



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2024
- الموضوع -

د. سعد شكري

saadchoukri.com



4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : L'analyse (7,5 pts)

EXERCICE 2 : L'analyse (2,5 pts)

EXERCICE 3 : Les nombres complexes (3,5 pts)

EXERCICE 4 : Les structures algébriques (3 pts)

EXERCICE 5 : L'arithmétique (3,5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

EXERCICE 1 : (7,5 pts)

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} & \text{Si } x \in]1, +\infty[\\ \frac{1}{2} & \text{Si } x = 1 \end{cases}$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,5 pts

(1) Montrer que f est continue à droite en 1.

0,5 pts

(2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,25 pts

(3) (a) Soit $x \in]1, +\infty[$. En posant $t = (x - 1)^2$, vérifier que :

$$\frac{1 - x + \ln(x)}{(x - 1)^2} = \frac{-\sqrt{t} + \ln(1 + \sqrt{t})}{t}$$

0,5 pts

(b) Montrer que : $\forall t \in]0, +\infty[$,

$$-\frac{1}{2} < \frac{-\sqrt{t} + \ln(1 + \sqrt{t})}{t} < \frac{-1}{2(1 + \sqrt{t})}$$

On pourra utiliser le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[0, t]$.

0,25 pts

(c) En déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x + \ln(x)}{(x - 1)^2} = -\frac{1}{2}$$

0,5 pts

(4) (a) Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[$,

$$\frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x - 1} = -\frac{\ln(x)}{x - 1} \times \frac{1}{2(x + 1)} + \frac{\ln(x) - x + 1}{2(x - 1)^2}$$

0,5 pts

(b) En déduire que f est dérivable à droite en 1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

(5) Pour tout $x \in [1, +\infty[$ on pose :

$$I(x) = \int_1^x \frac{t^2 - 1}{t^3} dt \quad \text{et} \quad J(x) = \int_1^x \frac{t^2 - 1}{t^2} dt$$

0,5 pts

(a) Montrer que : $\forall x \in [1, +\infty[$, $0 \leq I(x) \leq J(x)$.

0,5 pts

(b) Montrer que : $\forall x \in [1, +\infty[$,

$$I(x) = \ln(x) - \frac{x^2 - 1}{2x^2} \quad \text{et} \quad J(x) = \frac{(x - 1)^2}{x}$$

0,5 pts

(c) Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-2}{(x + 1)^2} \times \frac{I(x)}{J(x)}$$

0,5 pts

(d) En déduire que : $\forall x \in]1, +\infty[$,

$$-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$$

0,25 pts

(6) (a) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

0,5 pts

(b) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. On prendra $\|\vec{i}\| = 1$ cm et $\|\vec{j}\| = 2$ cm.

0,5 pts

(7) Montrer que l'équation $f(x) = x - 1$ admet une unique solution a dans $]1, 2[$.(8) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} a_0 \in [1, +\infty[\\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 1 + f(a_n) \end{cases}$$

0,5 pts

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|a_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} |a_n - a|$$

0,5 pts

(b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a|$$

0,25 pts

(c) En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.**EXERCICE 2 : (2,5 pts)**Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

0,5 pts

(1) (a) Montrer que F est continue, strictement croissante sur $[0, 1]$.

0,5 pts

(b) En déduire que F est une bijection de $[0, 1]$ vers $[0, \beta]$ avec :

$$\beta = \int_0^1 e^{t^2} dt$$

(2) On note F^{-1} la bijection réciproque de F . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F^{-1}\left(\frac{k}{n}\beta\right)$$

0,5 pts

(a) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite :

$$l = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta F^{-1}(t) dt$$

0,5 pts

(b) Montrer que :

$$l = \frac{1}{\beta} \int_0^1 u^2 e^{u^2} du$$

On pourra effectuer le changement de variable $u = F^{-1}(t)$.

0,5 pts

(c) En déduire que :

$$l = \frac{e - 1}{2\beta}$$

EXERCICE 3 : (3,5 pts)Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E_\alpha) : z^2 - 2iz + \alpha = 0 \quad \text{Où } \alpha \in \mathbb{C}$$

Partie I :

0,25 pts

(1) (a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_α) est : $\Delta = -4(1 + \alpha)$.

0,25 pts

(b) Déterminer l'ensemble des valeurs α pour lesquelles l'équation (E_α) admet dans l'ensemble $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes.

0,5 pts

(2) On note z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_α) . Déterminer $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$.**Partie II :**Soient Ω , M_1 et M_2 les points d'affixes respectivement α , z_1 et z_2 .(1) On suppose que $\alpha = m^2 - 2m$ avec $m \in \mathbb{R}$.

0,5 pts

(a) Déterminer z_1 et z_2 en fonction de m .

0,25 pts

(b) En déduire que les points O , M_1 et M_2 sont alignés.(2) On suppose que les points O , M_1 et M_2 ne sont pas alignés.

0,25 pts

(a) Montrer que $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si : $\text{Re}(z_1 \overline{z_2}) = 0$.

0,5 pts

(b) Montrer que :

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 - 4\text{Re}(z_1 \overline{z_2})$$

0,25 pts

(c) En déduire que $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si : $|z_1 - z_2| = 2$.

0,25 pts

(3) (a) Montrer que : $(z_1 - z_2)^2 = \Delta$.

0,5 pts

(b) Déterminer l'ensemble Γ des points Ω pour que le triangle $OM_1 M_2$ soit rectangle en O .**EXERCICE 4 : (3,5 pts)**On considère dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ la loi de composition interne T définie par :

$$\forall ((a, b), (c, d)) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*)^2, \quad (a, b)T(c, d) = (a\bar{d} + c, bd)$$

 $\bar{d}$ étant le conjugué du nombre complexe d .

0,5 pts

(1) (a) Vérifier que $(i, 2)T(1, i) = (2, 2i)$, puis calculer $(1, i)T(i, 2)$.

0,25 pts

(b) En déduire que la loi T n'est pas commutative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

0,5 pts

(2) Montrer que la loi T est associative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

0,25 pts

(3) Vérifier que $(0, 1)$ est l'élément neutre pour T dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

0,5 pts

(4) (a) Vérifier que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, \quad (a, b)T \left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b} \right) = (0, 1)$$

0,5 pts

(b) Montrer que $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)$ est un groupe non commutatif.

0,5 pts

(5) (a) Montrer que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est stable par la loi de composition interne T .

0,5 pts

(b) Montrer que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)$.**EXERCICE 5 : (3 pts)**

Soient p et q deux nombres premiers distincts et r un entier naturel premier avec p et avec q .

1 pts

(1) (a) Montrer que p divise $r^{p-1} - 1$ et que q divise $r^{q-1} - 1$.

0,5 pts

(b) En déduire que p et q divisent $r^{(p-1)(q-1)} - 1$.

0,5 pts

(c) Montrer que pq divise $r^{(p-1)(q-1)} - 1$.

1 pts

(2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation :

$$2024^{192}x \equiv 3 \pmod{221}$$

On donne : $221 = 13 \times 17$.