



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2025
- الموضوع -

د. سعد شكري

saadchoukri.com



4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 4 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : L'analyse (10 pts)

EXERCICE 2 : Les nombres complexes (3,5 pts)

EXERCICE 3 : L'arithmétique (3 pts)

EXERCICE 4 : Les structures algébriques (3,5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

EXERCICE 1 : (10 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + e}$$

et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie I :

0,25 pts

(1) (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(1-x) = f(x)$.

0,25 pts

(b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,5 pts

(c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

0,5 pts

(d) Interpréter graphiquement les deux résultats obtenus.

0,5 pts

(2) (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},$

$$f'(x) = f(x) \frac{1 - e^{2x-1}}{1 + e^{2x-1}}$$

1 pts

(b) Donner les variations de f puis en déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},$

$$0 < f(x) < \frac{1}{2}$$

0,5 pts

(3) Représenter graphiquement la courbe (Γ) .

On prendra $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}, \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}, \frac{1}{2\sqrt{e}} \simeq 0,30$ et $\frac{1}{1+e} \simeq 0,27$.

0,5 pts

(4) (a) Montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$$

0,25 pts

(b) En déduire que :

$$\int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$$

0,25 pts

(5) (a) En effectuant le changement de variables $t = e^x$, montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2 + e}$$

0,5 pts

(b) Montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\arctan(\sqrt{e}) - \frac{\pi}{4} \right)$$

0,25 pts

(c) En déduire l'aire, en cm^2 , du domaine plan délimité par (Γ) , les droites d'équations respectives $x = 0, x = 1$ et $y = 0$.

Partie II :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0, 1/2[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

0,5 pts

(1) En utilisant la **question (2)-(a)** de la **partie I**, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq f(x)$.

0,5 pts

(2) (a) Montrer que : $\forall x \in [0, 1/2], 0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$.

0,25 pts

(b) Montrer que la fonction $g : x \mapsto g(x) = f(x) - x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

0,5 pts

(c) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, 1/2[$ tel que : $f(\alpha) = \alpha$.

0,5 pts

(3) (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \frac{1}{2}$.

0,5 pts

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

0,5 pts

(c) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

0,25 pts

(d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

Partie III :

On considère la suite numérique $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{k}{e^{\frac{k}{n}} + e^{\frac{n-k}{n}}}$$

0,25 pts

(1) (a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0,5 pts

(b) Montrer que :

$$\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^{1/2} f(x) dx$$

On pourra effectuer le changement de variables $t = 1 - x$.

0,5 pts

(2) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 2 : (3,5 pts)

Soit $\alpha \in [0, 2\pi[$. On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_α) d'inconnue z :

$$(E_\alpha) : z^2 - 2^\alpha e^{i\alpha} (1 + 2i)z + i2^{2\alpha+1} e^{i2\alpha} = 0$$

Partie I :

- 0,25 pts (1) (a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E_α) est : $\Delta_\alpha = (2^\alpha e^{i\alpha}(1-2i))^2$.
- 0,5 pts (b) En déduire les deux solutions a et b de l'équation (E_α) avec $|a| < |b|$.
- 0,25 pts (2) Vérifier que $\frac{b}{a}$ est un imaginaire pur.

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On note par $M(z)$ le point d'affixe le nombre complexe z . On pose :

$$\frac{b}{a} = \lambda i \quad \text{avec} \quad \lambda = \operatorname{Im} \left(\frac{b}{a} \right)$$

- (1) On considère les points $A(a)$, $B(b)$ et $H(h)$ avec :

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

- 0,5 pts (a) Montrer que :

$$\frac{h}{b-a} = - \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) i$$

Puis en déduire que les droites (OH) et (AB) sont perpendiculaires.

- 0,5 pts (b) Montrer que :

$$\frac{h-a}{b-a} = \frac{1}{\lambda^2 + 1}$$

Puis en déduire que les points H , A et B sont alignés.

- (2) Soient $I(m)$ le milieu du segment $[OH]$ et $J(n)$ le milieu du segment $[HB]$.

- 0,5 pts (a) Montrer que :

$$\frac{n}{m-a} = -\lambda i$$

- 0,5 pts (b) En déduire que les droites (OJ) et (AI) sont perpendiculaires et que $OJ = |\lambda| AI$.

- 0,25 pts (c) Soit K le point d'intersection des droites (OJ) et (AI) . Montrer que les points K , I , H et J sont cocycliques.

- 0,25 pts (d) Montrer que les droites (IJ) et (OA) sont perpendiculaires.

EXERCICE 3 : (3 pts)

Soient p un nombre premier impair et a un entier premier avec p .

0,5 pts

(1) Montrer que :

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p] \quad \text{ou} \quad a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 [p]$$

(2) On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation :

$$ax^2 \equiv 1 [p]$$

Soit x_0 une solution de cette équation.

0,5 pts

(a) Montrer que :

$$x_0^{p-1} \equiv 1 [p]$$

0,25 pts

(b) En déduire que :

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$$

(3) Soit n un entier naturel non nul.

0,5 pts

(a) Montrer que si p divise $2^{2n+1} - 1$ alors :

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$$

0,5 pts

(b) En déduire que l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$:

$$(E) : 11x + (2^{2n+1} - 1)y = 1$$

(4) On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation :

$$(F) : x^2 + 5x + 2 \equiv 0 [11]$$

0,25 pts

(a) Montrer que :

$$(F) \iff 2(2x + 5)^2 \equiv 1 [11]$$

0,5 pts

(b) En déduire que l'équation (F) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

EXERCICE 4 : (3,5 pts)

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire et non commutatif de zéro la matrice O et d'unité la matrice I :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Soient la matrice A et l'ensemble E :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E = \{M(x) = I + xA \mid x \in \mathbb{R}\}$$

0,25 pts

(1) (a) Vérifier que : $A^2 = -2A$.

0,25 pts

(b) En déduire que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, M(x) \times M(y) = M(x + y - 2xy)$.

0,25 pts

(2) (a) Calculer :

$$M(1/2) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0,25 pts

(b) En déduire que la matrice $M(1/2)$ n'est pas inversible dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

0,25 pts

(3) Montrer que : $E' = E \setminus \{M(1/2)\}$ est stable pour la multiplication dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On pourra utiliser l'identité :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) \left(y - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \left(x + y - 2xy - \frac{1}{2}\right)$$

1 pts

(4) Montrer que : $(E', \times)$ est un groupe commutatif.(5) On munit E de la loi de composition interne T définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad M(x)TM(y) = M\left(x + y - \frac{1}{2}\right)$$

Et on considère l'application φ définie de $\mathbb{R}$ vers E par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = M\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

0,5 pts

(a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers (E, T) et que $\varphi(\mathbb{R}) = E$.

0,25 pts

(b) En déduire que (E, T) est un groupe commutatif.

0,5 pts

(6) Montrer que $(E, T, \times)$ est un corps commutatif.