



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة الاستدراكية 2024
- الموضوع -

د. سعد شكري

saadchoukri.com



4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : L'analyse (6,5 pts)

EXERCICE 2 : L'analyse (3,5 pts)

EXERCICE 3 : Les nombres complexes (3,5 pts)

EXERCICE 4 : Les structures algébriques (3,5 pts)

EXERCICE 5 : L'arithmétique (3 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

EXERCICE 1 : (6,5 pts)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction numérique f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x - x^n \ln(x) & \text{Si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

et on note $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

(1) (a) Montrer que f_n est continue à droite en 0.

(b) Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = -\infty$$

Puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

(c) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et que son nombre dérivé à droite en 0 est égal à 1.

(d) Montrer que f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$f'_n(x) = 1 - x^{n-1} - nx^{n-1} \ln x$$

(e) Montrer que f_n est strictement croissante sur $[0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

(2) (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$: $\forall x \in [0, +\infty[$,

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$$

(b) En déduire la position relative des deux courbes $(\mathcal{C}_n)$ et $(\mathcal{C}_{n+1})$.

(3) (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique réel $\alpha_n \in]1, 2[$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$. On prend $\ln 2 = 0,7$.

(b) Vérifier que : $\forall n \geq 2$,

$$\alpha_n^{n+1} \ln(\alpha_{n+1}) = 1$$

(c) En déduire que pour tout $n \geq 2$:

$$f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1} - 1$$

(d) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ ainsi définie est strictement décroissante.

(e) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

(4) On pose : $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.

(a) Montrer que : $1 \leq l \leq 2$.

(b) Montrer que pour tout $n \geq 2$:

$$n - 1 = -\frac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$$

0,25 pts

(c) On suppose que $l > 1$. Calculer en fonction de l la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$$

0,5 pts

(d) En déduire la valeur de la limite l .**EXERCICE 2 : (3,5 pts)**

0,25 pts

(1) (a) Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

0,5 pts

(b) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente puis déterminer sa limite.

0,25 pts

(2) Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \leq 1$$

0,5 pts

(3) (a) Montrer que : $\forall x \in [0, 1], 0 \leq e^x - 1 \leq ex$.

0,25 pts

(b) En déduire que : $\forall x \in [0, 1],$

$$0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{e}{2} x^2$$

(4) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$w_n = \sum_{k=1}^n \left(\exp\left(\frac{n}{n^2 + k^2}\right) - 1 \right)$$

0,25 pts

(a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{n^2 + k^2} \right)^2$$

0,25 pts

(b) Montrer que la fonction $x \mapsto (1+x^2)^{-2}$ est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

0,25 pts

(c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout entier $k \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\frac{1}{n} \left[1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right]^{-2} \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (1+x^2)^{-2} dx$$

0,5 pts

(5) (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2n}$$

0,5 pts

(b) En déduire que la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 3 : (3,5 pts)

Soit $m \in \mathbb{C}^*$.

Partie I :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E) : z^2 - (2 + i)mz + m^2(1 + i) = 0$$

0,25 pts

(1) (a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = (im)^2$.

0,5 pts

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

0,5 pts

(2) Soient z_1 et z_2 les deux solutions de (E). Mettre sous la forme exponentielle $z_1 z_2$ dans le cas où :

$$m = re^{i\theta}, \quad (r \in \mathbb{R}_+^*, \theta \in \mathbb{R})$$

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Et on pose :

$$z_1 = m \quad \text{et} \quad z_2 = m(1 + i)$$

Soit M_1 le point d'affixe z_1 , M_2 le point d'affixe z_2 et $M_3(z_3)$ l'image du point O par la rotation de centre M_2 et d'angle $-\pi/2$ et $M_4(z_4)$ l'image du point M_1 par l'homothétie de centre O et de rapport k , avec $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.

0,75 pts

(1) Calculer z_3 en fonction de m et z_4 en fonction de m et k .

0,75 pts

(2) Donner la forme algébrique de :

$$\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \times \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

0,75 pts

(3) En déduire que les points M_1 , M_2 , M_3 et M_4 sont cocycliques si et seulement si $k = -2$.

EXERCICE 4 : (3,5 pts)

On munit l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4, \quad (x + iy) * (x' + iy') = (xy' + y^5 x') + iyy'$$

Partie I :

0,25 pts

(1) (a) Vérifier que : $1 * 2i = 2$.

0,25 pts

(b) Montrer que la loi de composition interne $*$ n'est pas commutative.

0,5 pts

(2) Montrer que la loi $*$ est associative.

0,25 pts

(3) (a) Vérifier que : $1 * (1 + 2i) = 2$.

0,25 pts

(b) En déduire que $(\mathbb{C}, *)$ n'est pas un groupe.

(4) Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par :

$$E = \{x + yi \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}^*\}$$

0,25 pts

(a) Montrer que E est stable dans $(\mathbb{C}, *)$.

0,5 pts

(b) Montrer que $(E, *)$ est un groupe non commutatif.

Partie II :

On considère les sous-ensembles de E définis par :

$$F = \{yi \mid y \in \mathbb{R}^*\} \quad \text{et} \quad G = \{x + i \mid x \in \mathbb{R}\}$$

0,5 pts

(1) Montrer que F est un sous-groupe de $(E, *)$.

(2) On considère l'application φ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x + i$$

0,25 pts

(a) Montrer que : $\varphi(\mathbb{R}) = G$.

0,25 pts

(b) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{C}, *)$.

0,25 pts

(c) En déduire que $(G, *)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE 5 : (3 pts)

0,5 pts

(1) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer l'entier $u \in \{1, 2, \dots, 22\}$ tel que :

$$10u \equiv 1 \pmod{23}$$

(2) Soient m un entier naturel et q et r , respectivement, le quotient et le reste de la division euclidienne de m par 10.

0,5 pts

(a) Montrer que :

$$m \equiv 10(q + ur) \pmod{23}$$

0,75 pts

(b) Montrer que :

$$23 \text{ divise } m \iff 23 \text{ divise } (q + ur)$$

(3) On considère dans $\mathbb{N}$ le système :

$$(S) : \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{23} \\ x \equiv 2 \pmod{10} \end{cases}$$

0,75 pts

(a) Montrer que si x est une solution du système (S) alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que :

$$x = 10q + 2 \quad \text{et} \quad 23 \text{ divise } (q + 7)$$

0,5 pts

(b) Résoudre dans $\mathbb{N}$ le système (S) .