



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة الاستدراكية 2025
- الموضوع -

د. سعد شكري

saadchoukri.com



4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : L'analyse (7,75 pts)

EXERCICE 2 : L'analyse (2,25 pts)

EXERCICE 3 : Les nombres complexes (3,5 pts)

EXERCICE 4 : L'arithmétique (3 pts)

EXERCICE 5 : Les structures algébriques (3,5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

EXERCICE 1 : (7,75 pts)**Partie I :**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 \ln x}{x^2 + 1} & \text{Si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

Et soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,25 pts

(1) (a) Étudier la continuité de f à droite en 0.

0,5 pts

(b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,75 pts

(c) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

(2) Soit φ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = x^2 + 1 + 2 \ln x$$

0,5 pts

(a) Dresser le tableau de variations de φ .

0,5 pts

(b) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β appartenant à l'intervalle $]1/2, 1/\sqrt{3}[$.

On prendra $\ln 2 \simeq 0,7$ et $\ln 3 \simeq 1,1$.

0,25 pts

(c) Montrer que :

$$f(\beta) = -\frac{\beta^2}{2}$$

0,5 pts

(3) (a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{x\varphi(x)}{(x^2 + 1)^2}$$

0,5 pts

(b) Donner le tableau de variations de f .

0,25 pts

(c) Montrer que $\frac{1}{\beta}$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ sur $]\beta, +\infty[$.

0,5 pts

(d) Montrer que la droite d'équation : $y = \beta x - \frac{1}{2}$, est la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $\frac{1}{\beta}$.

0,5 pts

(4) Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On admet que la courbe $(\mathcal{C})$ possède deux points d'inflexion.

Partie II :

On pose :

$$J =]\sqrt{3}, 2[\quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1}{\beta}$$

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \sqrt{\exp\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

0,25 pts

(1) (a) Étudier les variations de g .

0,25 pts

(b) Montrer que : $\forall x \in J, \sqrt{3} < g(x) < 2$.On donne $\sqrt{3} \simeq 1,73$, $e^{\frac{2}{3}} \simeq 1,95$ et $e^{\frac{5}{8}} \simeq 1,87$.

0,25 pts

(2) (a) En utilisant la **question (3)-(c)** de la **partie I**, montrer que : $g(\alpha) = \alpha$.

0,5 pts

(b) Montrer que : $\forall x \in J$,

$$|g'(x)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

0,5 pts

(c) En déduire que : $\forall x \in J$,

$$|g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x - \alpha|$$

(3) On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 = \frac{7}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

0,25 pts

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in J$.

0,5 pts

(b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha|$$

0,25 pts

(c) En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .**EXERCICE 2 : (2,25 pts)**On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par :

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

(1) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

0,25 pts

(a) Montrer que : $\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ et $\forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$:

$$\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \ln(x) \leq \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

0,25 pts

(b) En déduire que : $\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$,

$$\frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

0,5 pts

(2) (a) Montrer que : $\forall n \geq 2$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

0,5 pts

(b) En déduire que : $\forall n \geq 2$,

$$u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx \leq u_n - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

0,5 pts

(c) Montrer que : $\forall n \geq 2$,

$$-1 + \frac{1}{n} \leq u_n \leq -1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

0,25 pts

(d) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.**EXERCICE 3 : (3,5 pts)**Soit $\theta \in [0, \pi[$.**Partie I :**On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) d'inconnue z :

$$(E_\theta) : z^2 + (1-i)e^{i\theta}z - ie^{i2\theta} = 0$$

0,25 pts

(1) (a) Vérifier que :

$$(E_\theta) \iff (2z + (1-i)e^{i\theta})^2 = ((1+i)e^{i\theta})^2$$

0,5 pts

(b) En déduire les deux solutions z_1 et z_2 de l'équation (E_θ) avec $\text{Im}(z_1) \leq 0$.

0,25 pts

(2) (a) Montrer que :

$$\frac{z_1 + 1}{z_2 + i} = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

0,25 pts

(b) En déduire la forme exponentielle du nombre complexe :

$$\frac{z_1 + iz_2}{z_2 + i}$$

Partie II :

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'afixes respectives :

$$a = e^{i\theta}, \quad b = (1 + i)e^{i\theta} \quad \text{et} \quad c = b - a$$

Soient m un nombre réel de $]0, 1[$, R la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$ et le point Q d'afixe : $q = me^{i\theta}$.

0,25 pts

(1) (a) Déterminer l'afixe p du point P l'image du point Q par la rotation R .

0,25 pts

(b) Vérifier que : $R(A) = C$.(2) Soit H le point d'afixe :

$$h = \frac{m}{m - i} e^{i\theta}$$

0,5 pts

(a) Montrer que :

$$\frac{p - a}{h} = \frac{m^2 + 1}{m} i \quad \text{et} \quad \frac{h - a}{p - a} = \frac{1}{m^2 + 1}$$

0,25 pts

(b) En déduire que H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AP) .

0,5 pts

(c) Montrer que :

$$\frac{b - h}{q - h} = \frac{i}{m}$$

0,25 pts

(d) En déduire que les droites (QH) et (HB) sont perpendiculaires.

0,25 pts

(e) Montrer que les points A, Q, H et B sont cocycliques.**EXERCICE 4 : (3 pts)**

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :

$$(E) : \quad y = \frac{a}{b}x - \frac{c}{d}$$

Où a, b, c et d sont des entiers naturels non nuls vérifiant : $a \wedge b = c \wedge d = 1$.

(1) On suppose que l'équation (E) admet une solution (x_0, y_0) .

0,5 pts

(a) Montrer que d divise bc .

0,5 pts

(b) En déduire que d divise b .(2) On suppose que d divise b et on pose $b = nd$ où n est un entier naturel non nul.

0,5 pts

(a) Montrer qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que : $dnu - av = 1$.

0,75 pts

(b) En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \{(-vcn + bk, -ucn + ak) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

0,75 pts

(3) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :

$$(F) : y = \frac{3}{2975}x - \frac{2}{119}$$

On donne : $2975 = 119 \times 25$.**EXERCICE 5 : (3,5 pts)**

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire et non commutatif de zéro la matrice O et d'unité la matrice I :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On munit l'ensemble suivant :

$$E = \{x + yi \mid x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\}$$

par la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{Z}^4, \quad (x + yi) * (x' + y'i) = (x + (-1)^y x') + (y + y')i$$

Partie I :

0,25 pts

(1) (a) Vérifier que :

$$(1 - i) * (3 + 2i) = -2 + i$$

0,25 pts

(b) Montrer que la loi $*$ n'est pas commutative dans E .

0,5 pts

(2) Montrer que la loi $*$ est associative dans E .

0,25 pts

(3) Montrer que 0 est l'élément neutre pour la loi $*$ dans E .

0,25 pts

(4) (a) Vérifier que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \quad (x + yi) * ((-1)^{y+1}x - yi) = 0$$

0,25 pts

(b) Montrer que $(E, *)$ est un groupe non commutatif.**Partie II :**

Soient les deux ensembles :

$$F = \{x + 2yi \mid x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\} \quad \text{et} \quad G = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z} \right\}$$

0,5 pts

(1) (a) Montrer que F est un sous-groupe de $(E, *)$.

0,25 pts

(b) Montrer que la loi $*$ est commutative dans F .(2) Soit φ l'application définie de F vers $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \quad \varphi(x + 2yi) = M(x, y)$$

0,5 pts

(a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(F, *)$ vers $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

0,25 pts

(b) Montrer que $\varphi(F) = G$.

0,25 pts

(c) En déduire que $(G, \times)$ est un groupe commutatif.