

EXERCICE 1 : (10 pts)**Partie I :**

0,25 pts

(1) (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x$

0,25 pts

(b) En déduire que : $\forall x \in [0, +\infty[$,

$$\frac{x^2}{2} + 1 + x \leq e^x$$

(2) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on pose :

$$I(x) = \int_0^x te^{-t} dt$$

0,25 pts

(a) Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[$,

$$I(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

0,5 pts

(b) Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[$,

$$I(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$$

(3) Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

0,5 pts

(a) En utilisant les résultats des questions 1-b) et 2-b) de la partie I, montrer que :
 $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$\frac{1}{2} \leq g(x) \leq \frac{e^x}{2}$$

0,25 pts

(b) En déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{1}{2}$$

Partie II :Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - e^{-x}} & \text{Si } x \in]0, +\infty[\\ \frac{1}{2} & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

0,5 pts

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,25 pts

(2) Montrer que f est continue à droite en 0.

0,25 pts

(3) (a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = -e^{-x} f(x) \left(\frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} \right)$$

0,25 pts

(b) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$\frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} = 2g(2x) - \frac{e^x - 1}{x}$$

0,25 pts

(c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que : $f'_d(0) = 0$.(4) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on pose :

$$J(x) = \int_0^x te^t dt$$

0,5 pts

(a) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$0 \leq I(x) \leq J(x)$$

0,25 pts

(b) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$J(x) = (x - 1)e^x + 1$$

0,5 pts

(c) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{I(x) - J(x)}{(e^x - e^{-x})^2}$$

0,25 pts

(d) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

0,25 pts

(5) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers un intervalle à déterminer. On note f^{-1} la bijection réciproque de la fonction f .

0,5 pts

(6) (a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α à déterminer dans $[0, +\infty[$.

0,5 pts

(b) Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$ et la courbe $(\mathcal{C}')$ de la fonction f^{-1} dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm. On admet que le point $P(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion pour la courbe $(\mathcal{C})$ avec $x_0 \simeq 1,6$ et $f(x_0) \simeq 0,3$.(7) On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

0,25 pts

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$$

0,5 pts

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

On admet que $\forall x \in]0, +\infty[$, $-\frac{1}{2} < f'(x) < 0$.

0,5 pts

(c) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

0,25 pts

(d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .**Partie III :**

On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$$

0,5 pts

(1) (a) Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[$,

$$0 \leq F(x) \leq x f(x)$$

0,25 pts

(b) En déduire la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$$

0,25 pts

(c) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,25 pts

(2) (a) Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$.

0,5 pts

(b) Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[$,

$$F'(x) = \frac{-f(x)}{e^{2x} + 1} (e^{2x} - 4e^x + 1)$$

0,5 pts

(c) Montrer que $F(\ln(2 + \sqrt{3}))$ est un extremum de la fonction F sur $[0, +\infty[$.**EXERCICE 2 : (3,5 pts)**

Soit le nombre complexe

$$m = \sqrt{2}e^{i\theta} \quad \text{où} \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

Partie I :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$(E_m) : \quad \overline{m}z^2 - 2z + m = 0$$

0,25 pts

(1) Étant donné que le nombre complexe $z_1 = \frac{m(1-i)}{2}$ est une solution de l'équation

(E_m) , déduire que sa deuxième solution est : $z_2 = \frac{m(1+i)}{2}$.

0,25 pts

(2) Écrire z_1 sous forme exponentielle.

Partie II :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, M, M_1 et M_2 d'affixes respectives $a = 1, b = -1, m, z_1$ et z_2 . Soit R la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.

0,25 pts

(1) Montrer que : $R(M_1) = M_2$.

0,5 pts

(2) (a) Montrer que $(MM_1) \perp (OM_1)$ et $(MM_2) \perp (OM_2)$.

0,25 pts

(b) Vérifier que : $OM_1 = OM_2 = 1$.

0,25 pts

(c) Déterminer la nature du quadrilatère OM_1MM_2 .

(3) Soit H le point d'affixe :

$$h = \frac{-i}{\sqrt{2} \sin(\theta)} e^{i(2\theta)}$$

Pour tout nombre complexe z , on désigne par $\text{Re}(z)$ la partie réelle de z .

0,5 pts

(a) Montrer que :

$$\text{Re}(m - h) = 0 \quad \text{et} \quad \text{Re}(1 - h\overline{m}) = 0$$

0,25 pts

(b) Montrer que :

$$\text{Re}\left(\frac{a - h}{m - 1}\right) = 0$$

0,5 pts

(c) En déduire que $(MH) \perp (AB)$ et que $(AH) \perp (MB)$.

0,25 pts

(4) (a) Montrer que :

$$\frac{h - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{1}{2} (1 - \cotan(\theta))$$

0,25 pts

(b) En déduire que les points H, M_1 et M_2 sont alignés.

EXERCICE 3 : (3 pts)

Partie I :

(A) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante :

$$(F) : 5u - 9v = 1$$

0,25 pts

(1) Donner une solution particulière (u_0, v_0) dans $\mathbb{N}^2$ de (F) .

0,25 pts

(2) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (F) .

0,25 pts

(3) Vérifier que :

$$5^{u_0} \equiv 6 [19]$$

(B) On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante :

$$(E) : x^{2026} \equiv 5 [19]$$

(1) Soit x une solution de l'équation (E) .

0,5 pts

(a) Montrer que x et 19 sont premiers entre eux et que :

$$x^{18} \equiv 1 [19]$$

0,25 pts

(b) Montrer que :

$$x^{10} \equiv 5 [19]$$

0,25 pts

(c) En déduire que :

$$x^2 \equiv 6 [19]$$

On pourra utiliser les résultats de (A).

0,25 pts

(d) Montrer que :

$$x \equiv 5 [19] \quad \text{ou} \quad x \equiv -5 [19]$$

0,5 pts

(2) Montrer que si

$$x \equiv 5 [19] \quad \text{ou} \quad x \equiv -5 [19]$$

Alors x est solution de l'équation (E) .

Partie II :

On considère une urne contenant 100 boules numérotées de 1 à 100 indiscernables au toucher.

On tire une boule au hasard de cette urne.

On considère l'événement V : « Le numéro de la boule tirée est solution de l'équation (E) ».

0,25 pts

(1) Montrer que la probabilité de l'événement V est : $p = 0,11$.

0,25 pts

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs avec remise de la boule dans l'urne. Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité de « réalisation de l'événement V au moins une fois » soit strictement supérieure à 0,95.

EXERCICE 4 : (3,5 pts)

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire et non commutatif de zéro la matrice O et d'unité la matrice I :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère l'ensemble suivant :

$$E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 1-x & x \\ x^2+2x & -x & x+1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

0,5 pts

(1) Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad M(x) \times M(y) = M(x+y)$$

(2) On considère l'application φ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = M(x)$$

0,5 pts

(a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$ et que : $\varphi(\mathbb{R}) = E$.

0,25 pts

(b) En déduire que $(E, \times)$ est un groupe commutatif.

(3) On munit E de la loi de composition interne T définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad M(x)TM(y) = M(2xy)$$

0,75 pts

(a) Montrer que $(E \setminus \{I\}, T)$ est un groupe commutatif.

0,5 pts

(b) Montrer que $(E, \times, T)$ est un corps commutatif.

(4) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose :

$$(M(x))^n = \underbrace{M(x) \times \cdots \times M(x)}_{n \text{ fois}} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

0,5 pts

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (M(x))^n = M(nx)$$

0,5 pts

(b) Résoudre dans E l'équation :

$$X^3 - X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$