



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
المسالك الدولية  
الدورة الاستدراكية 2019  
- الموضوع -

ذ. سعد شكري

saadchoukri.com

المملكة المغربية

†.XΛΞ† | ΗΥΟΞΘ



وزارة التربية الوطنية  
والتعليم الأولي والرياضة

†◻◻⊙† | ⊙×◻◻ ◻◻⊙

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

4 h

### مدة الإنجاز

# الرياضيات

## المادة

9

## المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.  
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

## Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte quatre exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

**EXERCICE 1 :** Les nombres complexes ..... (3,5 pts)

**EXERCICE 2 : Le calcul des probabilités** ..... (3 pts)

**EXERCICE 3 :** Les structures algébriques ..... (3,5 pts)

**EXERCICE 4 : L'analyse** ..... (10 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

**EXERCICE 1 : (3,5 pts)**

Soit  $\alpha$  un nombre complexe non nul.

**Partie I :**

On considère dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  l'équation d'inconnue  $z$  :

$$(E_\alpha) : z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$$

0,25 pts

(1) (a) Vérifier que le discriminant de  $(E_\alpha)$  est  $\Delta = \alpha^2$ .

0,5 pts

(b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E_\alpha)$ .

0,5 pts

(2) Sachant que  $\alpha = |\alpha|e^{i\lambda}$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ , mettre les deux racines de l'équation  $(E_\alpha)$  sous la forme exponentielle.

**Partie II :**

On suppose que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points  $\Omega$ ,  $M_1$  et  $M_2$  d'affixes respectivement :

$$\alpha, \quad z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\alpha, \quad z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\alpha$$

Et soit  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\pi/3$ .

0,5 pts

(1) (a) Montrer que  $R(\Omega) = M_1$  et que  $R(M_1) = M_2$ .

0,25 pts

(b) En déduire que les deux triangles  $O\Omega M_1$  et  $OM_1 M_2$  sont équilatéraux.

0,25 pts

(2) (a) Vérifier que  $z_1 - z_2 = \alpha$ .

0,5 pts

(b) Montrer que les deux droites  $(\Omega M_2)$  et  $(OM_1)$  sont orthogonales.

0,25 pts

(c) En déduire que  $O\Omega M_1 M_2$  est un losange.

0,5 pts

(3) Montrer que pour tout réel  $\theta$ , le nombre  $Z$  est un réel.

$$Z = \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \div \frac{z_2 - |\alpha|e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha|e^{i\theta}}$$

**EXERCICE 2 : (3 pts)**

Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $n \geq 3$ .

On retire, sans remise, l'une après l'autre toutes les boules de cette urne. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1 pts

(1) Quelle est la probabilité pour que les boules 1, 2 et 3 sortent consécutivement et dans cet ordre ?

1 pts

(2) Calculer la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre, consécutivement ou pas.

1 pts

(3) On considère la variable aléatoire  $X_n$  égale au nombre de tirages nécessaire pour obtenir les boules 1, 2 et 3. Déterminer la loi de probabilité de  $X_n$ .

### EXERCICE 3 : (3,5 pts)

On considère l'espace vectoriel de dimension 2 noté  $(V_2, +, \cdot)$ . Soit  $(\vec{i}, \vec{j})$  une base de  $V_2$ .

On pose :

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$$

Soit  $*$  la loi de composition interne définie par :

$$\begin{cases} \forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, \\ (x\vec{i} + y\vec{j}) * (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = (xx' + yy')\vec{i} + (xy' + yx')\vec{j} \end{cases}$$

0,25 pts

(1) (a) Montrer que  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est une base de  $V_2$ .

0,25 pts

(b) Vérifier que :

$$\vec{e}_1 * \vec{e}_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_2 * \vec{e}_2 = \vec{e}_2, \quad \vec{e}_1 * \vec{e}_2 = \vec{e}_2 * \vec{e}_1 = \vec{0}$$

0,25 pts

(c) Montrer que :

$$\begin{cases} \forall (X, X', Y, Y') \in \mathbb{R}^4, \\ (X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2) * (X'\vec{e}_1 + Y'\vec{e}_2) = XX'\vec{e}_1 + YY'\vec{e}_2 \end{cases}$$

0,25 pts

(2) (a) Montrer que la loi  $*$  est commutative.

0,25 pts

(b) Montrer que la loi  $*$  est associative.

0,25 pts

(c) Montrer que la loi  $*$  admet un élément neutre.

0,25 pts

(d) Montrer que  $(V_2, +, *)$  est un anneau commutatif unitaire.

(3) Soit  $\vec{u} \in V_2 \setminus \{\vec{0}\}$ .

On note  $E$  l'ensemble définie par :

$$E_{\vec{u}} = \{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

0,25 pts

(a) Montrer que  $(E_{\vec{u}}, +)$  est un sous-groupe du groupe  $(V_2, +)$ .

0,25 pts

(b) Montrer que  $(E_{\vec{u}}, +, \cdot)$  est un sous-espace vectoriel de l'espace  $(V_2, +, \cdot)$ .

0,5 pts

(c) Montrer que  $E_{\vec{u}}$  est stable pour  $*$  si et seulement si la famille  $(\vec{u} * \vec{u}, \vec{u})$  est liée.

(4) On suppose que  $\exists \alpha \in \mathbb{R}^*$  tel que  $\vec{u} * \vec{u} = \alpha\vec{u}$ , et on considère l'application  $\varphi$  suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^* &\longrightarrow E_{\vec{u}} \\ x &\longmapsto \frac{x}{\alpha}\vec{u} \end{aligned}$$

0,5 pts

(a) Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $(\mathbb{R}^*, \times)$  vers  $(E_{\vec{u}}^*, *)$ .

0,25 pts

(b) En déduire que  $(E_{\vec{u}}, +, *)$  est un corps commutatif.

### EXERCICE 4 : (10 pts)

#### Partie I :

On considère la fonction  $g$  définie sur  $I = ]-1, +\infty[$  par :

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x(1+x) \ln(1+x)$$

0,25 pts

(1) (a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = 2$ .

0,5 pts

(b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ .

0,5 pts

(2) Montrer que  $g$  est dérivable sur  $I$  et que :  $\forall x \in I$ ,

$$g'(x) = -2(1+2x) \ln(1+x)$$

(3) On donne le tableau de variations de  $g$ .

0,5 pts

(a) Montrer qu'il existe un réel strictement positif  $\alpha$  unique tel que  $g(\alpha) = 0$ .

0,25 pts

(b) Vérifier que  $\alpha < 1$ . On prendra  $\ln 2 = 0,7$ .

0,5 pts

(c) En déduire que  $\forall x \in ]-1, \alpha[$ ,  $0 < g(x)$  et que  $\forall x \in ]\alpha, +\infty[$ ,  $g(x) < 0$ .

#### Partie II :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $I$  par :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$$

Soit  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

0,5 pts

(1) (a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,5 pts

(b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,75 pts

(2) (a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $I$  et que :  $\forall x \in I$ ,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$$

0,5 pts

(b) Donner le sens de variation de  $f$  sur  $I$ .

0,75 pts

(c) Vérifier que :

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)} \quad \text{et} \quad \forall x \in I, \quad f(x) \leq \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$$

0,25 pts

(3) (a) Donner l'équation de la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C})$  au point d'abscisse 0.

0,5 pts

(b) Montrer que :  $\forall x > 0$ ,  $\ln(1+x) < x$ .

0,25 pts

(c) En déduire que :  $\forall x > 0$ ,  $f(x) < x$ .

1 pts

(d) Représenter graphiquement  $(T)$  et  $(\mathcal{C})$ . On prendra  $\alpha = 0,8$  et  $\|\vec{i}\| = 2$  cm.

**Partie III :**

On pose l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^1 f(x) dx$$

1 pts

- (1) (a) En utilisant le changement de variable  $t = \frac{1-x}{1+x}$ , montrer que :

$$J = \frac{\pi}{8} \ln 2$$

0,5 pts

- (b) Déterminer, en  $\text{cm}^2$ , l'aire du domaine plan limité par la courbe  $(C)$ , la tangente  $(T)$ , la droite d'équation  $x = 0$  et la droite d'équation  $x = 1$ .

1 pts

- (2) En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer l'intégrale suivante :

$$K = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x} dx$$