



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2023
- الموضوع -

د. سعد شكري

saadchoukri.com



4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : L'analyse (7,75 pts)

EXERCICE 2 : L'analyse (2,25 pts)

EXERCICE 3 : Les nombres complexes (3,5 pts)

EXERCICE 4 : L'arithmétique (3 pts)

EXERCICE 5 : Les structures algébriques (3,5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

EXERCICE 1 : (7,75 pts)**Partie I :**

0,5 pts

(1) (a) Montrer que : $\forall t \in [0, +\infty[$,

$$\frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1+t)^2} \right)$$

0,5 pts

(b) En déduire que : $\forall x \in [0, +\infty[$,

$$\frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+2x}{1+x} \right)$$

(2) Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

0,5 pts

(3) Montrer que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - 1}{x} = -\frac{1}{2}$$

Partie II :Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} g(x)e^{-x} & \text{Si } x \in]0, +\infty[\\ 1 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,5 pts

(1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,25 pts

(2) (a) Montrer que f est continue à droite en 0.

0,25 pts

(b) Vérifier que : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$\frac{f(x) - 1}{x} = \left(\frac{e^{-x} - 1}{x} \right) g(x) + \left(\frac{g(x) - 1}{x} \right)$$

0,5 pts

(c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et déterminer $f'_d(0)$.

0,75 pts

(3) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis que : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} e^{-x}$$

0,5 pts

(4) (a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$-\frac{3}{2} < \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$$

0,25 pts

(b) En déduire que : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$-\frac{3}{2} < f'(x) < 0$$

0,25 pts

(5) (a) Dresser le tableau de variations de f .

0,75 pts

(b) Construire la courbe $(\mathcal{C})$ en faisant apparaître la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0. On prendra $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$.**Partie III :**

0,5 pts

(1) Montrer que l'équation d'inconnue $x : f(x) = 3x$ admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$.(2) Soient $\beta \in \mathbb{R}^+$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \beta \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}f(u_n) \end{cases}$$

0,5 pts

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

0,5 pts

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

0,5 pts

(c) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\beta - \alpha|$$

0,25 pts

(d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .**EXERCICE 2 : (2,25 pts)**On considère la fonction numérique : $x \mapsto e^x$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on note M_k le point de la courbe (Γ) de coordonnées $\left(\frac{k}{n}, e^{\frac{k}{n}}\right)$.

0,5 pts

(1) (a) Montrer que :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad \exists c_k \in \left] \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right[\quad \text{tel que} \quad e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}e^{c_k}$$

0,25 pts

(b) Montrer que : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$,

$$M_k M_{k+1} = \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{2c_k}}$$

Où $M_k M_{k+1}$ désigne la distance de M_k à M_{k+1} .

0,5 pts

(c) En déduire que : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$,

$$\frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq M_k M_{k+1} \leq \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$$

(2) Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}$$

0,5 pts

(a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq S_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}$$

0,5 pts

(b) En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} dx$$

EXERCICE 3 : (3,5 pts)

On considère le nombre complexe :

$$u = 1 + (2 - \sqrt{3})i$$

0,5 pts

(1) (a) Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes : $1 - i$ et $1 + \sqrt{3}i$.

0,25 pts

(b) Montrer que :

$$\frac{(1 - i)(1 + \sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}} = e^{i\pi/12}$$

0,25 pts

(c) En déduire que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$$

0,5 pts

(d) Montrer que :

$$u = (\sqrt{6} - \sqrt{2})e^{i\pi/12}$$

(2) On considère les deux suites numériques $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - (2 - \sqrt{3})y_n \\ y_{n+1} = (2 - \sqrt{3})x_n + y_n \end{cases}$$

0,5 pts

(a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n + iy_n = u^n$$

0,5 pts

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)\right)^n} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)\right)^n}$$

(3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe u^n .

0,5 pts

(a) Déterminer les entiers n pour lesquels les points O , A_0 et A_n sont alignés.

0,5 pts

(b) Montrer que pour tout entier n , le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n .

EXERCICE 4 : (3 pts)

Soit p un nombre premier impair. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation

$$(E) : x^2 \equiv 2 [p]$$

0,25 pts

(1) (a) Montrer que :

$$2^{p-1} \equiv 1 [p]$$

0,25 pts

(b) En déduire que :

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p] \quad \text{ou} \quad 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 [p]$$

$$\text{On remarque que : } \left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) \left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) = 2^{p-1} - 1.$$

(2) Soit x une solution de l'équation (E).

0,5 pts

(a) Montrer que p et x sont premiers entre eux.

0,5 pts

(b) En déduire que :

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$$

On pourra utiliser le théorème de Fermat.

0,25 pts

(3) Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, p divise C_p^k .

$$\text{On rappelle que : } \forall k \in \{1, 2, \dots, p-1\} \quad C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!} \quad \text{et que : } kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}.$$

0,25 pts

(4) (a) En utilisant la formule de Moivre, montrer que :

$$(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) + i2^{\frac{p}{2}} \sin\left(\frac{p\pi}{4}\right)$$

0,5 pts

(b) On admet que :

$$(1+i)^p = \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} + i \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k+1}$$

Montrer que :

$$2^{p/2} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad 2^{p/2} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) \equiv 1 [p]$$

On pourra utiliser la **question (3)**.

0,5 pts

(5) En déduire que si $p \equiv 5 [8]$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

EXERCICE 5 : (3,5 pts)

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle O et d'unité la matrice I :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On considère l'ensemble E défini par :

$$E = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Partie I :

0,5 pts

(1) Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

0,25 pts

(2) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

0,25 pts

(3) (a) Vérifier que :

$$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, \quad M(x, y) \times M(x', y') = M(xx' + 3yy', xy' + yx')$$

0,5 pts

(b) En déduire que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

0,25 pts

(4) (a) Vérifier que :

$$M(\sqrt{3}, 1) \times M(-\sqrt{3}, 1) = O$$

0,25 pts

(b) En déduire que $(E, +, \times)$ n'est pas un corps.

Partie II :

On considère les ensembles suivants :

$$F = \left\{ x + y\sqrt{3} \mid (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \right\}$$

0,25 pts

(1) Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x + y\sqrt{3} = 0 \iff (x = 0 \text{ et } y = 0)$$

0,25 pts

(2) Montrer que $F \setminus \{0\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

(3) Soit φ l'application définie de $F \setminus \{0\}$ vers E par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \varphi(x + y\sqrt{3}) = M(x, y)$$

0,25 pts

(a) Vérifier que : $\varphi(F \setminus \{0\}) = G \setminus \{O\}$.

0,25 pts

(b) Montrer que φ est un homomorphisme de $(F \setminus \{0\}, \times)$ vers $(E, \times)$.

0,25 pts

(c) En déduire que $(G \setminus \{O\}, \times)$ est un groupe commutatif.

0,25 pts

(4) Montrer que $(G, +, \times)$ est un corps commutatif.