



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة الاستدراكية 2021
- الموضوع -

د. سعد شكري

saadchoukri.com



4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 4 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : L'analyse (8 pts)

EXERCICE 2 : L'analyse (4 pts)

EXERCICE 3 : Les nombres complexes (4 pts)

EXERCICE 4 : L'arithmétique (4 pts)

L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

EXERCICE 1 : (8 pts)

Partie I :

On considère la fonction f définie sur $I =]-\infty, 1[$ par :

$$f(x) = \ln(1 - x)$$

Soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,25 pts

(1) (a) Montrer que f est continue sur I .

0,25 pts

(b) Montrer que f est strictement décroissante sur I .

0,75 pts

(c) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

0,5 pts

(d) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

0,25 pts

(e) Donner le tableau de variations de f .

0,25 pts

(2) (a) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ est concave.

0,25 pts

(b) Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$.

0,25 pts

(3) (a) Montrer que f est une bijection de I vers $\mathbb{R}$.

0,25 pts

(b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

0,25 pts

(c) Vérifier que : $f^{-1}(-1) = 1 - e^{-1}$.

Partie II :

Pour tout réel x et tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$P_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

0,5 pts

(1) Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique réel $x_n \in]0, 1[$ tel que : $P_n(x_n) = 1$.

0,5 pts

(2) Déterminer le réel $\alpha = x_2$ et vérifier que $0 < \alpha < 1$.

0,5 pts

(3) (a) Montrer que : $\forall n \geq 2, P_{n+1}(x_n) > 1$.

0,5 pts

(b) En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante.

0,25 pts

(c) Montrer que : $\forall n \geq 2, x_n \in]0, \alpha]$.

0,25 pts

(d) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

(4) Pour tout $x \in I$ et tout $n \geq 2$, on pose :

$$f_n(x) = f(x) + P_n(x)$$

0,5 pts

(a) Montrer que : $\forall x \in I, \forall n \geq 2,$

$$f'_n(x) = \frac{-x^n}{1-x}$$

0,25 pts

(b) Montrer que : $\forall x \in [0, \alpha[, \forall n \geq 2,$

$$|f'_n(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha}$$

0,5 pts

(c) En déduire que : $\forall x \in [0, \alpha[, \forall n \geq 2,$

$$|f_n(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha}$$

0,5 pts

(d) Montrer que : $\forall n \geq 2,$

$$|f(x_n) + 1| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha}$$

0,5 pts

(e) En déduire la valeur de la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$ **EXERCICE 2 : (4 pts)**On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x \exp\left(t - \frac{t^2}{2}\right) dt$$

0,5 pts

(1) (a) Déterminer le signe de $F(x)$ en fonction de x .

1 pts

(b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.

0,5 pts

(2) (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 (1 - x) \exp\left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx$$

0,5 pts

(b) Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 F(x) dx$$

(3) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left((n-k) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \exp\left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx \right)$$

0,5 pts

(a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) F\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) F\left(\frac{k}{n}\right)$$

0,5 pts

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F\left(\frac{k}{n}\right)$$

0,5 pts

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 3 : (4 pts)

On considère m un nombre complexe différent de 2 et de $-i$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : z^2 - (m - i)z - im = 0$$

0,5 pts

(1) (a) Vérifier que le discriminant de (E) est $(m + i)^2$.

0,5 pts

(b) Déterminer z_1 et z_2 , les deux solutions de (E) .

0,75 pts

(c) Sachant que $m = e^{i\pi/8}$, écrire $z_1 + z_2$ sous forme exponentielle.

(2) On considère les points A , B et M d'affixes respectives 2, $-i$ et m , et soit M' le symétrique de M par rapport à l'axe imaginaire.

0,5 pts

(a) Déterminer en fonction de m l'affixe de M' .

0,75 pts

(b) Déterminer en fonction de m l'affixe du point N tel que le quadrilatère $ANM'B$ soit un parallélogramme.

1 pts

(c) Montrer que les droites (AM) et (BM') sont perpendiculaires si et seulement si : $\operatorname{Re}((2 - i)m) = \operatorname{Re}(m^2)$.

EXERCICE 4 : (4 pts)

Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit :

$$A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$$

Soit p un nombre premier impair tel que p divise A .

1 pts

(1) (a) Montrer que :

$$a^7 \equiv 1 [p]$$

Et en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$a^{7n} \equiv 1 [p]$$

1 pts

(b) Montrer que a et p sont premiers entre eux, puis en déduire que : $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$a^{(p-1)m} \equiv 1 [p]$$

(2) On suppose que 7 ne divise pas $p - 1$.

0,5 pts

(a) Montrer que :

$$a \equiv 1 [p]$$

0,5 pts

(b) En déduire que : $p = 7$.

1 pts

(3) Montrer que si p est un nombre premier impair qui divise A , alors :

$$p = 7 \quad \text{ou} \quad p \equiv 1 [7]$$