



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة الاستدراكية 2018
- الموضوع -

ذ. سعد شكري

saadchoukri.com

المملكة المغربية

†.XΛΞ† | ΗΥΟΞΘ



وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

+oC.U.O+ | %OXC< o.C%O

[illegible]

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 4 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : Les structures algébriques (3,5 pts)

EXERCICE 2 : Les nombres complexes (3,5 pts)

EXERCICE 3 : Le calcul des probabilités (3 pts)

EXERCICE 4 : L'analyse (10 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

EXERCICE 1 : (3,5 pts)

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle O et d'unité la matrice I :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel de dimension 4.

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose la matrice suivante :

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

Et on considère l'ensemble E défini par :

$$E = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

- 0,5 pts (1) Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.
- 0,5 pts (2) (a) Montrer que E est un sous-espace de l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
- 0,25 pts (b) Montrer que l'espace vectoriel réel $(E, +, \cdot)$ est de dimension 2.
- 0,25 pts (3) (a) Montrer que E est stable pour la loi $\times$.
- 0,5 pts (b) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.
- (4) On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne T par :
Pour tout $M(x, y)$ et $M(x', y')$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$M(x, y)TM(x', y') = M(x, y) \times M(x', y') - M(y, 0) \times M(y', 0)$$

Soit j l'application de $\mathbb{C}^*$ vers E qui à tout nombre complexe $x + iy$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, fait correspondre la matrice $M(x, y)$ de E .

- 0,25 pts (a) Montrer que E est stable pour la loi T .
- 0,25 pts (b) Montrer que j est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers (E, T) .
- 0,25 pts (c) On pose l'ensemble suivant : $E^* = E \setminus \{O\}$. Montrer que (E^*, T) est un groupe commutatif.
- 0,5 pts (5) (a) Montrer que la loi T est distributive par rapport à la loi $+$ dans E .
- 0,25 pts (b) Montrer que $(E, +, T)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 2 : (3,5 pts)

- (1) Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On pose :

$$h(z) = i \left(\frac{z - 2i}{z - i} \right)$$

- 0,5 pts (a) Vérifier que :

$$h(z) = z \iff z^2 - 2iz - 2 = 0$$

0,5 pts

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : z^2 - 2iz - 2 = 0$$

(2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.On note a et b les deux solutions de l'équation (E) tel que : $\text{Re}(a) = 1$.Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, a, b\}$ on note $M(z)$, $M'(h(z))$, $A(a)$ et $B(b)$ les points d'affixes respectivement z , $h(z)$, a et b .

0,75 pts

(a) Montrer que :

$$\frac{h(z) - a}{h(z) - b} = -\frac{z - a}{z - b}$$

0,75 pts

(b) En déduire que :

$$(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) \equiv \pi + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) \quad [2\pi]$$

0,5 pts

(3) (a) Montrer que si M , A et B sont alignés alors M , A , B et M' sont alignés.

0,5 pts

(b) Montrer que si M , A et B ne sont pas alignés alors M , A , B et M' sont cocycliques.

EXERCICE 3 : (3 pts)

On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.

On désigne par X la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition de la face *pile*, c'est-à-dire le nombre de fois d'apparition de la face *pile* divisé par 10.

1 pts

(1) (a) Déterminer les valeurs prises par X .

1 pts

(b) Déterminer la probabilité de l'événement : $[X = 1/2]$.

1 pts

(2) Quelle est la probabilité de l'événement : $X \geq 9/10$.

EXERCICE 4 : (10 pts)

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}(\ln x)^2 & \text{Si } x > 0 \\ 0 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,5 pts

(1) (a) Montrer que f est continue à droite en 0. On pourra remarquer que :

$$f(x) = 4\sqrt[4]{x} \left(\sqrt[4]{x} \ln \sqrt[4]{x} \right)^2$$

0,75 pts

(b) Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,75 pts

- (2) (a) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,75 pts

- (b) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

1 pts

- (c) Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$, en déduire que : $\forall x \in]0, 1]$,

$$0 \leq \sqrt{x}(\ln x)^2 \leq \left(\frac{4}{e}\right)^2$$

0,5 pts

- (d) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé.
On prendra pour unité 2 cm.

- (3) Pour tout réel $x \geq 0$, on pose :

$$F(x) = \int_x^1 f(t) dt$$

0,5 pts

- (a) Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

1 pts

- (b) Calculer $F'(x)$ pour $x \geq 0$, en déduire le sens de variation de F sur $[0, +\infty[$.

0,75 pts

- (4) (a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer : $\forall x > 0$,

$$\int_x^1 \sqrt{t} \ln t dt$$

0,75 pts

- (b) Montrer que pour $x > 0$:

$$F(x) = -\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2 + \frac{8}{9}x\sqrt{x} \ln x - \frac{16}{27}x\sqrt{x} + \frac{16}{27}$$

1 pts

- (c) En déduire l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations respectives : $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

- (5) Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \int_{1/n}^1 f(x) dx$$

1 pts

- (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée et strictement monotone.

0,75 pts

- (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente puis calculer la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.