

EXERCICE 1 : (10 pts)

Partie I :

0,25 pts

(1) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,$

$$0 \leq 1 - x + x^2 - \frac{1}{x+1} \leq x^3$$

0,25 pts

(2) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,$

$$0 \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x) \leq \frac{x^4}{4}$$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} & \text{Si } x \in]0, +\infty[\\ \frac{1}{2} & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

Et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,5 pts

(1) (a) Montrer que f est continue à droite en 0.

0,5 pts

(b) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

0,5 pts

(c) Calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,5 pts

(2) (a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[,$

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{x^3} \quad \text{Où} \quad g(x) = x + \frac{x}{x+1} - 2\ln(1+x)$$

0,5 pts

(b) Montrer que : $\forall x \in I, 0 \leq g'(x) \leq x^2$.

0,25 pts

(c) En déduire que : $\forall x \in I,$

$$0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{3}$$

0,25 pts

(d) Déterminer le sens de variation de f sur I .

0,25 pts

(3) (a) Dresser le tableau de variation de f .

0,5 pts

(b) Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$.

Partie III :

0,5 pts

(1) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que : $f(\alpha) = \alpha$.(2) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

0,5 pts

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.

0,5 pts

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |u_n - \alpha|$$

0,5 pts

(c) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

0,25 pts

(d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .**Partie IV :**Pour tout $x \in I$, on pose :

$$F(x) = \int_x^1 f(t) dt$$

0,5 pts

(1) Montrer que la fonction F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in I$.

0,5 pts

(2) (a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$F(x) = 2 \ln 2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x)$$

0,5 pts

(b) Calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$, puis en déduire que :

$$\int_0^1 f(t) dt = 2 \ln 2 - 1$$

0,5 pts

(c) Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.**Partie V :**On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\Delta_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(t) dt$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k$$

0,25 pts

(1) (a) Vérifier que : $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1)$$

0,5 pts

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$$

0,25 pts

(2) (a) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone.

0,25 pts

(b) En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

0,25 pts

(c) Montrer que la limite l de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie :

$$\frac{3}{2} - 2 \ln 2 < l \leq \frac{1}{2}$$

EXERCICE 2 : (3,5 pts)

Soit m un nombre complexe non nul donné et

$$j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{2i\pi/3}$$

Partie I :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E_m) : z^2 + mj^2z + m^2j = 0$$

- 0,5 pts (1) Vérifier que : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.
- 0,25 pts (2) (a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est : $\Delta = [m(1 - j)]^2$.
- 0,5 pts (b) Déterminer z_1 et z_2 , les deux solutions de l'équation (E_m) .
- 0,5 pts (3) Dans cette question, on suppose que : $m = 1 + i$. Montrer que : $(z_1 + z_2)^{2022}$ est un imaginaire pur.

Partie II :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit φ la transformation du plan complexe qui à tout point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(z')$ tel que : $z' = (1 + j)z$.

- 0,25 pts (1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application φ .
- (2) On considère les points A, B et C d'affixes respectives m, mj et mj^2 , et on note $A'(a')$, $B'(b')$ et $C'(c')$ les images respectives des points A, B et C par l'application φ , et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[BA']$, $[CB']$ et $[AC']$.
- 0,75 pts (a) Montrer que :
- $$a' = -mj^2, \quad b' = -m \quad \text{et} \quad c' = -mj$$
- 0,25 pts (b) Montrer que : $p + qj + rj^2 = 0$.
- 0,5 pts (c) En déduire que le triangle PQR est équilatéral.

EXERCICE 3 : (3 pts)

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.

On considère dans $\mathbb{N}^2$ l'équation :

$$(E_n) : (x + 1)^n - x^n = ny$$

Soit (x, y) une solution de l'équation (E_n) dans $\mathbb{N}^2$ et soit p le plus petit diviseur premier de n .

- 0,25 pts (1) (a) Montrer que :
- $$(x + 1)^n \equiv x^n [p]$$
- 0,25 pts (b) Montrer que p est premier avec x et avec $(x + 1)$.

0,25 pts

(c) En déduire que :

$$(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1} [p]$$

0,5 pts

(2) Montrer que si n est pair, alors l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$.(3) On suppose que n est impair.

0,5 pts

(a) Montrer qu'il existe un couple (u, v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que :

$$nu + (p-1)v = 1$$

On rappelle que p est le plus petit diviseur premier de n .

0,25 pts

(b) Soient q et r respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de u par $(p-1)$. Vérifier que :

$$nr = 1 - (p-1)(v + nq)$$

0,5 pts

(c) On pose : $v' = -(v + nq)$. Montrer que : $v' \geq 0$.

0,5 pts

(d) Montrer que l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$.**EXERCICE 4 : (3,5 pts)**On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité I :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire et intègre. Soit l'ensemble suivant :

$$E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

0,25 pts

(1) (a) Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

0,25 pts

(b) Vérifier que pour tout a, b, c et d de $\mathbb{Z}$, on a :

$$M(a, b) \times M(c, d) = M(ac + 3bd, ad + bc)$$

0,5 pts

(c) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.(2) Soit φ l'application définie de E vers $\mathbb{Z}$ par :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \quad \varphi(M(a, b)) = |a^2 - 3b^2|$$

0,5 pts

(3) Montrer que φ est un homomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{Z}, \times)$.(4) Soit $M(a, b) \in E$.

0,25 pts

(a) Montrer que :

$$M(a, b) \times M(a, -b) = (a^2 - 3b^2)I$$

0,5 pts

(b) Montrer que si $M(a, b)$ est inversible dans $(E, \times)$, alors : $\varphi(M(a, b)) = 1$.

0,5 pts

(c) On suppose que : $\varphi(M(a,b)) = 1$. Montrer que $M(a,b)$ est inversible dans $(E, \times)$ et préciser son inverse.

0,25 pts

(5) (a) Montrer que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \quad \varphi(M(a,b)) = 0 \iff a = b = 0$$

0,25 pts

(b) En déduire que l'anneau $(E, +, \times)$ est intègre.

0,25 pts

(c) Est-ce que $(E, +, \times)$ est un corps ? Justifier votre réponse.