

EXERCICE 1 : (10 pts)**Partie I :**

Pour tout entier naturel non nul n , on considère la fonction f_n définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{x} (\ln x)^n & \text{Si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,5 pts (1) (a) Vérifier que : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$\sqrt{x} (\ln x)^n = (2n)^n [x^{1/2n} \ln(x^{1/2n})]^n$$

En déduire que f_n est continue à droite en 0.

0,25 pts (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

0,75 pts (c) Vérifier que : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$\frac{f_n(x)}{x} = (2n)^n \left[\frac{\ln\left(\frac{1}{x^{1/2n}}\right)}{x^{1/2n}} \right]^n$$

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,5 pts (d) Calculer, suivant la parité de n , $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,75 pts (2) (a) Montrer que f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$f'_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x)^{n-1} (2n + \ln x)$$

0,25 pts (b) Vérifier que pour tout $n \geq 2$, $f'_n(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$ ou $x = e^{-2n}$.

1 pts (c) Étudier, suivant la parité de n , le sens de variation de f_n et donner son tableau de variations.

0,25 pts (d) Montrer que si n est impair et $n \geq 3$ alors le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de (C_n) .

Partie II :

(1) Soit $\beta \in]1, e[$ un réel fixé. On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f_n(\beta)$.

0,25 pts (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < \sqrt{e}$.

0,25 pts (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

0,25 pts (c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

0,5 pts

(2) (a) Montrer que pour tout entier n non nul, il existe un unique réel $x_n \in]1, e[$ tel que : $f_n(x_n) = 1$.

0,75 pts

(b) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi définie est croissante, en déduire qu'elle est convergente.

(3) On pose : $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

0,5 pts

(a) Montrer que : $1 < l \leq e$.

0,25 pts

(b) Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln x_n)^n = \frac{1}{\sqrt{l}}$$

0,25 pts

(c) Montrer que si $l < e$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(\ln x_n) = -\infty$$

0,25 pts

(d) En déduire la valeur de l .

Partie III :

On pose pour tout $x \in I$:

$$F(x) = \int_x^1 (f_1(t))^2 dt$$

0,25 pts

(1) (a) Montrer que la fonction F est continue sur I .

1 pts

(b) En utilisant une double intégration par parties, montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$F(x) = -\frac{x^2}{2} \ln^2(x) + \frac{x^2}{2} \ln(x) + \frac{1}{4}(1 - x^2)$$

0,5 pts

(2) (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$.

0,25 pts

(b) En déduire la valeur de $F(0)$.

0,5 pts

(c) Calculer, en cm^3 , le volume du solide engendré par la rotation d'un tour complet autour de l'axe des abscisses de la portion de la courbe $(\mathcal{C}_1)$ relative à l'intervalle $[0, 1]$. On prendra $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$.

EXERCICE 2 : (3,5 pts)

Les deux parties sont indépendantes

Partie I :

On considère dans $\mathbb{R}_+^2$ le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x+y} \right) = \frac{12}{5} \\ \sqrt{y} \left(1 - \frac{1}{x+y} \right) = \frac{4}{5} \end{cases}$$

(1) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ une solution du système (S) , on pose $z = \sqrt{x} + i\sqrt{y}$.

0,25 pts

(a) Montrer que :

$$z + \frac{1}{z} = \frac{12}{5} + \frac{4}{5}i$$

0,75 pts

(b) Montrer que :

$$z^2 - \left(\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i\right)z + 1 = 0$$

En déduire les valeurs possibles de z .

$$\text{On remarque que : } \frac{28}{25} + \frac{96}{25}i = \left(\frac{2}{5}(4 + 3i)\right)^2.$$

0,25 pts

(c) En déduire les valeurs du couple (x, y) .

0,5 pts

(2) Résoudre dans $\mathbb{R}_+^2$ le système (S) .

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit (U) le cercle de centre O et de rayon 1 et $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du cercle (U) deux à deux distincts.

0,25 pts

(1) Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$|z| = 1 \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$$

0,5 pts

(2) (a) La droite passant par A et parallèle à (BC) coupe le cercle (U) au point $P(p)$.

$$\text{Montrer que : } p = \frac{bc}{a}.$$

0,5 pts

(b) La droite passant par A et perpendiculaire à (BC) coupe le cercle (U) au point $Q(q)$. Montrer que : $q = -p$.

0,5 pts

(c) La droite passant par C et parallèle à (AB) coupe le cercle (U) au point $R(r)$. Montrer que les deux droites (PR) et (OB) sont perpendiculaires.

EXERCICE 3 : (3,5 pts)

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire et non commutatif d'unité I :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit E l'ensemble défini par :

$$E = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

0,25 pts

(1) Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$.

(2) On munit l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall ((x, z), (x', z')) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{C})^2, \quad (x, z) * (x', z') = (x + x', z + z')$$

Et on considère l'application φ définie de E vers $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ par :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi(M(a, b, c)) = (a, b + ci)$$

0,5 pts

(a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(E, +)$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, *)$ et que :

$$\varphi(E) = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$$

0,25 pts

(b) En déduire que $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, *)$ est un groupe commutatif.

(3) On munit $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ de la loi de composition interne T définie par :

$$\forall ((x, z), (x', z')) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{C})^2, \quad (x, z)T(x', z') = (x\text{Re}(z') + x'\text{Re}(z), zz')$$

Où $\text{Re}(z)$ désigne la partie réelle du nombre complexe z .

0,25 pts

(a) Montrer que T est commutative.

0,25 pts

(b) Vérifier que $(0, 1)$ est l'élément neutre de T dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

0,5 pts

(c) Vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1, i)T(x, -i) = (0, 1)$$

Et en déduire que T est non associative dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

(4) Soit l'ensemble suivant :

$$G = \{(\text{Im}(z), z) \mid z \in \mathbb{C}\}$$

Où $\text{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire du nombre complexe z .

0,25 pts

(a) Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, *)$.

On remarque que $(-\text{Im}(z), -z)$ est le symétrique de $(\text{Im}(z), z)$ pour la loi $*$.

0,25 pts

(b) Soit ψ l'application définie de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \psi(z) = (\text{Im}(z), z)$$

Montrer que ψ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, T)$.

0,5 pts

(c) En déduire que $(G \setminus \{(0, 0)\}, T)$ est un groupe commutatif.

0,5 pts

(5) Montrer que $(G, *, T)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 4 : (3 pts)

Soit p un nombre premier impair. On pose :

$$S = 1 + p + p^2 + p^3 + \dots + p^{p-1}$$

Soit q un nombre premier qui divise S .

0,5 pts

(1) (a) Montrer que p et q sont premiers entre eux.

0,25 pts

(b) En déduire que : $p^{q-1} \equiv 1 [q]$.

0,5 pts

(c) Vérifier que : $p^p - 1 = (p - 1)S$. Puis en déduire que : $p^p \equiv 1 [q]$.

(2) On suppose que p et $q - 1$ sont premiers entre eux.

0,75 pts

(a) En utilisant le théorème de Bézout, montrer que : $p \equiv 1 [q]$.

0,25 pts

(b) En déduire que : $S \equiv 1 [q]$.

0,75 pts

(3) Montrer que : $q \equiv 1 [p]$.