



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2019
- الموضوع -

ذ. سعد شكري

saadchoukri.com

المملكة المغربية

†.XIIΛΞ† | ΗΣΥΟΞΘ



وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

†◻◻⊙† | ⊙×◻≤ ◻◻⊙

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte quatre exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : Les structures algébriques (3,5 pts)

EXERCICE 2 : Les nombres complexes (3,5 pts)

EXERCICE 3 : L'arithmétique (3 pts)

EXERCICE 4 : L'analyse (10 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

EXERCICE 1 : (3,5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ un anneau unitaire de zéro la matrice nulle O et d'unité la matrice I :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad (x + yi) * (a + bi) = xa + (x^2b + a^2y)i$$

0,25 pts

(1) (a) Montrer que la loi $*$ est commutative sur $\mathbb{C}$.

0,5 pts

(b) Montrer que la loi $*$ est associative sur $\mathbb{C}$.

0,25 pts

(c) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre e que l'on déterminera.

0,25 pts

(d) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Montrer que le nombre complexe $x + yi$ admet le nombre complexe :

$$\frac{1}{x} - \frac{y}{x^4}i$$

comme symétrique pour la loi $*$.

(2) On considère le sous-ensemble E de $\mathbb{C}$ défini par :

$$E = \{x + yi \mid x \in \mathbb{R}_+^*, y \in \mathbb{R}\}$$

0,25 pts

(a) Montrer que E est stable pour la loi $*$ dans $\mathbb{C}$.

0,5 pts

(b) Montrer que $(E, *)$ est un groupe commutatif.

0,5 pts

(3) On considère le sous-ensemble G de E défini par :

$$G = \{1 + yi \mid y \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que G est un sous-groupe de $(E, *)$.

(4) On considère l'ensemble :

$$F = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}_+^*, y \in \mathbb{R} \right\}$$

0,25 pts

(a) Montrer que F est stable pour la loi $\times$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

0,5 pts

(b) Soit φ l'application de E vers F qui à tout nombre complexe $x + yi$ de E fait correspondre la matrice $M(x^2, y)$ de F . Montrer que φ est un isomorphisme de $(E, *)$ vers $(F, \times)$.

0,25 pts

(c) En déduire que $(F, \times)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE 2 : (3,5 pts)

Soit m un nombre complexe non réel ($m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$).

Partie I :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z définie par :

$$(E) : z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0$$

0,25 pts

(1) (a) Montrer que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

0,5 pts

(b) Déterminer z_1 et z_2 , les deux solutions de l'équation (E) .

(2) On suppose dans cette question que $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$.

0,5 pts

(a) Déterminer le module et un argument de $z_1 + z_2$.

0,25 pts

(b) Montrer que si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ alors $z_1 + z_2 = 2i$.

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, C, D et Ω tels que :

$$a = 1 + i, \quad b = (1+i)m, \quad c = 1 - i$$

D est l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$, et Ω est le milieu du segment $[CD]$.

0,5 pts

(1) (a) Montrer que l'abscisse du point Ω est :

$$\omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$$

0,25 pts

(b) Calculer $\frac{b-a}{\omega}$.

0,5 pts

(c) En déduire que $(O\Omega) \perp (AB)$ et que $AB = 2O\Omega$.

(2) La droite $(O\Omega)$ coupe la droite (AB) au point H d'abscisse h .

0,5 pts

(a) Montrer que $\frac{h-a}{b-a}$ est un réel et que $\frac{h}{b-a}$ est un imaginaire pur.

0,25 pts

(b) En déduire h en fonction de m .

EXERCICE 3 : (3 pts)

On admet que 2969 est un nombre premier.

Soient n et m deux entiers naturels vérifiant :

$$n^8 + m^8 \equiv 0 \pmod{2969}$$

(1) On suppose dans cette question que 2969 ne divise pas n .

0,5 pts

(a) En utilisant le théorème de Bézout, montrer que :

$$\exists u \in \mathbb{Z}, \quad u \times n \equiv 1 \pmod{2969}$$

0,5 pts

(b) En déduire que :

$$(u \times m)^8 \equiv -1 [2969] \quad \text{et} \quad (u \times m)^{2968} \equiv -1 [2969]$$

On remarque que $2968 = 8 \times 371$.

0,5 pts

(c) Montrer que 2969 ne divise pas $u \times m$.

0,5 pts

(d) En déduire qu'on a aussi :

$$(u \times m)^{2968} \equiv 1 [2969]$$

0,5 pts

(2) (a) En utilisant les résultats précédents, montrer que 2969 divise n .

0,5 pts

(b) Montrer que :

$$n^8 + m^8 \equiv 0 [2969] \iff n \equiv 0 [2969] \text{ et } m \equiv 0 [2969]$$

EXERCICE 4 : (10 pts)

Partie I :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4x \left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1 \right)$$

et on note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,5 pts

(1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

0,5 pts

(2) (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 4(e^{-x} - 1)(1 - x)$$

0,75 pts

(b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, puis donner son tableau de variations.

0,5 pts

(c) Montrer qu'il existe un unique réel α dans $]3/2, 2[$ tel que $f(\alpha) = 0$. (On prendra $e^{3/2} = 4,5$).

0,25 pts

(d) Vérifier que :

$$e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

0,5 pts

(3) (a) En appliquant le théorème de Rolle à la fonction f' , montrer qu'il existe un réel x_0 de $]0, 1[$ tel que $f'''(x_0) = 0$.

0,5 pts

(b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f'' , montrer que, pour tout réel x différent de x_0 de $[0, 1]$, on a :

$$\frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$$

0,25 pts

(c) En déduire que $I(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$.

0,5 pts

(4) (a) Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.

0,5 pts

(b) Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.On prendra $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$, $f(1) = -0,5$ et il n'est pas demandé de représenter le point I .

0,25 pts

(5) (a) Vérifier que $\forall x \in]-\infty, \alpha]$, $f(x) \leq 0$.

0,75 pts

(b) Montrer que :

$$\int_0^\alpha f(x)dx = \frac{2}{3}\alpha(\alpha^2 - 3)$$

En déduire que $\frac{3}{2} < \alpha \leq \sqrt{3}$.

0,5 pts

(c) Calculer en fonction de α , en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x = \alpha$.**Partie II :**On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 < \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) + u_n \end{cases}$$

0,5 pts

(1) (a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < \alpha$.

0,25 pts

(b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.(2) On suppose que $0 \leq u_0$ et on pose : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

0,5 pts

(a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$. On prendra $\ln 2 = 0,69$.

0,5 pts

(b) En utilisant le résultat précédent, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n$. On remarque que $f(x) + x = xg(x)$.

0,25 pts

(c) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

0,5 pts

(d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.(3) On suppose que $u_0 < 0$.

0,5 pts

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq f(u_0)$.

0,5 pts

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_0 + nf(u_0)$.

0,25 pts

(c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.