

EXERCICE 1 : (7,5 pts)**Partie I :**

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$g(t) = \ln(t) - (t - 1)$$

Soit $x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$.

On considère la fonction h de la variable réelle t définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$h(t) = \frac{g(x)}{(x-1)^2} (t-1)^2 - g(t)$$

0,5 pts

(1) Montrer que la fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que : $\forall t \in]0, +\infty[$,

$$h'(t) = \left(\frac{2g(x)}{(x-1)^2} + \frac{1}{t} \right) (t-1)$$

0,5 pts

(2) En appliquant le théorème de Rolle à la fonction h , montrer qu'il existe un réel θ compris entre x et 1 tel que :

$$\frac{g(x)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{2\theta}$$

0,5 pts

(3) Montrer que :

$$\frac{x+1-|x-1|}{2} < \theta < \frac{x+1+|x-1|}{2}$$

0,25 pts

(4) En déduire que :

$$\frac{-1}{x+1-|x-1|} < \frac{g(x)}{(x-1)^2} < \frac{-1}{|x-1|+x+1}$$

Partie II :

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} f(x) = \left(\frac{\ln(x)}{x-1} \right)^2 & \text{Si } x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\\ 1 & \text{Si } x = 1 \end{cases}$$

et $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 pts

(1) (a) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

0,25 pts

(b) Montrer que f est continue au point 1.

0,25 pts

(2) (a) Montrer que : $\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$,

$$\frac{f(x) - 1}{x - 1} = \left(1 + \frac{\ln(x)}{x-1} \right) \left(\frac{g(x)}{(x-1)^2} \right)$$

0,25 pts

(b) En déduire que la fonction f est dérivable en 1.

0,25 pts

(c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse $x = 1$.

0,75 pts

(3) (a) Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et que :
 $\forall x \in]0, +\infty[\setminus \{1\},$

$$f'(x) = \frac{2 \ln(x)}{x-1} \times \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$$

0,25 pts

(b) Montrer que : $\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$,

$$\frac{\ln(x)}{x-1} > 0$$

0,5 pts

(c) Montrer que la fonction g est négative sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis en déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

0,25 pts

(4) Montrer que le réel 1 est la seule solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

0,75 pts

(5) Représenter la tangente (T) et la courbe ($\mathcal{C}$) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,25 pts

(6) (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique x_n sur l'intervalle $]0, 1]$.

0,5 pts

(b) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

0,5 pts

(c) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n} = \frac{\ln(x_n)}{x_n - 1}$$

Puis en déduire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \sqrt{n}$$

EXERCICE 2 : (2,5 pts)

Soit φ une fonction dérivable sur l'intervalle $[0, 1]$ telle que sa dérivée φ' est continue sur cet intervalle.

0,5 pts

(1) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$\int_0^1 x^n \varphi(x) dx = \frac{\varphi(1)}{n+1} + \int_0^1 x^n (\varphi(x) - \varphi(1)) dx$$

0,5 pts

(2) Montrer que :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in [0, 1], \quad |\varphi'(x)| \leq M$$

0,5 pts

(3) Montrer que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad |\varphi(x) - \varphi(1)| \leq M(1-x)$$

0,5 pts

(4) En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n \varphi(x) dx = \varphi(1)$$

(5) On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies respectivement, pour tout entier naturel n , par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{nt^n}{1+2t} dt \quad \text{et} \quad v_n = 2^{n+1} n \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \arctan(2x) dx$$

0,5 pts

(6) En utilisant le résultat de la question 4, calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

EXERCICE 3 : (3,5 pts)Soit $m \in \mathbb{C}^* \setminus \{1, -i\}$.**Partie I :**On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation suivante d'inconnue z :

$$E_m : \quad z^3 - (1 + (1+i)m)z^2 + ((1+i)m + im^2)z - im^2 = 0$$

0,25 pts

(1) Montrer que les nombres complexes 1 et m sont des solutions de l'équation E_m .

0,25 pts

(2) En déduire l'ensemble de solutions de l'équation E_m .**Partie II :**

On suppose que :

$$m \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i, -1, 1\} \quad \text{et} \quad |m| = 1$$

0,5 pts

(1) Montrer que :

$$\frac{\overline{m} + i}{1 + i\overline{m}} - \frac{m + i}{1 + im} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\overline{m} + 1}{\overline{m} - 1} + \frac{m + 1}{m - 1} = 0$$

Remarque que : $m\overline{m} = 1$

0,25 pts

(2) Montrer que :

$$(1+i) \left(\frac{m-1}{m+i} \right)$$

est un imaginaire pur.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C, E et F d'affixes respectives :

$$a = m, \quad b = 1, \quad c = im, \quad e = \frac{1}{2}(1+i)(m-i) \quad \text{et} \quad f = \frac{1}{2}(1+i)(1+m)$$

0,5 pts

(1) (a) Montrer que :

$$\frac{e-c}{e-b} = -i \left(\frac{m+1}{m-1} \right)$$

0,25 pts

(b) En déduire que : $E \in (BC)$.

0,5 pts

(2) (a) Montrer que :

$$\frac{e-a}{c-b} = \frac{1}{2}(1+i) \left(\frac{m-1}{m+i} \right)$$

0,25 pts

(b) En déduire que : $(AE) \perp (BC)$.

0,25 pts

(3) (a) Montrer que :

$$\frac{f-c}{f-a} = -i \left(\frac{m+i}{1+im} \right)$$

0,5 pts

(b) En déduire que les points A, E, C et F sont cocycliques.**EXERCICE 4 : (3 pts)****Partie I :**On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :

$$(E) : 5x - 6y = 2$$

0,25 pts

(1) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$\{(4 + 6k, 3 + 5k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

(2) Soit (x, y) une solution de l'équation (E) et d le plus grand diviseur commun des nombres x et y .

0,25 pts

(a) Quelles sont les valeurs possibles de d ?

0,25 pts

(b) Déterminer les couples (x, y) pour lesquels $d = 1$.**Partie II :**(1) Soient $n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ et $p \in \mathbb{N}$. On considère l'écriture de n dans le système de numération de base b :

$$n = \sum_{i=0}^p a_i b^i$$

Avec

$$\forall i \in \{0, \dots, p\}, \quad a_i \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq a_i < b \quad \text{et} \quad a_p \neq 0$$

On pose :

$$S_b(n) = \sum_{i=0}^p a_i$$

La somme des chiffres représentant n dans le système de numération de base b .

0,5 pts

(2) Montrer que :

$$S_b(n) \equiv n [b-1]$$

(3) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que le couple $(S_5(n), S_6(n))$ est une solution de l'équation (E) avec $S_5(n)$ et $S_6(n)$ premiers entre eux.

0,25 pts

(a) Montrer que :

$$\begin{cases} n \equiv 0 [4] \\ n \equiv 3 [5] \end{cases}$$

0,25 pts

(b) En déduire que :

$$n \equiv 8 [20]$$

0,5 pts

(4) (a) Calculer $S_5(28)$ et $S_6(28)$.

0,25 pts

(b) Le couple $(S_5(28), S_6(28))$ est-il une solution de l'équation (E) ? Justifier votre réponse.**Partie III :**

On considère une urne contenant 25 boules numérotées de 1 à 25 et indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise deux boules de cette urne et on note le couple (x, y) obtenu où x est le numéro de la première boule tirée et y est le numéro de la deuxième boule tirée.

Soit V l'événement : "le couple (x, y) obtenu est une solution de l'équation (E)".

0,25 pts

(1) Montrer que la probabilité de l'événement V est :

$$p = 64 \times 10^{-4}$$

(2) On répète cette expérience 10 fois successives en remettant les boules tirées dans l'urne après chaque tirage.

0,25 pts

(3) Calculer la probabilité de la réalisation de l'événement V exactement deux fois. On note que le développement des calculs n'est pas demandé.

EXERCICE 5 : (3,5 pts)

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif de zéro la matrice O et d'unité la matrice I :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Et pour tout réel x , on pose :

$$M(x) = \begin{pmatrix} a^x & a^x - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^x \end{pmatrix}$$

Et on considère l'ensemble E suivant :

$$E = \{M(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

0,5 pts

(1) Montrer que E est stable dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.(2) Soit φ l'application définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = M(x)$.

0,5 pts

(a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$ et que :

$$\varphi(\mathbb{R}) = E$$

0,25 pts

(b) En déduire que $(E, \times)$ est un groupe commutatif.(3) On prend dans cette question $a = 5$ et on pose :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & -\frac{24}{25} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{25} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 25 & 24 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

0,5 pts

(a) Vérifier que $A \in E$ et $B \in E$.

0,75 pts

(b) Résoudre dans E l'équation :

$$A^5 \times X^6 = B^{2026}$$

(4) On munit E de la loi de composition interne T définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad M(x)TM(y) = M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}xy\right)$$

0,5 pts

(a) Montrer que $(E \setminus \{I\}, T)$ est un groupe commutatif.

0,5 pts

(b) Montrer que $(E, \times, T)$ est un corps commutatif.