

EXERCICE 1 : (10 pts)**Partie I :**

- 0,25 pts (1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x$.
- 0,25 pts (2) (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leq 1 - e^{-x} \leq x$.
- 0,5 pts (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,$

$$0 \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} \leq \frac{x^3}{6}$$

- 0,5 pts (c) Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - x - e^{-x}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} & \text{Si } x \in]0, +\infty[\\ 1 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

Et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 0,5 pts (1) (a) Montrer que f est continue à droite en 0.
- 0,25 pts (b) Vérifier que : $\forall x > 0,$

$$\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1 - 2x - e^{-2x}}{x^2} - \frac{1 - x - e^{-x}}{x^2}$$

- 0,5 pts (c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que le nombre dérivé à droite en 0 est : $-\frac{3}{2}$.

- 0,5 pts (2) (a) Montrer que : $\forall x > 0,$

$$f'(x) = \frac{e^{-2x}}{x^2} (2x + 1 - e^x(1 + x))$$

- 0,5 pts (b) Montrer que : $\forall x > 0,$

$$f'(x) \leq -e^{-2x}$$

On pourra utiliser : $1 + x \leq e^x$.

- 0,25 pts (c) En déduire le sens de variations de f sur I .

- (3) On admet que : $\forall x > 0,$

$$f''(x) = \frac{e^{-2x}}{x^3} (-4x^2 - 4x - 2 + e^x(2 + 2x + x^2))$$

- 0,25 pts (a) Montrer que : $\forall x \geq 0,$

$$1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x$$

0,5 pts

(b) En déduire que : $\forall x > 0, f''(x) > 0$.

(4) On admet que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{3}{2}$$

0,5 pts

(a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

0,5 pts

(b) En déduire que : $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{3}{2}$.

0,5 pts

(5) (a) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,25 pts

(b) Dresser le tableau de variations de f .

0,25 pts

(c) Déterminer la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à sa demi-tangente au point $T(0, 1)$.

0,5 pts

(d) Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie III :

(1) Pour tout x de $[0, 1]$, on pose :

$$g(x) = f(x) - x$$

0,5 pts

(a) Montrer que g est une bijection de $[0, 1]$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

0,5 pts

(b) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que : $f(\alpha) = \alpha$.(2) Pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on considère les nombres réels :

$$x_k = \frac{k\alpha}{n}$$

Et on pose :

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt \quad \text{et} \quad J_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dt$$

0,5 pts

(a) Montrer que : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$|J_k - I_k| \leq \frac{3}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k) dt$$

0,5 pts

(b) En déduire que : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$|J_k - I_k| \leq \frac{3}{4} \left(\frac{\alpha}{n} \right)^2$$

(3) On pose l'intégrale suivante :

$$L = \int_0^\alpha f(t) dt$$

0,5 pts

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \frac{\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right) - L \right| \leq \frac{3\alpha^2}{4n}$$

0,25 pts

(b) En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right) = \int_0^\alpha f(t) dt$$

EXERCICE 2 : (3,5 pts)

Soit $m \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Partie I :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$(E_m) : mz^2 - (m-1)^2z - (m-1)^2 = 0$$

0,25 pts

(1) (a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est : $\Delta = (m^2 - 1)^2$.

0,5 pts

(b) Déterminer z_1 et z_2 , les deux solutions de l'équation (E_m) .

0,5 pts

(2) On prend uniquement dans cette question :

$$m = e^{i\theta} \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < \pi$$

Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

Partie II :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les deux points A et B d'affixes respectives :

$$m-1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{m} - 1$$

0,5 pts

(1) Montrer que les points O , A et B sont alignés si et seulement si $m \in \mathbb{R}$.

(2) On suppose que m n'est pas un nombre réel.

Soient C l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\pi/3$, et D l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\pi/3$.

Soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[AD]$ et $[OB]$.

0,5 pts

(a) Montrer que l'affixe du point C est :

$$c = m - 1 + \left(\frac{1}{m} - m\right) e^{i\pi/3}$$

Et que l'affixe du point D est :

$$d = (m - 1)e^{i\pi/3}$$

0,5 pts

(b) Montrer que :

$$2(p - r) = m - 1 + \left(\frac{1}{m} - m\right) (e^{i\pi/3} - 1)$$

Et :

$$2(q - r) = (m - 1)e^{i\pi/3} - \left(\frac{1}{m} - m\right)$$

0,25 pts

(c) Montrer que :

$$q - r = e^{i\pi/3}(p - r)$$

0,5 pts

(d) Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier votre réponse.**EXERCICE 3 : (3,5 pts)**

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre d'unité I :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La loi $\times$ étant la multiplication usuelle des matrices.

Pour tout réel a , on pose :

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+1 & 3 & -1 \\ 2a+3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Et soit l'ensemble G défini par :

$$G = \{M(a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

(1) Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \varphi(a) = M(a)$$

0,5 pts

(a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

0,5 pts

(b) Montrer que : $\varphi(\mathbb{R}) = G$. En déduire que $(G, \times)$ est un groupe commutatif.

0,5 pts

(c) Déterminer J , l'élément neutre dans $(G, \times)$.

0,5 pts

(d) Déterminer l'inverse de $M(a)$ dans $(G, \times)$.

0,5 pts

(e) Résoudre dans $(G, \times)$ l'équation :

$$M(1) \times X = M(2)$$

0,25 pts

(2) (a) Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$M(a) \times J = M(a) \times I$$

0,5 pts

(b) En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $M(a)$ n'est pas inversible dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

0,25 pts

(c) Vérifier que les matrices de la forme :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+2 & 3 & 0 \\ 3x+5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}$$

sont des solutions dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$ de l'équation :

$$M(1) \times X = M(2)$$

EXERCICE 4 : (3 pts)

0,5 pts

(1) Montrer que 137 est un nombre premier.

0,5 pts

(2) Déterminer un couple (u, v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que :

$$38u + 136v = 2$$

(3) Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$x^{38} \equiv 1 [137]$$

0,5 pts

(a) Montrer que x et 137 sont premiers entre eux.

0,5 pts

(b) Montrer que :

$$x^{136} \equiv 1 [137]$$

0,5 pts

(c) Montrer que :

$$x^2 \equiv 1 [137]$$

0,5 pts

(4) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation :

$$(E) : x^{19} \equiv 1 [137]$$