

EXERCICE 1 : (3,5 points)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :

$$(D) : 7x^3 - 13y = 5$$

(1) Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ une solution de l'équation (D).

0,5 pts

(a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

0,5 pts

(b) En déduire que :

$$x^{12} \equiv 1 [13]$$

1 pts

(c) Montrer que :

$$x^3 \equiv 10 [13]$$

0,5 pts

(d) En déduire que :

$$x^{12} \equiv 3 [13]$$

1 pts

(2) Déduire des questions précédentes que l'équation (D) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

EXERCICE 2 : (3,5 points)

On note par $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux.

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle O et d'unité la matrice I :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et que $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif.

On considère le sous-ensemble E de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}^* \right\}$$

0,5 pts

(1) (a) Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0,5 pts

(b) Montrer que la multiplication n'est pas commutative dans E .

0,5 pts

(c) Vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*, \quad \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0,5 pts

(2) Montrer que $(E, \times)$ est un groupe non commutatif.

(3) On considère le sous-ensemble F de E défini par :

$$F = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}$$

0,5 pts

(a) Montrer que l'application φ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \varphi(x) = M(x)$$

est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(E, \times)$.

1 pts

(b) En déduire que $(F, \times)$ est un groupe commutatif dont on précisera l'élément neutre.**EXERCICE 3 : (3,5 points)**Soit m un nombre complexe non nul.**Partie I :**On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E) : \quad z^3 - 2mz^2 + 2m^2z - m^3 = 0$$

0,5 pts

(1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) . (On remarque que m est une solution de l'équation (E))(2) On note z_1 et z_2 les deux autres solutions de l'équation (E) autre que m .

0,25 pts

(a) Vérifier que :

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{m}$$

0,5 pts

(b) Dans le cas où :

$$m = 1 + e^{i\pi/3}$$

Écrire sous la forme algébrique z_1 et z_2 .**Partie II :**Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$a = me^{i\pi/3} \quad \text{et} \quad b = me^{-i\pi/3}$$

On note P le centre de la rotation d'angle $\pi/2$ qui transforme O en A , Q le centre de la rotation d'angle $\pi/2$ qui transforme A en B , et R le centre de la rotation d'angle $\pi/2$ qui transforme B en O .

0,25 pts

(1) Montrer que les points O , A et B ne sont pas alignés.

1 pts

(2) (a) Montrer que l'afixe de P est :

$$p = m \frac{\sqrt{2}}{2} e^{7i\pi/12}$$

Et que l'afixe de R est :

$$r = m \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-7i\pi/12}$$

0,5 pts

(b) Montrer que l'affixe de Q est :

$$q = m\sqrt{2} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

0,5 pts

(3) Montrer que $OQ = PR$ et que les deux droites (OQ) et (PR) sont perpendiculaires.**EXERCICE 4 : (13 points)****Partie I :**On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & \text{Si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

Et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm).

0,5 pts

(1) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \ln(t)$ sur l'intervalle $[x, x+1]$, montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

0,5 pts

(2) (a) En utilisant la proposition (P), montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0.

0,5 pts

(b) En utilisant la proposition (P), montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique dont on précisera la direction.

0,75 pts

(3) (a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = 3x^2 \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(1+x)} \right)$$

0,5 pts

(b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur I . (On pourra utiliser la proposition (P))

0,25 pts

(c) Dresser le tableau de variations de f .(4) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on pose :

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

0,75 pts

(a) Vérifier que : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$g'(x) = 2x \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(1+x)} \right)$$

En déduire que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

0,5 pts

(b) Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique notée α , puis vérifier que : $\alpha \in]1, 2[$. (On prendra $\ln 2 = 0,7$ et $\ln(3/2) = 1,5$).

0,5 pts

(c) En déduire que les seules solutions de l'équation $f(x) = x$ sont 0 et α .

0,5 pts

(5) (a) Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$. (On précisera la demi-tangente à droite en O et la branche parabolique de $(\mathcal{C})$)

0,25 pts

(b) Montrer que f est une bijection de I vers I . (On note f^{-1} sa bijection réciproque)

Partie II :

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} 0 < u_0 < \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$$

0,5 pts

(1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \alpha$.

0,5 pts

(2) (a) Montrer que : $g(]0, \alpha[) =]0, 1[$.

0,5 pts

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante.

0,25 pts

(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

0,5 pts

(3) Déterminer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Partie III :

On considère la fonction F définie sur l'intervalle I par : $\forall x \in I$,

$$F(x) = \int_x^1 f(t) dt$$

0,5 pts

(1) (a) Étudier suivant les valeurs de x , le signe de $F(x)$.

0,5 pts

(b) Montrer que la fonction F est dérivable sur I , puis déterminer sa dérivée première F' .

0,25 pts

(c) En déduire que F est strictement décroissante sur I .

0,5 pts

(2) (a) Montrer que : $\forall x \in [1, +\infty[, F(x) \leq (1 - x) \ln 2$.

0,25 pts

(b) En déduire la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

0,5 pts

(3) (a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$F(x) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{4} \int_x^1 \frac{t^3}{t+1} dt$$

0,5 pts

(b) Calculer l'intégrale suivante : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$\int_x^1 \frac{t^3}{t+1} dt$$

Remarquer que :

$$\frac{t^3}{1+t} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}$$

0,5 pts

(c) En déduire que : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$F(x) = \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \ln(1+x) - \frac{x^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

0,5 pts

(d) Calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$, puis en déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^1 f(t) dt$$

(4) Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

0,5 pts

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$:

$$-\frac{1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq -\frac{1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0,5 pts

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$-\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq v_n \leq -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Remarquer que :

$$\frac{2k+1}{2n} < \frac{k+1}{n}$$

0,25 pts

(c) Montrer que la suite numérique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente puis déterminer sa limite.