{P}_{m-1}$ وينقص الدرجة بـ 1، مثل الاشتقاق؛ ومن هنا $\Delta^{n+1} P = 0$ من أجل $\deg P = n$. هذا هو أساس حساب الفروق المنتهية وصيغة نيوتن : يعبر عن $P(x+r)$ بواسطة $P(x), \dots, P(x+r-1)$.

Problème 66 — Session 2012

Applications linéaires du plan qui conservent $\mathbb{Z}^2$: le groupe $\mathcal{L}(\mathbb{Z}^2)$

Définitions et Partie 1 (traduit de l'arabe) © 2026 Saad Choukri

Définitions et notations. On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ réels, et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des applications linéaires $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire des applications pour lesquelles il existe des réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (\alpha x + \beta y,\ \gamma x + \delta y).$$

À tout $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ de cette forme on associe la matrice $M(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$; inversement, à toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on associe l'application linéaire f_A définie par la formule ci-dessus. La transposée de A est ${}^tA = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ et son déterminant est $\det A = \alpha\delta - \gamma\beta$. On rappelle la formule du produit matriciel

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma' & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{pmatrix},$$

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 سعد شكري • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ دون إذن المؤلف

opération non commutative, d'élément neutre $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Une matrice A est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_2$; une telle matrice B est unique, notée A^{-1}.

Résultats admis. Pour $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\det(AB) = \det A \det B$ et ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$; A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$, et alors $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$; si A et B sont inversibles, AB l'est aussi et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Dans toute la suite, f et g sont deux éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définis par $f(x,y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ et $g(x,y) = (\alpha' x + \beta' y, \gamma' x + \delta' y)$, et $\circ$ désigne la composition des applications.

1.1. **Question (1)** Soit λ un réel.

1.1.1. **(a)** Montrer que λf, $f+g$ et $f \circ g$ sont des éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, et que $M(\lambda f) = \lambda M(f)$, $M(f+g) = M(f) + M(g)$ et $M(f \circ g) = M(f)M(g)$.

1.1.2. **(b)** Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, $\det M(f) \neq 0$. Montrer que, dans ce cas, la bijection réciproque f^{-1} est aussi linéaire ; donner l'expression de $f^{-1}(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, et la relation entre $M(f)$ et $M(f^{-1})$.

1.2. **Question (2)** Soient $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ et λ, η deux réels. Montrer que $f(\lambda e_1 + \eta e_2) = \lambda f(e_1) + \eta f(e_2)$.

1.3. **Question (3)** L'objectif est de démontrer que $f(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$ si, et seulement si, les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers relatifs et $\det M(f) = \pm 1$.

1.3.1. **(a)** On suppose que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers et que $\det M(f) = \pm 1$. Montrer que $f(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$.

1.3.2. **(b)** Réciproquement, on suppose que $f(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$.

(i) **(i)** Montrer que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers, et en déduire que $\det M(f)$ est un entier relatif.

(ii) **(ii)** Montrer qu'il existe $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}^2$ tels que $f(u_1) = (1,0)$ et $f(u_2) = (0,1)$, puis que la famille (u_1, u_2) est une base du plan vectoriel $\mathbb{R}^2$.

(iii) **(iii)** Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et que sa réciproque vérifie aussi $f^{-1}(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$.

(iv) **(iv)** Montrer que $\det M(f) = \pm 1$.

1.4. **Question (4)** On note $\mathcal{L}(\mathbb{Z}^2)$ l'ensemble des applications linéaires $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telles que $f(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$, et $\mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)$ l'ensemble des $f \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}^2)$ telles que $\det M(f) = 1$. Montrer que $(\mathcal{L}(\mathbb{Z}^2), \circ)$ est un groupe et que $(\mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2), \circ)$ en est un sous-groupe.

N.B. : la numérotation de l'original (1.1.1, 2.1.1, 2.1, 3.1, ...) est désordonnée ; elle a été remise en ordre.

Commentaire. Une application linéaire f vérifie $f(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$ si et seulement si sa matrice est à coefficients entiers de déterminant ± 1 : c'est le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, dont $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (déterminant 1) est un sous-groupe. Ces groupes agissent sur les formes quadratiques entières, ce qui sert dans les deux problèmes suivants du sujet 2012.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

النسخة العربية

التطبيقات الخطية للمستوى التي تحافظ على $\mathbb{Z}^2$: الزمرة $\mathcal{L}(\mathbb{Z}^2)$

دورة 2012 ▪ التعاريف والجزء 1 (النص الأصلي) ▪ 2026 © سعد شكري

تعاريف وترميزات. نرمز بـ $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لمجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2، $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ مع $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ أعداد حقيقية، وبـ $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ لمجموعة التطبيقات الخطية $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$، أي التطبيقات التي توجد من أجلها أعداد حقيقية $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ بحيث

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (\alpha x + \beta y,\ \gamma x + \delta y).$$

نربط كل $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ من هذا الشكل بالمصفوفة $M(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$؛ وعكسيا نربط كل مصفوفة A من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بالتطبيق الخطي f_A المعرف بالصيغة أعلاه. منقولة A هي ${}^tA = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ ومحددتها $\det A = \alpha\delta - \gamma\beta$. نذكر بصيغة جداء المصفوفات

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma' & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{pmatrix},$$

وهو عملية غير تبادلية، عنصرها المحايد $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. تكون مصفوفة A قابلة للقلب إذا وجدت $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بحيث $AB = BA = I_2$؛ ومثل هذه المصفوفة B وحيدة، ونرمز لها بـ A^{-1}.

نتائج مقبولة. من أجل $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\det(AB) = \det A \det B$ و ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$؛ تكون A قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان $\det A \neq 0$، وعندئذ $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$؛ إذا كانت A وB قابلتين للقلب فإن AB كذلك و$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

فيما يلي، f وg عنصران من $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ معرفان بـ $f(x, y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ و$g(x, y) = (\alpha' x + \beta' y, \gamma' x + \delta' y)$، و$\circ$ يرمز لتركيب التطبيقات.

السؤال (1) ليكن λ عددا حقيقيا.

(أ) بين أن λf و$f + g$ و$f \circ g$ عناصر من $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$، وأن $M(\lambda f) = \lambda M(f)$ و$M(f + g) = M(f) + M(g)$ و$M(f \circ g) = M(f)M(g)$.

(ب) بين أن f تقابل من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^2$ إذا وفقط إذا كان $\det M(f) \neq 0$. بين أنه في هذه الحالة يكون التقابل العكسي f^{-1} خطيا أيضا؛ أعط تعبير $f^{-1}(x, y)$ لكل $(x, y) \in \mathbb{R}^2$، والعلاقة بين $M(f)$ و$M(f^{-1})$.

السؤال (2) ليكن $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ وλ, η عددين حقيقيين. بين أن $f(\lambda e_1 + \eta e_2) = \lambda f(e_1) + \eta f(e_2)$.

السؤال (3) الهدف هو إثبات أن $f(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$ إذا وفقط إذا كانت الأعداد $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ صحيحة نسبية و$\det M(f) = \pm 1$.

(أ) نفترض أن $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ أعداد صحيحة وأن $\det M(f) = \pm 1$. بين أن $f(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$.

(ب) عكسيا، نفترض أن $f(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$.

(i) بين أن $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ أعداد صحيحة، واستنتج أن $\det M(f)$ عدد صحيح نسبي.

(ii) بين أنه يوجد $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}^2$ بحيث $f(u_1) = (1, 0)$ و$f(u_2) = (0, 1)$، ثم أن الأسرة (u_1, u_2) أساس للمستوى المتجهي $\mathbb{R}^2$.

(iii) بين أن f تقابل من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^2$ وأن تقابله العكسي يحقق أيضا $f^{-1}(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$.

(iv) بين أن $\det M(f) = \pm 1$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri • جميع الحقوق محفوظة • يمنع النسخ أو الإقتباس دون إذن مسبق من المؤلف

السؤال (4) نرمز بـ $\mathcal{L}(\mathbb{Z}^2)$ لمجموعة التطبيقات الخطية $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ بحيث $f(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$، وبـ $\mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2)$ لمجموعة العناصر $f \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}^2)$ بحيث $\det M(f) = 1$. بين أن $(\mathcal{L}(\mathbb{Z}^2), \circ)$ زمرة وأن $(\mathcal{L}^+(\mathbb{Z}^2), \circ)$ زمرة جزئية منها.

ملاحظة : ترقيم الأصل (1.1.1، 2.1.1، 2.1، 3.1، ...) غير مرتب؛ وقد أعيد ترتيبه.

تعليق. يحقق تطبيق خطي f المتساوية $f(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$ إذا وفقط إذا كانت معاملات مصفوفته صحيحة ومحددتها ± 1 : إنها الزمرة $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$، و$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (المحددة 1) زمرة جزئية منها. وتؤثر هاتان الزمرتان على الصيغ التربيعية الصحيحة، وهذا ما يستعمل في المسألتين المواليتين من موضوع 2012.

Problème 67 — Session 2016

Suites récurrentes linéaires à coefficients constants

Problème, Parties 2, 3 et 4 © 2026 Saad Choukri

Notations. $\mathscr{P}$ désigne l'ensemble des fonctions polynomiales réelles et $\mathscr{P}_n$ celui des polynômes de degré au plus n ; $\binom{n}{k}$ est le coefficient binomial. À tout polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{r} p_k x^k$ de degré $r \geq 1$, on associe l'ensemble $\mathscr{U}_P$ des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{r} p_k u_{n+k} = 0. \tag{$\mathcal{E}_P$}$$

Lorsque $P(x) = x^r - \sum_{q=0}^{r-1} a_q x^q$ est unitaire, $(\mathcal{E}_P)$ s'écrit $u_{n+r} = \sum_{q=0}^{r-1} a_q u_{n+q}$. Le but est de déterminer une expression générale des éléments de $\mathscr{U}_P$ à l'aide des racines de P.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). Pour $\Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$: si $P \in \mathscr{P}_{r-1}$ ($r \geq 2$), alors $P(x+r) = \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^{r-1-k} \binom{r}{k} P(x+k)$ pour tout réel x ; pour $m \geq 1$, $\Delta(\mathscr{P}_m) = \mathscr{P}_{m-1}$; pour $\alpha \neq 1$ et $Q \in \mathscr{P}_m$, il existe $S \in \mathscr{P}_m$ tel que $Q(x) = \alpha S(x+1) - S(x)$ pour tout x.

Partie 2 : étude de l'ensemble $\mathscr{U}_P$ dans le cas $P(x) = (x-1)^r$, $r \geq 2$

Soit $r \geq 2$; on note $P_r(x) = (x-1)^r$.

2.1. **Question (1)** Montrer qu'une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathscr{U}_{P_r}$ si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+r} = \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^{r-1-k} \binom{r}{k} u_{n+k}$.

2.2. **Question (2)** Soit $Q \in \mathscr{P}_{r-1}$. Montrer que la suite $(Q(k))_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathscr{U}_{P_r}$.

2.3. **Question (3)** Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{U}_{P_r}$. On définit $Q_u(x) = \sum_{k=0}^{r-1} u_k L_k(x)$, où pour $k \in \{0, \ldots, r-1\}$, $L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{r-1} \frac{x-j}{k-j}$.

2.3.1. **(a)** Soit $k \in \{0, \ldots, r-1\}$. Montrer que L_k est un polynôme de degré $r-1$ et que pour tout $i \in \{0, \ldots, r-1\}$, $L_k(i) = 1$ si $i = k$ et $L_k(i) = 0$ si $i \neq k$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

2.3.2. **(b)** Vérifier que pour tout $i \in \{0, \dots, r-1\}$, $Q_u(i) = u_i$.

2.3.3. **(c)** Montrer que $Q_u \in \mathscr{P}_{r-1}$ et que $Q_u(k) = u_k$ pour tout entier naturel k.

2.4. **Question (4)** Montrer que $\mathscr{U}_{P_r} = \{(Q(k))_{k\in\mathbb{N}} \mid Q \in \mathscr{P}_{r-1}\}$.

Partie 3 : étude de l'ensemble $\mathscr{U}_P$ dans le cas général

3.1. **Question (5)** **Premier cas :** $P(x) = x - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathscr{U}_P$ est constitué des suites géométriques de raison λ : $\mathscr{U}_P = \{(a\lambda^k)_{k\in\mathbb{N}} \mid a \in \mathbb{R}\}$.

3.2. **Question (6)** **Deuxième cas :** $P(x) = x^r$, $r \geq 2$. Montrer que $\mathscr{U}_P$ est constitué des suites (u_k) vérifiant $u_{n+r} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.3. **Question (7)** **Troisième cas :** $P(x) = (x-\lambda)^r$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $r \geq 2$. On note $P_r(x) = (x-1)^r$.

3.3.1. **(a)** Soit (u_k) une suite réelle. Montrer l'équivalence : $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{U}_P \iff \left(\frac{u_k}{\lambda^k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{U}_{P_r}$.

3.3.2. **(b)** En déduire que $\mathscr{U}_P = \{(\lambda^k Q(k))_{k\in\mathbb{N}} \mid Q \in \mathscr{P}_{r-1}\}$.

3.4. **Question (8)** **Propriété importante.** Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P, R \in \mathscr{P}$ tels que $P(x) = (x-\lambda)R(x)$ pour tout réel x.

3.4.1. **(a)** On pose $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $R(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$, avec $n \geq 2$. Montrer que $a_0 = -\lambda b_0$, $a_n = b_{n-1}$ et $a_k = b_{k-1} - \lambda b_k$ pour $1 \leq k \leq n-1$.

3.4.2. **(b)** Soit (u_k) une suite réelle. Montrer l'équivalence : $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{U}_P \iff (u_{k+1} - \lambda u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{U}_R$.

3.5. **Question (9)** **Quatrième cas :** $P(x) = (x-\lambda)(x-\mu)^r$, où $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}^*)^2$, $\lambda \neq \mu$ et $r \geq 2$. Montrer que

$$\mathscr{U}_P = \{(a\lambda^k + \mu^k R(k))_{k\in\mathbb{N}} \mid a \in \mathbb{R},\ R \in \mathscr{P}_{r-1}\}.$$

Indication : utiliser 3.3.2, 3.4.2 et la propriété admise avec $\alpha = \mu/\lambda$.

3.6. **Question (10)** **Cinquième cas :** $P(x) = (x-\lambda)^{r+1}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $r \geq 1$. Sans utiliser le résultat de la question 3.3, proposer une autre méthode (par récurrence sur r, à l'aide de 3.4.2) pour établir que

$$\mathscr{U}_P = \{(\lambda^k Q(k))_{k\in\mathbb{N}} \mid Q \in \mathscr{P}_r\}.$$

Indication : on peut utiliser l'égalité $\Delta(\mathscr{P}_r) = \mathscr{P}_{r-1}$.

3.7. **Question (11)** **Cas général.** Soit $P(x) = \prod_{k=1}^{s}(x-\lambda_k)^{m_k}$, où $s \geq 1$, $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sont des réels non nuls deux à deux distincts et $m_1, \dots, m_s$ des entiers naturels non nuls. Montrer que les éléments de $\mathscr{U}_P$ sont les suites de la forme

$$\left(\sum_{k=1}^{s} \lambda_k^n R_k(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \text{où } R_k \in \mathscr{P}_{m_k-1} \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, s\}.$$

Partie 4 : applications

4.1. **Question (12)** On considère le polynôme $P(x) = x^5 - 12x^4 + 57x^3 - 134x^2 + 156x - 72$.

4.1.1. **(a)** Factoriser P, sachant que 2 en est une racine d'ordre de multiplicité 3.

4.1.2. **(b)** Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+5} = 12u_{n+4} - 57u_{n+3} + 134u_{n+2} - 156u_{n+1} + 72u_n.$$

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

4.2. **Question (13)** Soient a et b deux réels tels que $b \neq 0$ et $a \neq 1$. Déterminer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - (a+1)u_{n+1} + au_n = b^n.$$

Indication : on pourra étudier les cas $b \notin \{1, a\}$, $b = a$ et $b = 1$.

N.B. : l'énoncé original de la récurrence $(\mathcal{E}_P)$ comporte des indices incohérents ; on a adopté la définition ci-dessus, qui redonne exactement les relations des parties 2 à 4. Les cas 3 et 4 exigent $\lambda \neq 0$ (et $\mu \neq 0$) ; le « cinquième cas » de l'original, confus, correspond au cas $\mu = \lambda$ du quatrième cas ; enfin, au cas général, l'original écrit $\lambda_k R_k(n)$ et $R_k \in \mathscr{P}_{r-1}$ au lieu de $\lambda_k^n R_k(n)$ et $R_k \in \mathscr{P}_{m_k-1}$. On trouve $P(x) = (x-2)^3(x-3)^2$ en 4.1.1.

Commentaire. Théorème de structure des suites récurrentes linéaires : si $P = \prod(x-\lambda_k)^{m_k}$, les suites vérifiant la récurrence de polynôme P sont les $\sum_k \lambda_k^n R_k(n)$, avec $\deg R_k < m_k$. Pour l'exemple 4.1, $P = (x-2)^3(x-3)^2$, d'où $u_n = (a+bn+cn^2)2^n + (d+en)3^n$.

النسخة العربية

المتتاليات الترجعية الخطية ذات المعاملات الثابتة

دورة 2016 ▪ المسألة، الأجزاء 2 و3 و4 ▪ © 2026 سعد شكري

ترميزات. $\mathscr{P}$ مجموعة الدوال الحدودية الحقيقية و$\mathscr{P}_n$ مجموعة الحدوديات التي درجتها على الأكثر n؛ $\binom{n}{k}$ المعامل الحداني. نربط كل حدودية $P(x) = \sum_{k=0}^{r} p_k x^k$ درجتها $r \geq 1$ بالمجموعة $\mathscr{U}_P$ للمتتاليات الحقيقية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ التي تحقق العلاقة الترجعية الخطية

$$(\mathcal{E}_P) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{r} p_k u_{n+k} = 0.$$

إذا كانت $P(x) = x^r - \sum_{q=0}^{r-1} a_q x^q$ واحدية فإن $(\mathcal{E}_P)$ تكتب $u_{n+r} = \sum_{q=0}^{r-1} a_q u_{n+q}$. الهدف هو تحديد تعبير عام لعناصر $\mathscr{U}_P$ بواسطة جذور P.

نتائج مقبولة (مُثبتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). من أجل $\Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$: إذا كان $P \in \mathscr{P}_{r-1}$ ($r \geq 2$) فإن $P(x+r) = \sum_{k=0}^{r-1}(-1)^{r-1-k}\binom{r}{k}P(x+k)$ لكل عدد حقيقي x؛ من أجل $\Delta(\mathscr{P}_m) = \mathscr{P}_{m-1} : m \geq 1$؛ من أجل $\alpha \neq 1$ و$Q \in \mathscr{P}_m$ توجد $S \in \mathscr{P}_m$ بحيث $Q(x) = \alpha S(x+1) - S(x)$ لكل x.

الجزء 2 : دراسة المجموعة $\mathscr{U}_P$ في حالة $P(x) = (x-1)^r$، $r \geq 2$

ليكن $r \geq 2$؛ نرمز بـ $P_r(x) = (x-1)^r$.

السؤال (1) بين أن متتالية $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ تنتمي إلى $\mathscr{U}_{P_r}$ إذا وفقط إذا كان $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+r} = \sum_{k=0}^{r-1}(-1)^{r-1-k}\binom{r}{k}u_{n+k}$.

السؤال (2) لتكن $Q \in \mathscr{P}_{r-1}$. بين أن المتتالية $(Q(k))_{k\in\mathbb{N}}$ تنتمي إلى $\mathscr{U}_{P_r}$.

السؤال (3) لتكن $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathscr{U}_{P_r}$. نعرف $Q_u(x) = \sum_{k=0}^{r-1} u_k L_k(x)$، حيث لكل $k \in \{0, \ldots, r-1\} =: L_k(x)$

$$\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{r-1} \frac{x-j}{k-j}.$$

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

(أ) ليكن $k \in \{0, \dots, r-1\}$. بين أن L_k حدودية درجتها $r-1$ وأنه لكل $i \in \{0, \dots, r-1\} : L_k(i) = 1$ إذا كان $i = k$ و$L_k(i) = 0$ إذا كان $i \neq k$.

(ب) تحقق من أنه لكل $i \in \{0, \dots, r-1\} : Q_u(i) = u_i$.

(ج) بين أن $Q_u \in \mathscr{P}_{r-1}$ وأن $Q_u(k) = u_k$ لكل عدد صحيح طبيعي k.

السؤال (4) بين أن $\mathscr{U}_{P_r} = \{(Q(k))_{k\in\mathbb{N}} \mid Q \in \mathscr{P}_{r-1}\}$.

الجزء 3 : دراسة المجموعة $\mathscr{U}_P$ في الحالة العامة

السؤال (5) الحالة الأولى : $P(x) = x - \lambda$، $\lambda \in \mathbb{R}$. بين أن $\mathscr{U}_P$ مكونة من المتتاليات الهندسية التي أساسها λ : $\mathscr{U}_P = \{(a\lambda^k)_{k\in\mathbb{N}} \mid a \in \mathbb{R}\}$.

السؤال (6) الحالة الثانية : $P(x) = x^r$، $r \geq 2$. بين أن $\mathscr{U}_P$ مكونة من المتتاليات (u_k) التي تحقق $u_{n+r} = 0$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

السؤال (7) الحالة الثالثة : $P(x) = (x-\lambda)^r$، حيث $\lambda \in \mathbb{R}^*$ و$r \geq 2$. نرمز بـ $P_r(x) = (x-1)^r$.

(أ) لتكن (u_k) متتالية حقيقية. بين التكافؤ : $\left(\frac{u_k}{\lambda^k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{U}_{P_r} \iff (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{U}_P$.

(ب) استنتج أن $\mathscr{U}_P = \{(\lambda^k Q(k))_{k\in\mathbb{N}} \mid Q \in \mathscr{P}_{r-1}\}$.

السؤال (8) خاصية مهمة. ليكن $\lambda \in \mathbb{R}$ و$P, R \in \mathscr{P}$ بحيث $P(x) = (x-\lambda)R(x)$ لكل عدد حقيقي x.

(أ) نضع $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ و$R(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$ مع $n \geq 2$. بين أن $a_0 = -\lambda b_0$ و$a_n = b_{n-1}$ و$a_k = b_{k-1} - \lambda b_k$ من أجل $1 \leq k \leq n-1$.

(ب) لتكن (u_k) متتالية حقيقية. بين التكافؤ : $(u_{k+1} - \lambda u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{U}_R \iff (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{U}_P$.

السؤال (9) الحالة الرابعة : $P(x) = (x-\lambda)(x-\mu)^r$، حيث $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}^*)^2$ و$\lambda \neq \mu$ و$r \geq 2$. بين أن

$$\mathscr{U}_P = \{(a\lambda^k + \mu^k R(k))_{k\in\mathbb{N}} \mid a \in \mathbb{R},\ R \in \mathscr{P}_{r-1}\}.$$

إرشاد : استعمل 3.3.2 و3.4.2 والخاصية المقبولة مع $\alpha = \mu/\lambda$.

السؤال (10) الحالة الخامسة : $P(x) = (x-\lambda)^{r+1}$، $\lambda \in \mathbb{R}^*$، $r \geq 1$. دون استعمال نتيجة السؤال 3.3، اقترح طريقة أخرى (بالترجع على r وبواسطة 3.4.2) لإثبات أن

$$\mathscr{U}_P = \{(\lambda^k Q(k))_{k\in\mathbb{N}} \mid Q \in \mathscr{P}_r\}.$$

إرشاد : يمكن استعمال المتساوية $\Delta(\mathscr{P}_r) = \mathscr{P}_{r-1}$.

السؤال (11) الحالة العامة. لتكن $P(x) = \prod_{k=1}^{s}(x-\lambda_k)^{m_k}$، حيث $s \geq 1$ و$\lambda_1, \dots, \lambda_s$ أعداد حقيقية غير منعدمة ومختلفة مثنى مثنى و$m_1, \dots, m_s$ أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة. بين أن عناصر $\mathscr{U}_P$ هي المتتاليات التي على الشكل

$$\left(\sum_{k=1}^{s} \lambda_k^n R_k(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \text{حيث } R_k \in \mathscr{P}_{m_k-1} \text{ لكل } k \in \{1, \dots, s\}.$$

الجزء 4 : تطبيقات

السؤال (12) نعتبر الحدودية $P(x) = x^5 - 12x^4 + 57x^3 - 134x^2 + 156x - 72$.

(أ) عمل P، علما أن 2 جذر لها رتبة تضاعفه 3.

(ب) حدد جميع المتتاليات $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ التي تحقق العلاقة الترجعية

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+5} = 12u_{n+4} - 57u_{n+3} + 134u_{n+2} - 156u_{n+1} + 72u_n.$$

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri
حقوق الطبع محفوظة © 2026 سعد شوكري

السؤال (13) ليكن a وb عددين حقيقيين بحيث $b \neq 0$ و$a \neq 1$. حدد المتتاليات $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ التي تحقق

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - (a+1)u_{n+1} + au_n = b^n.$$

إرشاد : يمكن دراسة الحالات $b = a$ و$b \notin \{1, a\}$ و$b = 1$.

ملاحظة : تتضمن الصياغة الأصلية للعلاقة الترجعية $(\mathcal{E}_P)$ أدلة غير منسجمة؛ واعتمدنا التعريف أعلاه الذي يعطي بالضبط علاقات الأجزاء من 2 إلى 4. وتتطلب الحالتان 3 و4 أن يكون $\lambda \neq 0$ (و$\mu \neq 0$)؛ و«الحالة الخامسة» في الأصل، وهي غامضة، توافق الحالة $\mu = \lambda$ من الحالة الرابعة؛ وأخيرا يكتب الأصل في الحالة العامة $\lambda_k R_k(n)$ و$R_k \in \mathscr{P}_{r-1}$ عوض $\lambda_k^n R_k(n)$ و$R_k \in \mathscr{P}_{m_k-1}$. نجد $P(x) = (x-2)^3(x-3)^2$ في 4.1.1.

تعليق. مبرهنة بنية المتتاليات الترجعية الخطية : إذا كان $P = \prod(x-\lambda_k)^{m_k}$، فإن المتتاليات التي تحقق العلاقة الترجعية ذات الحدودية P هي $\sum_k \lambda_k^n R_k(n)$ مع $\deg R_k < m_k$. ومن أجل المثال 4.1، $P = (x-2)^3(x-3)^2$، ومنه $u_n = (a+bn+cn^2)2^n + (d+en)3^n$.

Problème 68 — Session 2014

Polynômes sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et cyclicité du groupe $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^*$

Partie 3 © 2026 Saad Choukri

Notations. $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n^*$ désigne le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}_n$, φ l'indicatrice d'Euler et $a \wedge b$ le pgcd. Pour a premier avec n, $w_n(a) = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid a^k \equiv 1\ [n]\}$ est l'ordre multiplicatif de a modulo n.

Résultats admis (établis dans d'autres parties du sujet d'origine). $(\mathbb{Z}_n^*, \times)$ est un groupe d'ordre $\varphi(n)$; si $a^k \equiv 1\ [n]$ alors $w_n(a) \mid k$; $w_n(a) \mid \varphi(n)$; si $a \wedge n = b \wedge n = 1$ et $w_n(a) \wedge w_n(b) = 1$, alors $w_n(ab) = w_n(a)w_n(b)$.

Dans tout le problème, p désigne un nombre premier impair.

3.1. **Question (1)** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}_n$ est un corps si et seulement si n est premier.

3.2. **Question (2)** Soient P et Q deux polynômes de degrés respectifs n et m, avec $0 \leq m \leq n$:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \qquad Q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k,$$

où $a_0, \ldots, a_n$ et $b_0, \ldots, b_m$ sont des éléments de $\mathbb{Z}_p$, avec $a_n \neq \bar{0}$ et $b_m \neq \bar{0}$. Montrer que le produit PQ est un polynôme de degré $n + m$.

3.3. **Question (3)** Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme de degré $n \geq 2$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$.

3.3.1. **(a)** Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\alpha^k - \beta^k$ s'écrit comme le produit de $(\alpha - \beta)$ par une somme de produits de puissances de α et de β.

3.3.2. **(b)** Soit $\alpha \in \mathbb{Z}_p$. Montrer que $P(\alpha) = 0$ si et seulement s'il existe un polynôme Q de degré $n-1$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ tel que $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.

3.3.3. **(c)** Montrer que le nombre de racines distinctes de P dans $\mathbb{Z}_p$ ne dépasse pas n.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

3.4. **Question (4)** Déterminer dans l'anneau $\mathbb{Z}_6$ toutes les racines du polynôme $P(x) = x^2 - x$, puis trouver deux factorisations différentes de P sous la forme $P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$. Que peut-on conclure, en se référant à ce qui précède ?

On rappelle que $(\mathbb{Z}_p^*, \times)$ est d'ordre $\varphi(p) = p-1$ et que $\mathbb{Z}_p^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{p-1}\}$.

3.5. **Question (5)** Soient q un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tels que q^α divise $p-1$. Pour $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, on pose $y_k = k^{(p-1)/q^\alpha}$.

3.5.1. **(a)** Montrer que $y_k^{q^\alpha} \equiv 1\ [p]$, et en déduire qu'il existe $n_k \in \{0, \ldots, \alpha\}$ tel que $w_p(y_k) = q^{n_k}$.

3.5.2. **(b)** Soit $m = \max\{n_k \mid k \in \{1, \ldots, p-1\}\}$. Montrer que tous les éléments de $\mathbb{Z}_p^*$ sont racines du polynôme $P(x) = x^{\frac{p-1}{q^\alpha} q^m} - 1$; en déduire que $m = \alpha$.

3.6. **Question (6)** Soit $p-1 = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ la décomposition de $p-1$ en produit de facteurs premiers ($\alpha_i \in \mathbb{N}^*$, p_i premiers deux à deux distincts).

3.6.1. **(a)** Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, il existe $a_i \in \{1, \ldots, p-1\}$ tel que $w_p(a_i) = p_i^{\alpha_i}$, puis trouver $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $a \wedge p = 1$ et $w_p(a) = p-1$.

3.6.2. **(b)** Montrer que $\mathbb{Z}_p^* = \{\bar{1}, \bar{a}, \bar{a}^2, \ldots, \bar{a}^{p-2}\}$: pour tout $\bar{b} \in \mathbb{Z}_p^*$, il existe $k \in \{0, 1, \ldots, p-2\}$ tel que $\bar{b} = \bar{a}^k$ (le groupe $(\mathbb{Z}_p^*, \times)$ est cyclique).

Soit désormais $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

3.7. **Question (7)** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \wedge \lambda_k = 1$ et $(1+p)^{p^k} = 1 + \lambda_k p^{k+1}$.

3.8. **Question (8)** En déduire que $w_{p^\alpha}(1+p) = p^{\alpha-1}$.

3.9. **Question (9)** Vérifier qu'il existe $x \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \wedge x = 1$ et $w_p(x) = p-1$.

3.10. **Question (10)** Montrer que $(p-1) \mid w_{p^\alpha}(x)$, et en déduire qu'il existe $x_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \wedge x_1 = 1$ et $w_{p^\alpha}(x_1) = p-1$.

3.11. **Question (11)** Montrer qu'il existe $y \in \mathbb{N}^*$ tel que $w_{p^\alpha}(y) = p^{\alpha-1}(p-1)$ (le groupe $(\mathbb{Z}_{p^\alpha}^*, \times)$ est cyclique).

N.B. : en 3.6.2, l'original écrit $\{\bar{1}, \bar{a}, \ldots, \bar{a}^{p-1}\}$ avec $k \in \{0, \ldots, p-1\}$; comme $\bar{a}^{p-1} = \bar{1}$, la liste s'arrête à $\bar{a}^{p-2}$. En 3.2, il faut supposer les coefficients dominants a_n et b_m non nuls.

Commentaire. Résultat central : le groupe $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^*$ est cyclique pour p premier impair, c'est-à-dire qu'il existe une *racine primitive* modulo p^α. La preuve repose sur le fait qu'un polynôme de degré n sur le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ a au plus n racines — faux sur $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, où $x^2 - x$ a quatre racines $0, 1, 3, 4$.

النسخة العربية

الحدوديات على $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ودورية الزمرة $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^*$

دورة 2014 ▪ الجزء 3 ▪ © 2026 سعد شكري

ترميزات. $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$، و$\mathbb{Z}_n^*$ زمرة العناصر القابلة للقلب في $\mathbb{Z}_n$، وφ دالة أولر و$a \wedge b$ القاسم المشترك الأكبر. من أجل a أولي مع n، $w_n(a) = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid a^k \equiv 1\ [n]\}$ هي الرتبة الضربية لـ a بتردد n.

نتائج مقبولة (مثبتة في أجزاء أخرى من الموضوع الأصلي). $(\mathbb{Z}_n^*, \times)$ زمرة رتبتها $\varphi(n)$؛ إذا كان $a^k \equiv 1\ [n]$ فإن $w_n(a) \mid k$؛ إذا كان $a \wedge n = b \wedge n = 1$ و$w_n(a) \wedge w_n(b) = 1$ فإن $w_n(ab) = w_n(a)w_n(b)$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri ▪ جميع الحقوق محفوظة ▪ يُمنع النسخ أو الاستغلال دون إذن كتابي مسبق

في هذه المسألة كلها يرمز p لعدد أولي فردي.

السؤال (1) ليكن $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. بين أن الحلقة $\mathbb{Z}_n$ جسم إذا وفقط إذا كان n أوليا.

السؤال (2) لتكن P وQ حدوديتين درجتاهما على التوالي n وm مع $0 \leq m \leq n$:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \qquad Q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k,$$

حيث $a_0, \ldots, a_n$ و$b_0, \ldots, b_m$ عناصر من $\mathbb{Z}_p$ مع $a_n \neq \bar{0}$ و$b_m \neq \bar{0}$. بين أن الجداء PQ حدودية درجتها $n+m$.

السؤال (3) لتكن $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ حدودية درجتها $n \geq 2$ ومعاملاتها في $\mathbb{Z}_p$.

(أ) ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$ و$k \in \mathbb{N}^*$. بين أن $\alpha^k - \beta^k$ يكتب على شكل جداء $(\alpha - \beta)$ في مجموع جداءات قوى لـ α وβ.

(ب) ليكن $\alpha \in \mathbb{Z}_p$. بين أن $P(\alpha) = 0$ إذا وفقط إذا وجدت حدودية Q درجتها $n-1$ ومعاملاتها في $\mathbb{Z}_p$ بحيث $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$.

(ج) بين أن عدد الجذور المختلفة لـ P في $\mathbb{Z}_p$ لا يتجاوز n.

السؤال (4) حدد في الحلقة $\mathbb{Z}_6$ جميع جذور الحدودية $P(x) = x^2 - x$، ثم أوجد تعميلين مختلفين لـ P على الشكل $P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$. ماذا يمكن أن نستنتج بالرجوع إلى ما سبق؟

نذكر أن $(\mathbb{Z}_p^*, \times)$ رتبتها $\varphi(p) = p-1$ وأن $\mathbb{Z}_p^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{p-1}\}$.

السؤال (5) ليكن q عددا أوليا و$\alpha \in \mathbb{N}^*$ بحيث يقسم q^α العدد $p-1$. من أجل $k \in \{1, \ldots, p-1\}$ نضع $y_k = k^{(p-1)/q^\alpha}$.

(أ) بين أن $y_k^{q^\alpha} \equiv 1\ [p]$، واستنتج أنه يوجد $n_k \in \{0, \ldots, \alpha\}$ بحيث $w_p(y_k) = q^{n_k}$.

(ب) ليكن $m = \max\{n_k \mid k \in \{1, \ldots, p-1\}\}$. بين أن جميع عناصر $\mathbb{Z}_p^*$ جذور للحدودية $P(x) = x^{\frac{p-1}{q^\alpha} q^m} - 1$؛ واستنتج أن $m = \alpha$.

السؤال (6) ليكن $p-1 = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ تفكيك $p-1$ إلى جداء عوامل أولية ($\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ وp_i أعداد أولية مختلفة مثنى مثنى).

(أ) بين أنه لكل $i \in \{1, \ldots, s\}$ يوجد $a_i \in \{1, \ldots, p-1\}$ بحيث $w_p(a_i) = p_i^{\alpha_i}$، ثم أوجد $a \in \mathbb{N}^*$ بحيث $a \wedge p = 1$ و$w_p(a) = p-1$.

(ب) بين أن $\{\bar{1}, \bar{a}, \bar{a}^2, \ldots, \bar{a}^{p-2}\}$: لكل $\bar{b} \in \mathbb{Z}_p^*$ يوجد $k \in \{0, 1, \ldots, p-2\}$ بحيث $\bar{b} = \bar{a}^k$ (الزمرة $(\mathbb{Z}_p^*, \times)$ دورية).

ليكن من الآن فصاعدا $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

السؤال (7) بين أنه لكل $k \in \mathbb{N}^*$ يوجد $\lambda_k \in \mathbb{N}^*$ بحيث $p \wedge \lambda_k = 1$ و$(1+p)^{p^k} = 1 + \lambda_k p^{k+1}$.

السؤال (8) استنتج أن $w_{p^\alpha}(1+p) = p^{\alpha-1}$.

السؤال (9) تحقق من أنه يوجد $x \in \mathbb{N}^*$ بحيث $p \wedge x = 1$ و$w_p(x) = p-1$.

السؤال (10) بين أن $(p-1) \mid w_{p^\alpha}(x)$، واستنتج أنه يوجد $x_1 \in \mathbb{N}^*$ بحيث $p \wedge x_1 = 1$ و$w_{p^\alpha}(x_1) = p-1$.

السؤال (11) بين أنه يوجد $y \in \mathbb{N}^*$ بحيث $w_{p^\alpha}(y) = p^{\alpha-1}(p-1)$ (الزمرة $(\mathbb{Z}_{p^\alpha}^*, \times)$ دورية).

ملاحظة : في 3.6.2 يكتب الأصل $\{\bar{1}, \bar{a}, \ldots, \bar{a}^{p-1}\}$ مع $k \in \{0, \ldots, p-1\}$؛ وبما أن $\bar{a}^{p-1} = \bar{1}$ فإن اللائحة تتوقف عند $\bar{a}^{p-2}$. وفي 3.2 يجب افتراض أن المعاملين الرئيسيين a_n وb_m غير منعدمين.

تعليق. النتيجة المركزية : الزمرة $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^*$ دورية من أجل p أولي فردي، أي أنه يوجد جذر بدائي بتردد p^α. ويرتكز البرهان على كون حدودية درجتها n على الجسم $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ تقبل على الأكثر n جذرا --- وهذا خاطئ على $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ حيث تقبل $x^2 - x$ أربعة جذور $0, 1, 3, 4$.

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur
© 2026 Saad Choukri
© 2026 Saad Choukri • جميع الحقوق محفوظة • يحظر النسخ أو إعادة النشر دون إذن المؤلف

© 2026 Saad Choukri • Tous droits réservés • Reproduction interdite sans autorisation de l'auteur

© 2026 Saad Choukri

Tous droits réservés. Toute reproduction, traduction, adaptation ou diffusion, même partielle, par quelque procédé que ce soit, est interdite sans l'autorisation écrite de l'auteur.

2026 © سعد شكري. جميع الحقوق محفوظة. يمنع نسخ هذا العمل أو ترجمته أو اقتباسه أو نشره، كليا أو جزئيا وبأي وسيلة كانت، دون إذن كتابي من المؤلف.

saadchoukri00@gmail.com • Édition du 28 octobre 2026