



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2021
- الموضوع -

ذ. سعد شكري

saadchoukri.com

المملكة المغربية
ⵜⴰⴳⴷⵓⴷⴰ ⵜⴰⴷⵣⴰⵢⵔⵉⵜ



وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة
+٥٢٠٧٠٣٠٠١ ٠١٠٢٧٤٤ ٠١٢٠٠
٨ ٠٢٠٢٨٢ ٠٢٧٠٠٠ ٨ ٠٢١١١
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 3 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : L'analyse (12 pts)

EXERCICE 2 : Les nombres complexes (4 pts)

EXERCICE 3 : L'arithmétique (4 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

EXERCICE 1 : (12 pts)

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{-2e^x}{1+e^x} + nx$$

Soit $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, où on prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm.

Partie I :

0,5 pts (1) (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - nx + 2)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,5 pts (b) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_n)$ admet, en $-\infty$, une asymptote (Δ_n) dont on déterminera une équation cartésienne.

0,5 pts (2) (a) Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'_n(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n$$

0,5 pts (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$$

0,5 pts (c) En déduire le sens de variations de f_n sur $\mathbb{R}$ en distinguant les cas $n = 0$ et $n \geq 1$.

0,5 pts (3) (a) Déterminer l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_n)$ au point I d'abscisse 0.

0,5 pts (b) Montrer que le point I est le seul point d'inflexion de $(\mathcal{C}_n)$.

0,5 pts (4) Représenter graphiquement dans le même repère les deux courbes $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

(5) Pour tout réel $t > 0$, on note $A(t)$ l'aire du domaine plan limité par $(\mathcal{C}_n)$ et les droites d'équations : $x = 0$, $x = t$ et $y = nx - 2$.

0,5 pts (a) Calculer $A(t)$ pour tout $t > 0$.

0,5 pts (b) Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t)$.

Partie II :

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f_0(u_n) \end{cases}$$

0,5 pts (1) (a) Montrer que l'équation $f_0(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

0,5 pts (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f'_0(x)| \leq \frac{1}{2}$.

0,5 pts (2) (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

0,5 pts

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$$

0,5 pts

(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers α .**Partie III :**On suppose dans cette partie que $n \geq 2$.

0,5 pts

(1) (a) Montrer qu'il existe un unique réel x_n solution de l'équation $f_n(x) = 0$.

0,5 pts

(b) Montrer que : $0 < x_n < 1$. On prendra $\frac{2e}{1+e} < 1,47$.

0,5 pts

(2) (a) Montrer que : $f_{n+1}(x_n) > 0$.

0,5 pts

(b) En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante.

0,5 pts

(c) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

0,5 pts

(3) (a) Montrer que : $\forall n \geq 2$,

$$\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n} \left(\frac{2e}{1+e} \right)$$

0,5 pts

(b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, puis montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 1$.

0,5 pts

(4) (a) Montrer que : $\forall n \geq 2, x_n \leq x_2$

0,5 pts

(b) En déduire la valeur de la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^n$.**EXERCICE 2 : (4 pts)**Soient a, b et c trois nombres complexes non nuls tels que $a + b \neq c$.

0,5 pts

(1) (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : z^2 - (a + b + c)z + c(a + b) = 0$$

0,5 pts

(b) On suppose dans cette question que :

$$a = i, \quad b = e^{i\pi/3} \quad \text{et} \quad c = a - b$$

Écrire les deux solutions de (E) sous forme exponentielle.(2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.On considère les points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ qu'on suppose non alignés. Soient $P(p)$ le centre de la rotation d'angle $\pi/2$ qui transforme B en A , $Q(q)$ le centre de la rotation d'angle $-\pi/2$ qui transforme C en A et $D(d)$ le milieu du segment $[BC]$.

1 pts

(a) Montrer que :

$$2p = b + a + (a - b)i \quad \text{et} \quad 2q = c + a + (c - a)i$$

0,5 pts

(b) Calculer : $\frac{p - d}{q - d}$.

0,5 pts

(c) En déduire la nature du triangle PDQ .

(3) Soient E le symétrique de B par rapport à P , F le symétrique de C par rapport à Q et K le milieu du segment $[EF]$.

0,5 pts

(a) Montrer que l'abscisse de K est : $k = a + \frac{i}{2}(c - b)$.

0,5 pts

(b) Montrer que les points K , P , Q et D sont cocycliques.

EXERCICE 3 : (4 pts)

Partie I :

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :

$$(E) : 47x - 43y = 1$$

0,25 pts

(1) Vérifier que le couple $(11, 12)$ est une solution particulière de (E) .

0,75 pts

(2) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) .

Partie II :

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation :

$$(F) : x^{41} \equiv 4 [43]$$

(1) Soit $x \in \mathbb{Z}$ une solution de (F) .

0,5 pts

(a) Montrer que x et 43 sont premiers entre eux, en déduire :

$$x^{42} \equiv 1 [43]$$

0,5 pts

(b) Montrer que :

$$4x \equiv 1 [43]$$

Puis en déduire que :

$$x \equiv 11 [43]$$

0,5 pts

(2) Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (F) .

Partie III :

On considère dans $\mathbb{Z}$ le système :

$$(S) : \begin{cases} x^{41} \equiv 4 [43] \\ x^{47} \equiv 10 [47] \end{cases}$$

(1) Soit x une solution de (S) .

0,5 pts

(a) Montrer que x est solution du système :

$$(S') : \begin{cases} x \equiv 11 [43] \\ x \equiv 10 [47] \end{cases}$$

0,5 pts

(b) En déduire que :

$$x \equiv 527 [2021]$$

On pourra utiliser la **Partie I**.

0,5 pts

(2) Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ du système (S) .