



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة الاستدراكية 2020
- الموضوع -

ن. سعد شكري

saadchoukri.com



4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux.
- Le candidat doit traiter l'exercice 3 et l'exercice 4 et choisir de traiter l'exercice 1 ou bien l'exercice 2.
- Le candidat doit traiter au total trois 3 exercices :

EXERCICE 1 : L'arithmétique (au choix) (3,5 points)

EXERCICE 2 : Les structures algébriques (au choix) (3,5 points)

EXERCICE 3 : Les nombres complexes (obligatoire) (3,5 points)

EXERCICE 4 : L'analyse (obligatoire) (13 points)

L'usage de la calculatrice est strictement interdit

EXERCICE 1 : (3,5 points)

Soient p et q deux nombres premiers vérifiant :

$$p < q \quad \text{et} \quad 9^{p+q-1} \equiv 1 [pq]$$

0,5 pts

(1) (a) Montrer que p et 9 sont premiers entre eux.

1 pts

(b) En déduire que :

$$9^{p-1} \equiv 1 [p] \quad \text{et que} \quad 9^q \equiv 1 [p]$$

0,5 pts

(2) (a) Montrer que $p - 1$ et q sont premiers entre eux.

0,5 pts

(b) En utilisant le théorème de Bézout, montrer que : $p = 2$.

0,5 pts

(3) (a) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que :

$$9^{q-1} \equiv 1 [q]$$

0,5 pts

(b) En déduire que : $q = 5$.

EXERCICE 2 : (3,5 points)

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre 3 à coefficients réels.

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel de dimension 9, et que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau non commutatif unitaire de zéro O et d'unité I :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère le sous-ensemble :

$$E = \left\{ M(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x - z & x \end{pmatrix} \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Partie I :

0,25 pts

(1) (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

0,5 pts

(b) Déterminer une base de $(E, +, \cdot)$.

0,25 pts

(2) (a) Vérifier que : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \forall (x', y', z') \in \mathbb{R}^3,$

$$M(x, y, z)M(x', y', z') = M(xx' - yy', xy' + yx', zz')$$

0,5 pts

(b) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.

Partie II :

On considère le sous-ensemble F de E des matrices de la forme $M(x, y, 0)$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

0,25 pts

(1) Montrer que F est un sous-groupe du groupe $(E, +)$.(2) On note φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers E définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x + iy) = M(x, y, 0)$$

0,25 pts

(a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E, \times)$.

0,5 pts

(b) En déduire que $(F^*, \times)$ est un groupe commutatif. (Où $F^* = F \setminus \{O\}$).

0,5 pts

(c) Montrer que $(F, +, \times)$ est un corps commutatif dont on précisera l'unité.

0,25 pts

(3) (a) Vérifier que : $\forall M(x, y, 0) \in F$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M(x, y, 0) = O$$

0,25 pts

(b) En déduire qu'aucun des éléments du sous-ensemble F n'admet un inverse pour la multiplication dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.**EXERCICE 3 : (3,5 points)****Partie I :**Soit m un nombre réel non nul.On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, les deux équations :

$$\begin{cases} (E) : z^2 + 2z + 1 + m^2 = 0 \\ (F) : z^3 + 2(1 - i)z^2 + (1 + m^2 - 4i)z - 2i(1 + m^2) = 0 \end{cases}$$

0,5 pts

(1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

0,25 pts

(2) (a) Montrer que l'équation (F) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

0,5 pts

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (F) .**Partie II :**Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les deux points :

$$A(-1 + im) \quad \text{et} \quad B(-1 - im)$$

Soient Ω le milieu du segment $[AB]$, A' le milieu du segment $[OB]$ et B' le milieu du segment $[OA]$.La rotation de centre Ω et d'angle $-\pi/2$ transforme A en $P(p)$, la rotation de centre A' et d'angle $-\pi/2$ transforme B en $Q(q)$ et la rotation de centre B' et d'angle $-\pi/2$ transforme O en $R(r)$.

1,5 pts

(1) Montrer que :

$$p = -1 + m, \quad q = \frac{1-i}{2}(-1 - im) \quad \text{et} \quad r = \bar{q}$$

0,25 pts

(2) (a) Vérifier que : $q - r = -ip$.

0,5 pts

(b) En déduire que $OP = QR$ et que les deux droites (OP) et (QR) sont orthogonales.**EXERCICE 4 : (13 points)****Partie I :**On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, 1]$ par :

$$f(x) = x \ln(2 - x)$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,75 pts

(1) (a) Montrer que f est dérivable sur I et que : $\forall x \in I$,

$$f'(x) = \ln(2 - x) - \frac{x}{2 - x}$$

0,5 pts

(b) Montrer que la fonction dérivée f' est strictement décroissante sur I .

0,75 pts

(c) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que :

$$f'(\alpha) = 0 \quad \text{et que} \quad f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2 - \alpha}$$

0,75 pts

(2) (a) Étudier les variations de f , puis donner son tableau de variations.

0,5 pts

(b) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ est concave.

0,5 pts

(c) Montrer que : $\forall t \in I, \forall x \in I$,

$$f(x) \leq f'(t)(x - t) + f(t)$$

0,5 pts

(d) En déduire que : $\forall x \in I$,

$$f(x) \leq x \ln 2 \quad \text{et} \quad f(x) \leq -x + 1$$

0,5 pts

(3) Représenter la courbe $(\mathcal{C})$. On prendra : $\|\vec{i}\| = 2$ cm.

0,75 pts

(4) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations respectives : $x = 0$, $x = 1$, et $y = 0$.**Partie II :**Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.On considère la fonction f_n définie sur $I = [0, 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(2 - x)$$

0,5 pts

(1) (a) Vérifier que f_n est positive sur I et que : $f_n(0) = f_n(1)$.

0,5 pts

(b) Montrer qu'il existe au moins $\alpha_n \in]0, 1[$ tel que : $f'_n(\alpha_n) = 0$.

0,75 pts

(2) (a) Montrer que f_n est dérivable sur I et que : $\forall x \in I$,

$$f'_n(x) = x^{n-1}g_n(x)$$

Où :

$$g_n(x) = n \ln(2 - x) - \frac{x}{2 - x}$$

0,5 pts

(b) Montrer que la fonction g_n est strictement décroissante sur I .

0,5 pts

(c) En déduire que α_n est unique.(3) On considère la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ ainsi définie.

1 pts

(a) Montrer que : $\forall n \geq 2$,

$$f_n(\alpha_n) = \frac{\alpha_n^{n+1}}{n(2 - \alpha_n)}$$

Puis en déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\alpha_n) = 0$$

1 pts

(b) Montrer que : $\forall n \geq 2$,

$$g_n(\alpha_{n+1}) = -\ln(2 - \alpha_{n+1})$$

En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.

0,25 pts

(c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

0,5 pts

(d) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$.**Partie III :**Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$$

0,75 pts

(1) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 2}$ est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.

0,5 pts

(2) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I_n = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2-x} dx$$

0,75 pts

(3) Montrer que : $\forall n \geq 2$,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Puis en déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$